Problemas propuestos en la Fase Local de la XLIII Olimpíada Matemática Española

Problema 1

Demostrar que es imposible obtener un cubo yuxtaponiendo tetraedros regulares, todos del mismo tamaño.

Problema 2

Entre los 2007 primeros enteros positivos elegimos 1005 cualesquiera. Demostrar que seguro que hay al menos dos de estos 1005 cuya diferencia es 4.

Problema 3

Demostrar que, en un triángulo, la distancia de un vértice cualquiera al ortocentro es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto a ese vértice.

Problema 4

Consideramos un triángulo isósceles ABC con $AC = BC$, y un punto D fuera del triángulo tal que el ángulo $\angle ACB$ sea el doble del ángulo $\angle ADB$. La recta AD corta a BC en el punto E con $CE = 2$ y $EB = 1$. Calcular el producto $AE \cdot ED$

Problema 5

Encontrar todas las soluciones enteras posibles, x e y, de la ecuación:

$$p(x+y) = xy$$

siendo p un cierto número primo.

Problema 6

Sea $a_n = 1 + n^3$ la sucesión {2, 9, 28, 65, . . .} y $\delta_n = \text{mcd}(a_{n+1}, a_n)$ Hallar el máximo valor que puede tomar δ_n .