REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

XLIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Comunidad de Madrid

FASE CERO: viernes 23 de noviembre de 2012

- En la hoja de respuestas, escribe la letra de la opción que creas correcta
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos; cada respuesta en blanco 1 punto, y cada respuesta errónea, 0 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.
- TIEMPO: 3 horas.

1. ¿Cuántos números reales satisfacen la ecuación $(x^2+4x-2)^2=(5x^2-1)^2$

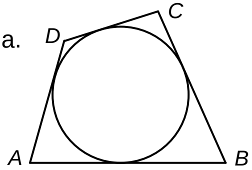
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2. ¿Cuál es el menor de los siguientes números?

A) $\frac{3}{2}$ B) $\log_3 2$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\log_4 10$ E) $\sqrt[3]{4}$

3. El cuadrilátero *ABCD* es circunscrito a una circunferencia. Si *AB* = 16 y *CD* = 10, ¿cuál es el perímetro del cuadrilátero?

A) 50 B) 52 C) 54 D) 56 E) 58



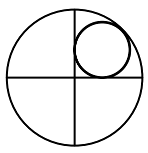
4. Si $\left[\sqrt{x}\right]=9$ y $\left[\sqrt{y}\right]=12$, ¿cuál es el mayor valor posible para $[x+y]$?
Recuerda: [*a*] es el mayor entero menor o igual que *a*.

A) 268 B) 225 C) 242 D) 270 E) 256

5. Si *a* y *b* son enteros positivos para los que $a^2-b^2=2017$, ¿cuál es el valor de a^2+b^2?

A) 2 026 081 B) 2 026 082 C) 2 026 083 D) 2 029 545 E) 2 034 145

6. Dos rectas perpendiculares, que se cortan en el centro de un círculo de radio 1, dividen a éste en cuatro partes iguales. En una de estas partes inscribimos una circunferencia, como se muestra en la figura. ¿Cuál es su radio?



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\sqrt{2}-1$ D) $\frac{1}{2}$ E) $2-\sqrt{2}$

7. Si x e y son números distintos de cero tales que $x\cdot y=\frac{x}{y}=x-y$, ¿cuál es el valor de $x+y$?

A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

8. *a, b* y *c* son números positivos que verifican $a+b^2+2ac=29$, $b+c^2+2ab=18$, $c+a^2+2bc=25$. ¿Cuál es el valor de *a* + *b* + *c*?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

9. Una función *f*, definida para cualquier número distinto de cero, verifica que $f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\cdot f(-x)=2x$. Calcula *f*(2).

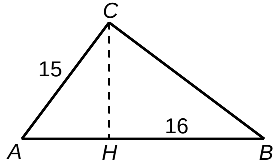
A) 2,5 B) 3 C) 3,5 D) 4 E) 4,5

10. *N* = [*xyz*] es un número de tres cifras, todas distintas de cero.
Si $N^2 = (x + y + z)^5$ entonces $x^2+y^2+z^2$ es igual a:

A) 21 B) 23 C) 29 D) 33 E) 37

11. En el triángulo rectángulo *ABC* de hipotenusa *AB*, el cateto *AC* mide 15. Si la altura *CH* divide a *AB* en dos segmentos *AH* y *HB*, con *HB* = 16, el área del triángulo *ABC* es:

A) 120 B) 144 C) 150
D) 216 E) $144\sqrt{5}$



12. Una bolsa contiene 11 bolas numeradas con: 1, 2, 3,…, 11. Sacamos simultáneamente seis bolas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números de estas seis bolas sea impar?

A) $\frac{133}{231}$ B) $\frac{115}{231}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{118}{231}$ E) $\frac{6}{11}$

13. El número de soluciones enteras positivas del sistema $\left.\begin{matrix} xy+yz=44 \\ xz+yz=23 \end{matrix}\right\}$ es:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

14. En el triángulo rectángulo *ABC* el ángulo $\hat{A}$ = 30º. La circunferencia de diámetro el cateto *AB* corta a la hipotenusa en un punto *D*. Si $CD=\sqrt{3}$, ¿cuánto mide el cateto *AB*?

