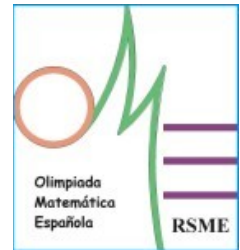




REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA
XLIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA
Comunidad de Madrid



Primera sesión, viernes 24 de noviembre de 2006

- **En la hoja de respuestas, rodea con un círculo la opción que creas correcta en cada pregunta. Si decides cambiarla, táchala con una cruz y escoge otra.**
- **Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos, cada respuesta en blanco 2 puntos y cada respuesta errónea, 0 puntos.**
- **No están permitidas calculadoras ni ningún instrumento de medida.**
- **Tiempo: 3 horas.**

- 1] ¿Cuántos subconjuntos de 3 elementos del conjunto $\{88, 95, 99, 132, 166, 173\}$ tienen la propiedad de que la suma de sus elementos es un número par?
- A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 24
- 2] Algunos enteros positivos tienen estas propiedades:
I La suma de los cuadrados de sus cifras es 50.
II Cada cifra es mayor que la que está a su izquierda.
¿Cuál es el producto de las cifras del mayor de ellos?
- A) 7 B) 25 C) 36 D) 48 E) 60
- 3] Para enumerar las páginas de un libro, empezando por la página 1, hemos necesitados 600 dígitos (por ejemplo, para numerar la página 23 hemos necesitado 2 dígitos, y para numerar la 122 hemos necesitado 3). ¿Cuántas páginas tiene el libro?
- A) 136 B) 137 C) 236 D) 600 E) Nada de lo anterior.
- 4] La igualdad $A + B + C + D + E = FG$ representa la suma de cinco números de una cifra que es igual a un número de dos cifras, donde todas las cifras que aparecen son distintas. Si el número FG es el mayor posible, ¿cuál es el valor de G ?
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
- 5] En una hoja de papel hay escrito un número. De las cuatro afirmaciones siguientes, tres son verdaderas y la otra es falsa.
I El número es el 1. III El número no es el 3.
II El número es el 2. IV El número no es el 4.
De los siguientes enunciados, ¿cuál de ellos es siempre correcto?
- A) I es falsa B) II es verdadera C) II es falsa D) III es falsa E) IV es verdadera

- 6 Las gráficas de $y = -|x - a| + b$ e $y = |x - c| + d$ se cortan en los puntos (2, 5) y (8, 3). El valor de $a + c$ es:

A) 5 B) 7 C) 8 D) 10 E) 13

- 7 El triángulo de lados 3, 4, y 5 divide el interior de su circunferencia circunscrita en cuatro regiones. Sean A , B y C las áreas de las regiones no triangulares, siendo C la mayor. Entonces:

A) $A + B = C$ B) $A^2 + B^2 = C^2$ C) $A + B + 6 = C$ D) $4A + 3B = 5C$ E) $\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} = \frac{1}{C^2}$

- 8 Las letras a, b, c, d, e, f del dibujo adjunto han sido sustituidas por los números 2, 4, 5, 6, 8, 9 (en algún orden) de forma que la suma de los elementos de cada fila y cada columna es siempre el mismo número, k . ¿Qué número es k ?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 19 E) 21

7	a	b	1
c			d
3	e	f	10

- 9 Si x, y, z son números reales que satisfacen las igualdades $x + \frac{1}{y} = 4$, $y + \frac{1}{z} = 1$, $z + \frac{1}{x} = \frac{7}{3}$, el valor de xy^z es:

A) $\frac{2}{3}$ B) 1 C) $\frac{4}{3}$ D) 2 E) $\frac{7}{3}$

- 10 Desde un determinado punto de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, trazamos paralelas a los catetos de éste que dividen al triángulo en un cuadrado y dos triángulos rectángulos pequeños. Si el área de uno de estos triángulos pequeños es m veces el área del cuadrado, ¿cuál es el cociente entre el área del otro triángulo y el área del cuadrado?

A) $\frac{1}{2m+1}$ B) m C) $1 - m$ D) $\frac{1}{4m}$ E) $\frac{1}{8m^2}$

- 11 El segmento que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio mide 3 cm de longitud. Si la base mayor del trapecio mide 97 cm, la longitud, en centímetros, de la base menor es:

A) 94 B) 92 C) 91 D) 90 E) 89

- 12 En la siguiente igualdad, cada letra representa una cifra (letras distintas, cifras distintas) y cada *palabra* un número de dos o tres cifras. $(VA) \cdot (CA) = MMM$. ¿Cuánto vale $A + C + M + V$?

A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 24

- 13 Para cada número real x , sea $f(x)$ el mínimo de los números $4x + 1$, $x + 2$ y $-2x + 4$. ¿Cuál es el máximo valor para $f(x)$?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{8}{3}$

