



REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA
XLV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA
Comunidad de Madrid



Primera sesión, viernes 28 de noviembre de 2008

- En la hoja de respuestas, escribe la letra que corresponde a la opción que creas correcta en cada pregunta. Si decides cambiarla, táchala con una cruz y escribe otra.
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos, cada respuesta en blanco 2 puntos y cada respuesta errónea, 0 puntos.
- No están permitidas calculadoras ni ningún instrumento de medida.
- Tiempo: 3 horas.

1 El valor de $\sqrt{2^4 + \sqrt{3^4}}$ es:

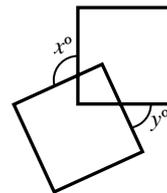
- A) 4 B) $\sqrt{20}$ C) 5 D) 7 E) $\sqrt{97}$

2 Si $6x - y = 16 + 5\sqrt{2}$ y $6y - x = 9 + 5\sqrt{2}$, ¿cuál es el valor de $x - y$?

- A) 1 B) $1 + \sqrt{2}$ C) 2 D) $2 - \sqrt{2}$ E) 0

3 El diagrama muestra dos cuadrados que se solapan.
¿Cuánto vale la suma de los ángulos x e y ?

- A) 180° B) 300° C) 330°
D) 360° E) Falta información



4 ¿Qué operación debe reemplazar a \blacktriangle para que la igualdad escrita sea correcta?

$$1 \cdot 2 \cdot (3 \blacktriangle 4 + 5) \cdot (6 \cdot 7 + 8 + 9) + 2 = 2008$$

- A) + B) - C) \cdot D) : E) Ninguna de las anteriores

5 Juanje calculó correctamente el valor de $5^8 \cdot 8^5$. ¿Cuántos dígitos tenía su respuesta?

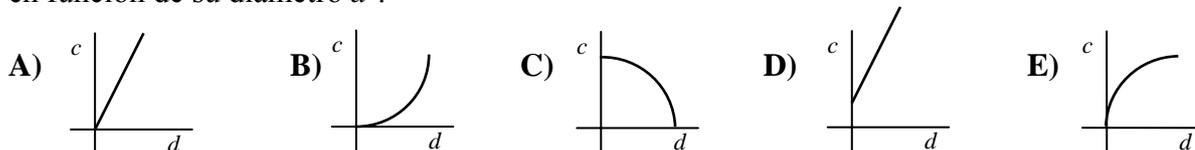
- A) 11 B) 12 C) 16 D) 14 E) 15

6 Si la media de los tres números x, y, z es x , ¿cuál es la media de los dos números y, z ?

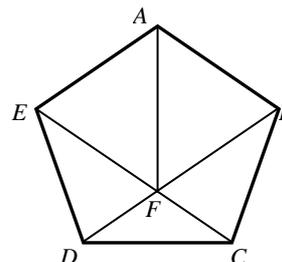
- A) $\frac{x}{2}$ B) x C) $2x$ D) $3x$ E) $4x$

- 7] Emparejamos los números 72, 8, 10, 5, 45, 36, 15 y 24 de forma que el producto de cada pareja sea el mismo. ¿Con qué número hemos emparejado 10?
A) 36 **B) 45** **C) 24** **D) 15** **E) 72**

- 8] ¿Cuál de las siguientes gráficas puede ser la que muestra la longitud de una circunferencia c en función de su diámetro d ?



- 9] El dibujo que ves muestra un pentágono regular $ABCDE$.
 ¿Cuál es la medida del ángulo AFC ?
A) 108° **B) 112°** **C) 116°**
D) 126° **E) 132°**

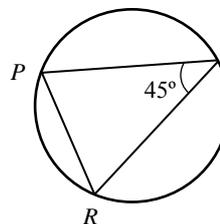


- 10] Colocamos algunos de los dígitos de 1 a 9 en las casillas en blanco de forma que no utilizamos el mismo dígito más de una vez, siendo la suma de los dígitos de cada fila y columna la que te mostramos.
 ¿Qué número aparece en la casilla con asterisco?