A) $3\sqrt{3}$ B) 6 C) $4\sqrt{3}$ D) 8 E) $5\sqrt{3}$

15. El discriminante de una ecuación de segundo grado con coeficientes enteros nunca puede ser:

A) 23 B) 24 C) 25 D) 28 E) 33

(Recuerda: el discriminante de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ es $b^2 - 4ac$)

16. Lanzamos ocho veces un dado equilibrado de seis caras. Si el número 3 aparece exactamente 3 veces, ¿cuál es la probabilidad de que no aparezca dos veces consecutivas?

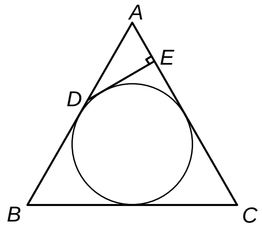
A) $\frac{5}{14}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{9}{14}$

17. Si *a, b, c* son distintos de cero las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ vienen dadas por la expresión:

A) $\dfrac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$ B) $\dfrac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}$ C) $\dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

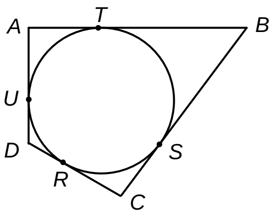
D) $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$ E) Nada de lo anterior

18. La figura adjunta muestra el triángulo equilátero *ABC*, su circunferencia inscrita y el segmento *DE* perpendicular al lado *AC* y tangente a la circunferencia inscrita; el punto *D* sobre el lado *AB* y el *E* sobre el lado *AC*. Si $AE = 1$, la longitud del lado del triángulo *ABC* es:



A) $3\sqrt{3}$ B) $3+\sqrt{3}$ C) $6-\sqrt{3}$ D) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ E) $\sqrt{6}+\sqrt{3}$

19. La circunferencia de la figura está inscrita en el cuadrilátero *ABCD*, siendo *R, S, T* y *U* los puntos de tangencia con los lados. Si Â = 90º, *DR* = 3 y el arco *RST* es de 210º, el área del círculo es:



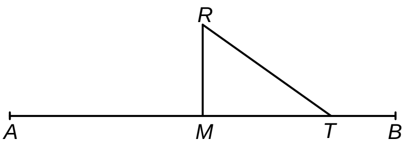
A) 36π B) 32π C) 27π D) 18π

E) Nada de lo anterior

20. Determina el número *n*, de manera que los últimos siete dígitos de *n*! sean 8 000 000.

A) 24 B) 25 C) 26 D) 27 E) 28

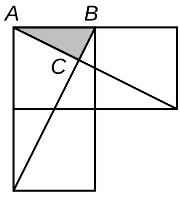
21. Desde el punto medio, *M*, del segmento *AB*, de *p* unidades de longitud, trazamos el segmento *MR*, de *q* unidades de longitud, perpendicular a *AB*. Si $RT = \dfrac{p}{2}$, las longitudes de los segmentos *AT* y *TB* son las soluciones de la ecuación:



A) $x^2 + px + q^2 = 0$ B) $x^2 - px + q^2 = 0$

C) $x^2 + px - q^2 = 0$ D) $x^2 - px - q^2 = 0$ E) $x^2 - px + q = 0$

22. Los tres cuadrados de la figura son iguales y de lado 1. ¿Cuál es el área del triángulo *ABC*?



A) $\dfrac{1}{6}$ B) $\dfrac{1}{5}$ C) $\dfrac{2}{9}$ D) $\dfrac{1}{3}$

E) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

23. El valor de $201\,220\,112\,010^2 - 2 \cdot 201\,220\,112\,007^2 + 201\,220\,112\,004^2$ es:

A) 48 B) 38 C) 28 D) 18 E) 8

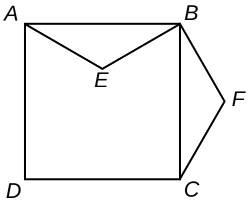
24. La base de un triángulo isósceles mide $\sqrt{2}$. Si las medianas sobre los dos lados iguales son perpendiculares entre sí, el área del triángulo es:

A) 1,5 B) 2 C) 2,5 D) 3,5 E) 4

25. En el triángulo *ABC*, *BD* es una mediana y *E* su punto medio. Si la prolongación de CE corta a AB en F con BF = 5, la longitud del lado AB es:

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

26. Sobre dos de los lados del cuadrado *ABCD* de la figura, se construyen dos triángulos isósceles e iguales, *AEB* y *BCF* con uno de sus ángulos de 120º. Si $EF = \sqrt{2}$, el área del cuadrado *ABCD* es:



A) $2\sqrt{2}$ B) 3 C) $2\sqrt{3}$ D) 4

E) Nada de lo anterior

27. Si los lados de un triángulo isósceles, no rectángulo, son: sen*x*, cos*x* y tg*x*, el valor de sen*x* es:

A) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) Nada de lo anterior

28. Colocados en orden creciente los números *a* = 1000!, *b* = (400!)·(400!)·(200!), *c* = (500!)·(500!), *d* = (600!)·(300!)·(100!) y *e* = (700!)·(300!), la respuesta correcta sería:

A) *a* < *b* < *c* < *d* < *e* B) b < c < d < e < a C) b < d < c < e < a

D) b < d < c < a < e E) c < b < a < d < e

29. Elegido al azar un número *x* en el intervalo [0, 3], la probabilidad de que el número elegido verifique $15x^2 + 3 < 14x$ es:

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{15}$ C) $\frac{4}{45}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{1}{3}$

30. El valor de la suma de la siguiente serie de infinitos sumandos es:

$$S = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} - \frac{1}{256} + \frac{1}{512} - \frac{1}{1024} - \frac{1}{2048} + \ldots$$

A) 0 B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{6}{7}$ D) $\frac{9}{32}$ E) $\frac{27}{32}$

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

XLIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Comunidad de Madrid

FASE CERO: viernes 23 de noviembre de 2012

1D $\left(x^2+4x-2\right)^2=\left(5x^2-1\right)^2 \Leftrightarrow \left(x^2+4x-2\right)^2-\left(5x^2-1\right)^2=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x^2+4x-2\right)+\left(5x^2-1\right)\right]\cdot\left[\left(x^2+4x-2\right)-\left(5x^2-1\right)\right]=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2+4x-3=0 \\ -4x^2+4x-1=0 \end{cases}$$

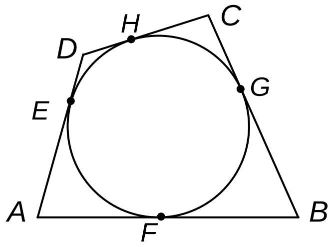
En la primera ecuación el discriminante es $D = b^2 - 4ac = 16 + 72 > 0$, dos soluciones reales.

En la segunda $D = b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0$, una solución real. En total tres soluciones reales.

2B $\frac{3}{2} > 1$, $\log_3 2 < 1 = \log_3 3$, $\frac{\pi}{2} > 1$, $\log_4 10 > \log_4 4 = 1$, $\sqrt[3]{4} > \sqrt[3]{1} = 1$.

El menor de todos es $\log_3 2$.

3B Considerando los puntos de tangencia, E, F, G, H, como $ED = DH$, $HC = CG$, $GB = BF$ y $FA = AE$, el perímetro es igual $2(AB + DC) = 2(16 + 10) = 52$.



4A $\left[\sqrt{x}\right]=9 \Rightarrow 9 \le \sqrt{x} < 10 \Rightarrow 81 \le x < 100$. Análogamente $144 \le y < 169$.

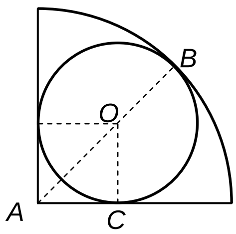
Por lo tanto $x + y < 269$, luego el máximo valor de $[x + y] = 268$.