- 14] Sea f una función lineal tal que $f(1) \leq f(2)$ y $f(3) \geq f(4)$. Si $f(5) = 5$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
- A) $f(0) < 0$ B) $f(0) = 0$ C) $f(1) < f(0) < f(-1)$ D) $f(0) = 5$ E) $f(0) > 5$
- 15] Si a, b y c son tres números (no necesariamente distintos) elegidos al azar en el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, la probabilidad de que $ab + c$ sea par es:
- A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{59}{125}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{64}{125}$ E) $\frac{3}{5}$
- 16] Los puntos $A(3, 9)$, $B(1, 1)$, $C(5, 3)$ y $D(a, b)$ están en el primer cuadrante y son los vértices del cuadrilátero $ABCD$. Si el cuadrilátero formado uniendo los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA es un cuadrado, ¿cuál es la suma de las coordenadas del punto D ?
- A) 7 B) 9 C) 10 D) 12 E) 16
- 17] El producto de los cuatro enteros positivos a, b, c y d es $8!$. Si $ab + a + b = 524$, $bc + b + c = 146$ y $cd + c + d = 104$, ¿cuánto vale $a - d$?
- A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12
- 18] Para cada entero positivo $m > 1$, representamos por $P(m)$ el mayor factor primo de m . Por ejemplo $P(35) = 7$ y $P(289) = 17$. ¿Para cuántos enteros positivos se verifica que $P(n) = \sqrt{n}$ y $P(n + 48) = \sqrt{n + 48}$?
- A) 0 B) 1 C) 3 D) 4 E) 5
- 19] En el triángulo ABC tenemos que $AB = 25$, $BC = 39$ y $AC = 42$. Los puntos D y E , que están en AB y AC respectivamente, hacen que $AD = 19$ y $AE = 14$. ¿Cuál es el cociente entre el área del triángulo ADE y el área del cuadrilátero $BCDE$?
- A) $\frac{266}{1521}$ B) $\frac{19}{75}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{19}{56}$ E) 1
- 20] Todos los números de teléfonos móviles que nos han ofrecido para el comité organizador de la XLIII Olimpiada Matemática Española son de la forma $66abcdeffg$ donde a, b, c, d, e, f y g son números distintos, no son ni 0 ni 1 y además están en orden creciente. ¿Cuántos números de teléfono nos han ofrecido?
- A) 1 B) 2 C) 6 D) 7 E) 8
- 21] ¿Cuál es la media de todos los números de 5 cifras distintas que pueden formarse con las cifras 1, 3, 5, 7 y 8?
- A) 48.000 B) 49.999,5 C) 53.332,8 D) 55.555 E) 56.432,8
- 22] ¿Para cuántos enteros positivos n menores o iguales que 24 se verifica que $n!$ es divisible entre $1 + 2 + \dots + n$?
- A) 8 B) 12 C) 16 D) 17 E) 21

- 23] Un subconjunto B del conjunto de los enteros $1, 2, \dots, 100$ tiene la propiedad de que no tiene ningún par de elementos que sumen 125. ¿Cuál es el máximo número de elementos que puede tener el subconjunto B ?

A) 50 B) 51 C) 62 D) 65 E) 68

- 24] En el conjunto $\{2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{25}\}$ elegimos dos números distintos a y b . ¿Cuál es la probabilidad de que $\log_a b$ sea un entero?

A) $\frac{2}{25}$ B) $\frac{31}{300}$ C) $\frac{13}{100}$ D) $\frac{7}{50}$ E) $\frac{1}{2}$

- 25] Las dos raíces de la ecuación de segundo grado $x^2 - 63x + k = 0$ son números primos. ¿Cuántos valores puede tomar k ?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) Más de 4

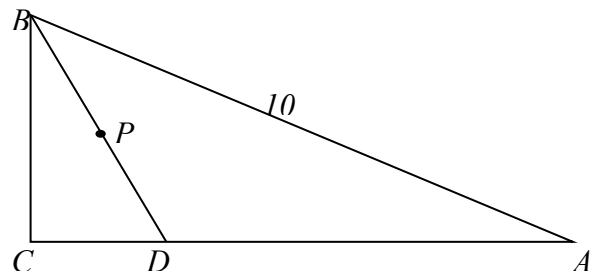
- 26] Supón que a y b son dígitos distintos, ninguno cero ni nueve y que el número periódico $0,abababab\dots$ viene expresado como fracción irreducible. ¿Cuántos denominadores diferentes podría haber?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 8 E) 9

- 27] En el triángulo ABC , el lado AC y la mediatriz del lado BC se cortan en el punto D , siendo BD bisectriz del ángulo B . Si $AD = 9$ y $DC = 7$, el área del triángulo ABD es:

A) 14 B) 21 C) 28 D) $14\sqrt{5}$ E) $28\sqrt{5}$

- 28] En el triángulo rectángulo ABC de la figura, la hipotenusa AB mide 10 cm y el ángulo B , 60° . Elegimos al azar un punto P en el interior de dicho triángulo y prolongamos la recta BP hasta que corte en D al lado AC . ¿Cuál es la probabilidad de que $BD > 5\sqrt{2}$?



A) $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{5 - \sqrt{5}}{5}$

- 29] En el triángulo ABC , el lado AB mide 1 y el AC , 2. Si el otro lado, BC , y la mediana desde A son de igual longitud, ¿cuál es esta longitud?

A) $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\sqrt{3}$

- 30] Para cada entero n mayor que 1, definimos $a_n = \frac{1}{\log_n 2006}$. Si $b = a_2 + a_3$ y $c = a_4 + a_{51} + a_{59}$, $b - c$ es igual a:

A) -2 B) -1 C) $\frac{1}{2006}$ D) $\frac{1}{2003}$ E) $\frac{1}{2}$



REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA
XLIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA
Comunidad de Madrid



Primera sesión, viernes 24 de noviembre de 2006

Nombre: Curso:.....

..

IES/Colegio: Teléfono de contacto:.....

...

Pregunta	Respuesta
1	C
2	C
3	C
4	B
5	E
6	D
7	C
8	D
9	B
10	D
11	C
12	C
13	E
14	D
15	B

Pregunta	Respuesta
16	C
17	D
18	B
19	D
20	E
21	C
22	C
23	C
24	B
25	B
26	A
27	D
28	C
29	C
30	B

Correctas	Incorrectas	En blanco	TOTAL

