XLVIII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes tarde, 16 de diciembre de 2011

1. Sean a, b y c tres números reales positivos cuyo producto es 1. Demostrar que si la suma de estos números es mayor que la suma de sus recíprocos, entonces exactamente uno de ellos es mayor que 1.

2. En un triángulo rectángulo de hipotenusa unidad y ángulos respectivos de $30°$, $60°$ y $90°$, se eligen 25 puntos cualesquiera. Demostrar que siempre habrá 9 entre ellos que podrán cubrirse con un semicírculo de radio $3/10$.

3. Sea P un punto interior a un triángulo ABC y sean H_A, H_B, H_C los ortocentros de los triángulos PBC, PAC y PAB, respectivamente. Demostrar que los triángulos $H_AH_BH_C$ y ABC tiene igual área.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

XLVIII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado mañana, 17 de diciembre de 2011

4. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y P un punto interior. Determinar qué condiciones deben cumplir el cuadrilátero y el punto P para que los cuatro triángulos PAB, PBC, PCD y PDA tengan la misma área.

5. Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo ABC. Si

$$b(a+b)(b+c) = a^3 + b(a^2+c^2) + c^3,$$

demostrar que la medida (en radianes) de los ángulos A, B y C cumple la relación

$$\frac{1}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} + \frac{1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} = \frac{2}{\sqrt{A}+\sqrt{C}}.$$

6. Tenemos una colección de esferas iguales que apilamos formando un tetraedro cuyas aristas tienen todas n esferas. Calcular, en función de n, el número total de puntos de tangencia (contactos) entra las esferas del montón.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.