5E Es importante darse cuenta que 2017 es primo.

Como $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 2017 \Rightarrow a - b = 1$ y $a + b = 2017$, de donde $a = 1009$ y $b = 1008$. Se deduce que $a^2 - b^2 = 1018081 + 1016064 = 2034145$.

6C $OC = OB = r$, $OA = r\sqrt{2}$, por lo tanto $AB = r + r\sqrt{2}$, es decir,

$$1 = r\left(1+\sqrt{2}\right) \Rightarrow r = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$$



7A $x \cdot y = \frac{x}{y} \Rightarrow y = \pm 1$.

Si $y = 1 \Rightarrow x = x - 1$ que es imposible.

Si $y = -1 \Rightarrow -x = x + 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto $x + y = -\frac{3}{2}$.

8E Sumando las tres expresiones dadas,

$$\left.\begin{aligned} a+b^2+2ac&=29\\ b+c^2+2ab&=18\\ c+a^2+2bc&=25 \end{aligned}\right\}\Rightarrow (a+b+c)+(a+b+c)^2=72\Rightarrow(a+b+c)=\frac{-1\pm\sqrt{1+288}}{2}=\begin{cases}-9\\ 8\end{cases}$$

Como *a, b, c*, son números positivos, entonces $(a+b+c)=8$.

9E $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x}\cdot f(-x)=2x$.

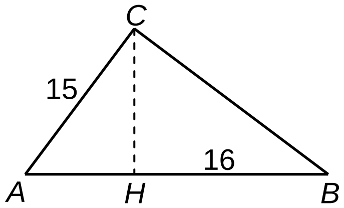
Si tomamos $x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow f(2)+2f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$. Si tomamos $x=-2\Rightarrow f\left(-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{2}f(2)=-4$.

Eliminando entre ambas expresiones $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ se obtiene $2\cdot f(2)=9\Rightarrow f(2)=\dfrac{9}{2}$.

10C Si $(100x+10y+z)^2=(x+y+z)^5$ quiere decir que $(x+y+z)$ es un cuadrado perfecto y que el número *N* es una quinta potencia de tres cifras.

La única posibilidad es $3^5 = 243$ y verifica $2 + 4 + 3 = 9$ que es un cuadrado perfecto.

$x^2+y^2+z^2=2^2+4^2+3^2=29$.



11C $15^2=(16+AH)\cdot AH\Rightarrow AH^2+16AH-225=0\Rightarrow AH=9$.

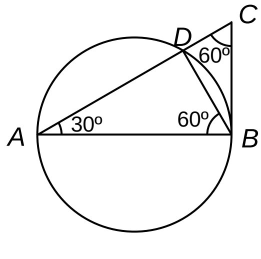
Se deduce que $CH = 12$ y el área $S=\dfrac{25\cdot 12}{2}=150$.

12D Posibilidades de elegir las 6 bolas: $C_{11,6}=462$.

Para que la suma sea impar tiene que haber 1, 3 ó 5 números impares y los restantes pares.
Un impar y cinco pares hay $6\cdot C_{5,5} = 6$.
Tres impares y tres pares hay $C_{6,3}\cdot C_{5,3} = 20\cdot 10 = 200$.
Cinco impares y un par hay $C_{6,5}\cdot 5 = 30$.
La probabilidad pedida es $\dfrac{6+200+30}{462}=\dfrac{236}{462}=\dfrac{118}{231}$.

13C $(x+y)\cdot z=23\Rightarrow\begin{cases} z=1\\ z=23\end{cases}$

Si $z = 1$, $x + y = 23$.
Pero como $(x+z)\cdot y=44$, sólo hay dos posibilidades: $x = 21$, $y = 2$ o $x = 1$, $y = 22$.
Si $z = 23$, $x + y = 1$, no tiene solución con números enteros positivos.