| | | | |
|---|----|----|----|
| | | | 12 |
| | | | 7 |
| | * | | 13 |
| 4 | 16 | 12 | |

- A) 1** **B) 3** **C) 5** **D) 7** **E) 9**

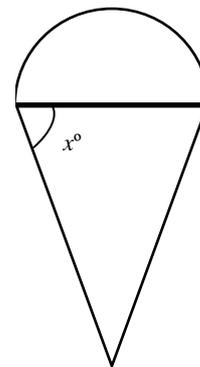
- 11] Si el radio de la circunferencia de la figura es 4 cm, ¿cuál es, en cm, la longitud de la cuerda PR ?



- A) $4\sqrt{2}$** **B) 2** **C) $2\sqrt{2}$** **D) $2 + \sqrt{2}$** **E) $4 - \sqrt{2}$**

- 12] El dibujo que ves muestra un semicírculo y un triángulo isósceles, ambos de igual área. ¿Cuál es el valor de $\text{tg} x^\circ$?

- A) 1** **B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$** **C) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$** **D) $\frac{2}{\pi}$** **E) $\frac{\pi}{2}$**



- 13] Recuerda que $n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$. Si dividimos $2007!$ entre 2008, el resto r de la división verifica que:

- A) $r = 0$** **B) $100 \leq r \leq 2006$** **C) $r = 2007$** **D) $1 \leq r < 100$** **E) Nada de lo anterior**

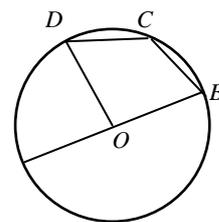
- 14] En el triángulo rectángulo ABC (de ángulo recto en A), las bisectrices de los ángulos agudos B y C se cortan en el punto P . Si P dista $\sqrt{8}$ unidades de la hipotenusa, ¿cuántas unidades dista P de A ?

- A) $\sqrt{8}$** **B) 3** **C) $\sqrt{10}$** **D) $\sqrt{12}$** **E) 4**

15) ¿Cuántos enteros n con $1 \leq n \leq 500$ son divisibles por 2 pero no por 3?

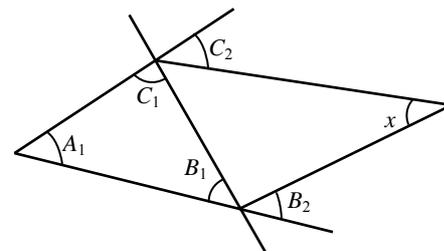
- A) 83 B) 84 C) 166 D) 167 E) 417

16) En el dibujo de la derecha, los puntos B , C y D son vértices de un octógono regular inscrito en una circunferencia de centro O y radio 1. ¿Cuál es el área del cuadrilátero $BCDO$?



- A) 1 B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ D) $\frac{4+\sqrt{2}}{8}$ E) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

17) En la figura que ves, no hecha a escala, los ángulos A_1 , B_1 , B_2 , C_1 y C_2 verifican: $A_1 < 60^\circ$ $B_1 = 2B_2$ $C_1 = 2C_2$. ¿Cuál es el valor del ángulo x ?

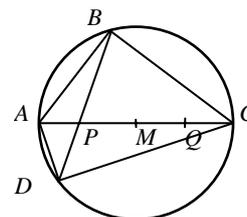


- A) $90^\circ - \frac{3}{2}A_1$ B) $90^\circ - A_1$ C) $180^\circ - 3A_1$
D) A_1 E) $180^\circ - 2A_1$

18) Representamos por $[a]$ el mayor entero menor o igual que a . Así pues $[2008]=2008$, $[\pi]=3$, $[-5,76]=-6$. ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $[2-x^2]=|2-x^2|$?

- A) 0 B) 2 C) 3 D) 5 E) Infinitas

19) Dividimos el diámetro AC de una circunferencia en 4 partes iguales con los puntos P , M y Q y dibujamos una cuerda que, pasando por P , corte a la circunferencia en B y D , siendo $PD = \frac{3}{2}AP$. Si el área del triángulo ABP es 1, ¿cuál es el área del cuadrilátero $ABCD$?



