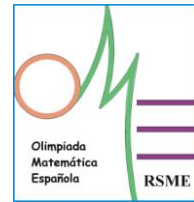




REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

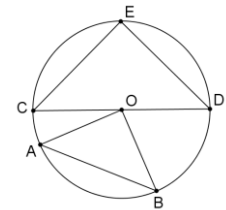
**XLVIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA
Comunidad de Madrid**

FASE CERO: viernes 25 de noviembre de 2011



- En la hoja de respuestas, escribe la letra de la opción que creas correcta.
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos; cada respuesta en blanco 1 punto, y cada respuesta errónea, 0 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.
- TIEMPO: 3 HORAS

1. En la figura adjunta, CE y DE son cuerdas de igual longitud de la circunferencia de centro O de la que CD es un diámetro. Si el arco AB es un cuarto de circunferencia, ¿cuál es el cociente entre las áreas de los triángulos CED y AOB ?



- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 4 D) 3 E) 2

2. En una carrera de 10km, Víctor supera a Segundo en 2km y a Lentini en 4km. Si los corredores mantienen una velocidad constante a lo largo de toda la prueba, ¿cuántos kilómetros le sacará Segundo a Lentini?

- A) 2 B) $\frac{9}{4}$ C) $\frac{5}{2}$ D) $\frac{11}{4}$ E) 3

3. A partir de un triángulo rectángulo ABC de hipotenusa AB , construimos otro triángulo rectángulo ABD con la misma hipotenusa AB . Si $BC = 1$, $AC = b$ y $AD = 2$, BD es igual a:

- A) $\sqrt{b^2 + 1}$ B) $\sqrt{b^2 - 3}$ C) $\sqrt{b^2 + 1} + 2$ D) $b^2 + 5$ E) $\sqrt{b^2 + 3}$

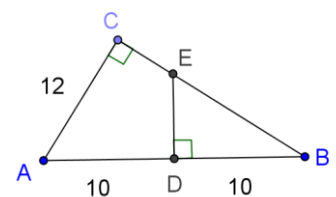
4. Pedro anduvo una determinada distancia a velocidad constante. Si hubiera ido 0,5 km/h más rápido, habría recorrido la misma distancia en $\frac{4}{5}$ del tiempo original, pero si hubiera ido

0,5km/h más despacio, habría tardado $\frac{5}{2}$ de hora más. ¿Cuál fue – en kilómetros – la distancia recorrida por Pedro?

- A) $\frac{27}{2}$ B) 15 C) $\frac{35}{2}$ D) 20 E) 25

5. En el triángulo ABC de la figura, el ángulo C es de 90° , D es el punto medio de AB , DE es perpendicular a AB y $AB = 20$, $AC = 12$. ¿Cuál es el área del cuadrilátero $ADEC$?

- A) 75 B) 58,5 C) 48 D) 37,5
E) Nada de lo anterior



6. Hay dos números positivos que, colocados entre el 3 y el 9, hacen que los tres primeros estén en progresión geométrica y los tres últimos en progresión aritmética. La suma de estos dos números positivos es:

A) $\frac{27}{2}$ B) $\frac{45}{4}$ C) $\frac{21}{2}$ D) 10 E) $\frac{19}{2}$

7. Consideramos dos circunferencias: la mayor, de centro P y radio R ; la otra, de centro Q y radio r , y dibujamos el segmento PQ . ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

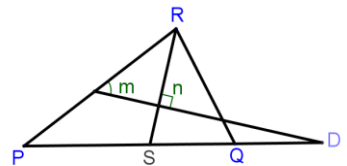
- A) $R - r$ puede ser igual a PQ . B) $R + r$ puede ser igual a PQ
 C) $R + r$ puede ser menor que PQ D) $R - r$ puede ser menor que PQ
 E) Nada de lo anterior.

8. Al colorear n bolas, numeradas de 1 a n , en rojo y en negro, resulta que entre las primeras 50 hay 49 rojas y entre las restantes 7 de cada 8 son rojas. Si el número de bolas rojas es mayor o igual que el 90% del total de bolas, el valor máximo de n es:

A) 225 B) 210 C) 200 D) 180 E) 175

9. En el triángulo PQR de la figura, RS es bisectriz del ángulo R y D está en la prolongación de PQ de modo que el ángulo n es recto. Entonces:

A) $m = \frac{1}{2}(P - Q)$ B) $m = \frac{1}{2}(P + Q)$ C) $D = \frac{1}{2}(P + Q)$
 D) $D = \frac{1}{2}m$ E) Nada de lo anterior es correcto.



10. El resto de la división del polinomio $p(x) = x^{100}$ entre $x^2 - 3x + 2$ es:

A) $2^{200} - 1$ B) $2^{100}(x - 1) - (x - 2)$ C) $2^{100}(x - 3)$ D) $(2^{100} - 1)x + 2(2^{99} - 1)$
 E) $2^{100}(x + 1) - (x + 2)$

11. En el rombo $ABCD$ dibujamos segmentos paralelos a la diagonal BD y de extremos en los lados del rombo. Consideremos una gráfica que muestre la posible longitud de cada segmento en función de su distancia al vértice A . La gráfica es:

- A) Una recta que pasa por el origen B) Una recta que corta a los semiejes positivos
 C) Dos segmentos formando una ∇ D) Dos segmentos formando una ∇ invertida
 E) Nada de lo anterior

12. ¿Cuál de los siguientes números es la suma de 11 enteros consecutivos?