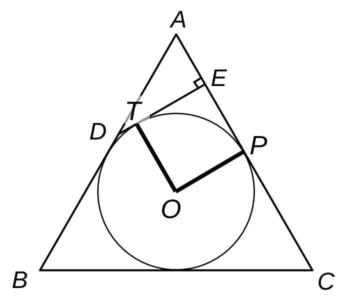
14B En los triángulos 30º-60º-90º de hipotenusa $2x$, las longitudes de los catetos son, x y $x\sqrt{3}$. Por lo tanto en el triángulo *CDB*, $CD = \sqrt{3}$, $CB = 2\sqrt{3}$, $DB = 3$. En el triángulo *ADB*, $DB = 3 \Rightarrow AB = 6$.

15A Veamos la paridad de *b.* Si *b* es par $\Rightarrow b^2 - 4ac = 4k$ (múltiplo de 4).
Si *b* es impar $\Rightarrow b^2 = 4k + 1$ y por lo tanto $b^2 - 4ac = 4k + 1$. Por lo tanto el discriminante nunca puede ser $23 = 4k - 1$.

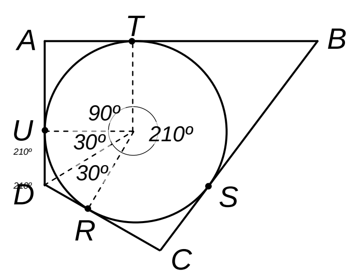
16A Casos posibles $C_{8,3} = 56$.
Casos desfavorables.
3 veces consecutivas: 6 casos (123, 234, 345, 456, 567, 678)
2 veces consecutivas y la otra no: (12, 23, 34, 45, 56, 67, 78) En cinco de ellas el 3 puede aparecer en cuatro posiciones distintas y en dos de ellas (12, 78) en cinco posiciones distintas. $5\cdot 4 + 2\cdot 5 = 30$.
En total 36 casos desfavorables y 20 restantes favorables.
La probabilidad es $\frac{20}{56} = \frac{5}{14}$.

17A $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{2a\cdot\left(-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}\right)} = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

18B Los radios *OP* y *OT* en los puntos de tangencia determinan el cuadrado *TOPE*.
O además de ser el incentro es el baricentro por lo que
$$OP = \frac{1}{3}BP = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}l\sqrt{3}\right) = \frac{l\sqrt{3}}{6}.$$
$$AP = AE + EP \Rightarrow \frac{1}{2}l = 1 + \frac{l\sqrt{3}}{6} \Rightarrow 3l = 6 + l\sqrt{3} \Rightarrow l = 3 + \sqrt{3}.$$



19C Sea *O* el centro de la circunferencia. El triángulo *ORD* es 30º-60º-90º y como *DR* = 3 el cateto $OR = 3\sqrt{3}$ que es el radio de la circunferencia.
$$S = \pi\left(3\sqrt{3}\right)^2 = 27\pi.$$



20D Como termina en seis ceros debe aparecer en *n*! seis veces el factor 5.
Por lo tanto $25 \le n < 30$. Quitando los seis factores 5 y los seis factores 2, el producto de los restantes factores debe terminar en 8, es decir,
3·6·7·9·2·11·12·13·14·3·16·17·18·19·4·21·22·23·24·…. = ………………..8
Basta con ir operando con las últimas cifras de estos productos. El producto de los factores escritos termina en 4. El siguiente 4·26 termina en 4 y el siguiente 4·27 termina en 8. El número buscado es 27.

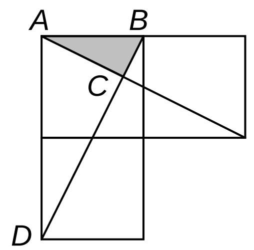
21B La suma es *AT* + *TB* = *AB* = *p.* Corresponde a las respuestas B) D) E). Necesitamos su producto.

$$MT = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2} = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q^2} \quad AT = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q^2} \quad BT = \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q^2}$$

$AT \cdot BT = \left(\frac{1}{2}p\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q^2}\right)^2 = q^2$. Por lo tanto la ecuación es $x^2 - px + q^2 = 0$.