- A) 7 B) 7,75 C) 8 D) 8,5 E) 9,25

20) Metemos en una bolsa todos los dígitos utilizados al numerar las 320 páginas de un libro. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer un dígito al azar de esa bolsa resulte ser el 1?

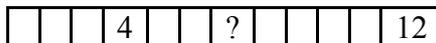
- A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{11}{100}$ C) $\frac{43}{213}$ D) $\frac{43}{240}$ E) $\frac{40}{213}$

21) De los seis polinomios siguientes, ¿cuántos dividen al polinomio $x^7 - x$?

$x^2 + x + 1$ $x^3 - 1$ $x^2 - 1$ $x^4 + x^2 + 1$ $x^4 + x$ $x^2 - x$

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

22) En cada una de estas doce casillas hay un número positivo. En la cuarta hay un 4 y en la última un 12. Si la suma de cualesquiera tres casillas consecutivas es 333, ¿qué número hay colocado en la séptima casilla?



- A) 4 B) 7 C) 12 D) 317 E) Faltan datos para determinarlo

23) Si $f(x) = x - 1$ y $(g \circ f)(x) = x^2 - 1$, $g(3)$ es igual a:

- A) 3 B) 4 C) 8 D) 9 E) 15

24 La longitud de la diagonal más corta de un polígono regular de n lados inscrita en una circunferencia de radio 1 es:

- A) $\text{sen} \frac{\pi}{n}$ B) $2\text{sen} \frac{\pi}{n}$ C) $\text{sen} \frac{2\pi}{n}$ D) $2\text{sen} \frac{2\pi}{n}$ E) $2\text{tg} \frac{\pi}{n}$

25 En un juicio se quiere determinar la culpabilidad o no de cuatro personas: P, Q, R y S. Se sabe que:

- 1) Si P es culpable, lo es Q.
 - 2) Si Q es culpable, es imposible que se verifique simultáneamente que R es inocente y P culpable.
 - 3) Si S es inocente, P es culpable y R inocente.
 - 4) Si S es culpable, lo es P.
- ¿Cuántos resultaron ser culpables?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) No se puede determinar con estos datos

26 En un triángulo de lados 3, 4 y 5, ¿cuál es la distancia entre los pies de la altura y la mediana trazada desde el vértice opuesto al lado más largo?

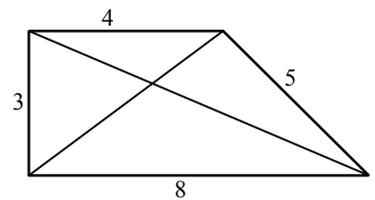
- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{7}{10}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{3}{4}$ E) 1

27 ¿Cuántas soluciones en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tiene la ecuación $\text{sen} x + \cos x = \frac{1}{2}$?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Nada de lo anterior

28 Las dimensiones del trapecio rectángulo de la figura son las que se indican en ella. Las áreas de los cuatro triángulos que determinan las diagonales están en la relación:

- A) 1, 1, 2, 4 B) 1, 1, 3, 4 C) 1, 2, 3, 4
D) 1, 2, 2, 4 E) 2, 2, 3, 4



29 Sean x e y dos números reales cuya suma es 1 y sean $A = x^2 + y$, $B = x + y^2$. Considera las afirmaciones siguientes:

- I. $A = B$ para cualesquiera x e y .
 - II. $A \neq B$ para algunos x e y .
 - III. $A \leq 1$ para cualesquiera x e y .
 - IV. $A > 1$ para algunos x e y .
- Las afirmaciones verdaderas son:

- A) I B) II C) I y III D) I y IV
E) II y III

30 Un semicírculo está inscrito en un triángulo equilátero como se muestra en la figura. ¿Qué fracción del triángulo cae dentro del semicírculo?

- A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{2\pi}{5}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}\pi}{8}$ E) $\frac{2\pi}{5}$