A) 7 B) 77 C) 777 D) 7770 E) 7771

13. Si el cociente entre las medidas de los dos catetos de un triángulo es $\frac{1}{2}$, el cociente entre las medidas de los correspondientes segmentos de hipotenusa determinados por la altura sobre la misma es:

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3 + \sqrt{2}}$ C) $\frac{1}{2\sqrt{5} - 1}$ D) $\frac{1}{2 + \sqrt{5}}$ E) $\frac{1}{5}$

14. Si S es la suma de los restos de la división de 30, 31, 32, 33, 34 y 35 entre 6, ¿cuál es el resto de la división de S entre 6?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

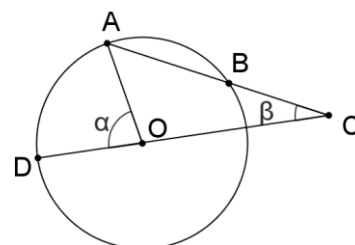
15. Isa sale de excursión cuando las agujas de su reloj están juntas entre las 8 y las 9 y llega a su destino entre las 2 y las 3, cuando las agujas forman un ángulo de 180° . ¿Cuánto duró su excursión?

- A) 6 horas B) 6 horas y $43 + \frac{7}{11}$ minutos C) 5 horas y $16 + \frac{4}{11}$ minutos
D) 6 horas y media E) Nada de lo anterior

16. Si x e y son números reales con $|x| + y = 3$, $|x|y + x^3 = 0$, ¿cuál es el entero más próximo a $x - y$?

- A) -3 B) -1 C) 2 D) 3 E) 5

17. En la circunferencia de la figura, de centro O , prolongamos la cuerda AB hasta que corte en C al diámetro OD , de manera que BC sea igual al radio, y llamamos α y β a los ángulos que se indican. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones expresa la relación entre α y β ?



- A) $\alpha = 3\beta$ B) $\alpha = 2\beta$ C) $\alpha = 60^\circ$
D) No hay relación especial entre α y β
E) $\alpha = 3\beta$ o $\alpha = 2\beta$ según la longitud de AB

18. Si $1 < x < 10$, $1 < y < 10$, ¿qué afirmación de las siguientes es necesariamente verdadera?

- A) $y < \frac{10}{x}$ B) $x > \frac{y}{10}$ C) $y < \frac{x}{10}$ D) $x < \frac{y}{10}$ E) $\frac{100}{x} < y$

19. El número de triángulos con los tres lados desiguales, de longitud entera y de perímetro menor que 13 es:

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 18

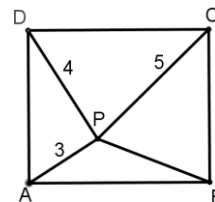
20. La función $f(n) = \frac{7n+18}{2n+3}$ toma valores enteros para ciertos valores enteros de n . La suma

de todos estos $f(n)$ enteros es:

- A) 14 B) 21 C) 24 D) 28 E) 30

21. Si P es un punto interior al rectángulo $ABCD$ tal que $PA = 3$ cm, $PD = 4$ cm, $PC = 5$ cm, PB , en centímetros, es igual a:

- A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{2}$ E) 2



22. Si a , b , c , d y e son enteros distintos y $(4-a)(4-b)(4-c)(4-d)(4-e) = 12$, $a+b+c+d+e$ es igual a:

- A) 12 B) 16 C) 17 D) 24 E) 32

23. Si la base mayor de un trapecio isósceles es igual a la diagonal y la base más pequeña igual a la altura, el cociente entre la base pequeña y la grande es:

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{2}{5}$

24. Pedro tiene una caja fuerte con un código de tres cifras. Ha olvidado el código, pero sabe que las tres cifras son diferentes y que la primera cifra es igual al cuadrado del cociente de la segunda entre la tercera cifra. ¿Cuántas combinaciones deberá probar, en el peor de los casos, hasta encontrar el código?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

25. Dos segmentos verticales de 20cm y 80cm (están apoyados sobre el suelo) y separados 1 m. El punto de intersección de las rectas que unen el punto de más altura de un segmento con el más bajo del otro (el extremo superior de un segmento con el inferior del otro) está a una altura de

- A) 50cm B) 40cm C) 16cm D) 60cm E) Nada de lo anterior

26. En una caja hay 9 tarjetas numeradas del 1 al 9. Antonio y Beatriz sacan cada uno al mismo tiempo una tarjeta de la caja. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de la tarjeta de Antonio sea el doble o más que el número de la tarjeta de Beatriz?

- A) $\frac{7}{18}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{28}{81}$ D) $\frac{5}{18}$ E) $\frac{1}{3}$

27. El segmento que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio tiene 3 unidades de longitud. Si la base mayor mide 97 unidades, la base menor mide:

- A) 94 B) 92 C) 91 D) 90 E) 89

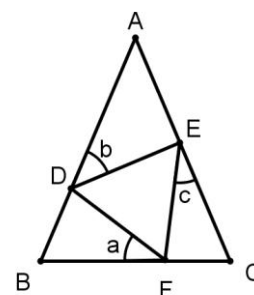
28. ¿Cuántos divisores de cuatro cifras tiene el número 102^2 ?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5
E) 6

29. En el dibujo que ves, AB y AC son lados del triángulo isósceles ABC en el que inscribimos el triángulo equilátero DEF . Si los ángulos a , b y c son los que hemos marcado, entonces:

- A) $b = \frac{1}{2}(a + c)$ B) $b = \frac{1}{2}(a - c)$ C) $a = \frac{1}{2}(b - c)$

- D) $a = \frac{1}{2}(b + c)$ E) Nada de lo anterior



30. Escribimos en la pizarra todos los enteros del 1 al 2011. María subraya los múltiplos de 2, luego los múltiplos de 3, y luego los múltiplos de 4. ¿Cuántos números ha subrayado exactamente dos veces?

- A) 1005 B) 1004 C) 503 D) 336 E) 169