22B Los triángulos ABD y CBA son semejantes y además $AD = 2$, $AB = 1$, $BD = \sqrt{5}$ por lo tanto $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{BC}{1} \Rightarrow BC = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad AC = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

El área es $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{5}$.



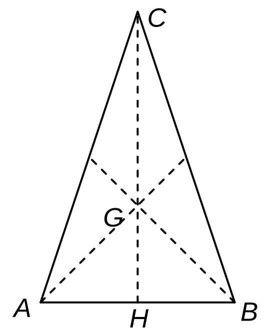
23D Llamando $a = 201220112010$, $b = 201220112007$, $c = 201220112004$, observamos que $b = \frac{a+c}{2}$.

Tenemos $a^2 - 2 \cdot b^2 + c^2 = a^2 - 2 \cdot \frac{a^2 + c^2 + 2ac}{4} + c^2 = \frac{a^2 + c^2 - 2ac}{2} = \frac{1}{2}(a-c)^2 = \frac{6^2}{2} = 18$.

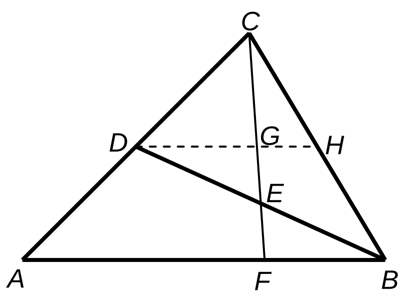
24A El triángulo ABG es 45º-45º-90º y la hipotenusa mide $\sqrt{2}$, luego los catetos miden 1 y 1. Análogamente en el triángulo AHG la hipotenusa mide $\sqrt{2}$ y sus catetos AH y HG, $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Como G es el baricentro, $CH = 3HG = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

El área del triángulo es $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{3}{2}$.

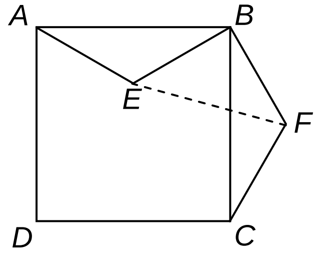


25E DH es la paralela media y por lo tanto mediana del triángulo BCD. También CE es mediana de dicho triángulo luego G es su baricentro y por lo tanto $DG = 2GH$. Como los triángulos GHC y FBC son semejantes con razón de semejanza 2, al igual que los triángulos DGC y AFC, se deduce fácilmente que $GH = 2{,}5$, $DG = 5$, $AF = 10$ y en conclusión el lado $AB = 15$.



26B El triángulo EFB es rectángulo e isósceles (45º-45º-90º). Si la hipotenusa es $\sqrt{2}$ los catetos miden 1.
En el triángulo AEB por el teorema del coseno,

$$AB^2 = AE^2 + EB^2 - 2 \cdot AE \cdot EB \cdot \cos 120º = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3.$$



27A Si sen$x$ = cos$x$ el triángulo es 45º-45º-90º y por tanto rectángulo.
Si senx = tg$x \Rightarrow$ cos$x$ = 1 con lo que sen$x$ = 0 y no tiene sentido.
Por lo tanto $\cos x = tgx \Leftrightarrow \cos x = \frac{senx}{\cos x} \Rightarrow \cos^2 x = senx \Leftrightarrow 1 - sen^2 x = senx$. Las soluciones de esta ecuación son $senx = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$. La única solución válida es la positiva $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

28C Es fácil observar que $a > e$ porque tienen 700 factores iguales y los 300 restantes son mayores los de a. Análogamente se observa que $e > c$. También es fácil observar que $c > b$ porque tienen 800 factores iguales y los 200 restantes son mayores los de c.
Para situar a d lo comparamos con c.

$$\frac{c}{d} = \frac{500!\cdot 500!}{600!\cdot 300!\cdot 100!} = \frac{301\cdot 302\cdot ...\cdot 400\cdot 401\cdot ...\cdot 500}{501\cdot 502\cdot ...\cdot 600\cdot 100\cdot 99\cdot ...\cdot 1} = \frac{301\cdot 500}{600\cdot 100}\cdot\frac{302\cdot 499}{599\cdot 99}\cdot ...\cdot\frac{400\cdot 401}{501\cdot 1}$$

La primera fracción $\frac{301\cdot 500}{600\cdot 100} = \frac{150500}{60000} > 1$. En las siguientes fracciones el denominador va disminuyendo (evidente) mientras que el numerador va aumentando (*), luego $\frac{c}{d} > 1 \Rightarrow c > d$
Comparamos d con b.

$\frac{b}{d} = \frac{400!\cdot 400!\cdot 200!}{600!\cdot 300!\cdot 100!} = \frac{301\cdot 302\cdot ...\cdot 400\cdot 101\cdot 102\cdot ...\cdot 200}{401\cdot 402\cdot ...\cdot 600} < 1$, ya que todos los factores del numerador son menores que los del denominador. Luego $b < d$.
El orden es pues $b < d < c < e < a$.
(*) Si $a < b$ entonces $(a + 1)\cdot(b - 1) = ab + b - a - 1 > ab$.
Sólo se daría la igualdad si $b = a + 1$, que no es el caso en ninguna de las fracciones.

29C $15x^2 + 3 < 14x \Leftrightarrow 15x^2 - 14x + 3 < 0$. Las raíces de la ecuación $15x^2 - 14x + 3 = 0$ son $x = \frac{14 \pm \sqrt{196-180}}{30} = \frac{14 \pm 4}{30} = \begin{cases} \frac{3}{5} \\ \frac{1}{3} \end{cases}$. La solución de la inecuación es el intervalo $\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{5}\right)$ cuya amplitud es $\frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$. La probabilidad pedida es el cociente entre las amplitudes de los intervalos. $\frac{4}{15} : 3 = \frac{4}{45}$.

30B La suma de los términos de la progresión geométrica $1, \frac{1}{8}, \frac{1}{64}, ...$ de razón $r = \frac{1}{8}$ es:

$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + ... = \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{8}{7}$. Análogamente $\frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + ... = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{4}{7}$;

$\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + ... = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{2}{7}$.

La suma pedida es $\frac{8}{7} - \frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$.

XLIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

FASE CERO-COMUNIDAD DE MADRID

Primera sesión, viernes 23 de noviembre de 2012

Hoja de respuestas

Nombre y apellidos: ……………………………………………………..…………………… Tfno. ………………….

Centro ………………………………………………………………… Curso …….. Fecha de nacimiento …………

1.-	A	B	C	X	E	16.-	X	B	C	D	E
2.-	A	X	C	D	E	17.-	X	B	C	D	E
3.-	A	X	C	D	E	18.-	A	X	C	D	E
4.-	X	B	C	D	E	19.-	A	B	X	D	E
5.-	A	B	C	D	X	20.-	A	B	C	X	E
6.-	A	B	X	D	E	21.-	A	X	C	D	E
7.-	X	B	C	D	E	22.-	A	X	C	D	E
8.-	A	B	C	D	X	23.-	A	B	C	X	E
9.-	A	B	C	D	X	24.-	X	B	C	D	E
10.-	A	B	X	D	E	25.-	A	B	C	D	X
11.-	A	B	X	D	E	26.-	A	X	C	D	E
12.-	A	B	C	X	E	27.-	X	B	C	D	E
13.-	A	B	X	D	E	28.-	A	B	X	D	E
14.-	A	X	C	D	E	29.-	A	B	X	D	E
15.-	X	B	C	D	E	30.-	A	X	C	D	E

Espacio reservado para el equipo calificador.

CORRECTAS (5)	EN BLANCO (2)	INCORRECTAS	PUNTUACIÓN