XVIII Concurso Intercentros de Matemáticas "Joaquín Hernández" de la Comunidad de Madrid

17 de noviembre de 2018

PRUEBA POR EQUIPOS 1º y 2º de ESO (45 minutos)

1. En la isla Colorín hay 15 casas numeradas del 1 al 15 y hay exactamente 15 caminos de **un solo sentido**. De cada casa sale un camino, y cada camino une dos casas. El primer día, en cada casa hay un duende que lleva escrito en su camiseta el número de la casa. El segundo día todos los duendes salen de la casa en la que están y, recorriendo el único camino posible, llegan hasta la casa que está al final del camino.

Después de este cambio la distribución quedó así:

Duende	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Casa	10	4	12	8	15	9	14	1	11	5	6	2	7	13	3

El tercer día los duendes vuelven a salir de la casa en la que están y recorren el camino hasta la casa siguiente, y el cuarto día vuelven a hacer lo mismo.

¿Hay algún duende que vuelve a su casa el cuarto día? Si es que sí, indica cuáles y si es que no, justifica la respuesta.

2. En una caja hay 45 euros en monedas de 2, 5, 10, 20 y 50 céntimos. Si metiéramos en la caja una moneda de 5 céntimos, dos de 10 céntimos, tres de 20 céntimos y cuatro de 50 céntimos, entonces la caja tendría la misma cantidad de monedas de cada tipo.

¿Cuántas monedas de cada tipo hay en la caja?

3. En el triángulo acutángulo *ABC*, sea *D* el punto del lado *AC* tal que *BD* es perpendicular a *AC* y sea *E* el punto del lado *AB* tal que *CE* es perpendicular a *AB*. Sabiendo las siguientes igualdades entre ángulos: $C\hat{B}D = 2A\hat{B}D$ y $A\hat{C}E = 3B\hat{C}E$, **calcula las medidas de los tres ángulos del triángulo *ABC*.**

Nota: Llamamos ángulo $P\hat{Q}R$ al ángulo agudo de vértice *Q* que forman los segmentos *PQ* y *QR*.

XVIII Concurso Intercentros de Matemáticas "Joaquín Hernández" de la Comunidad de Madrid

17 de noviembre de 2018

PRUEBA INDIVIDUAL 1º y 2º de ESO (90 minutos)

1. En la isla Colorín todos los camaleones eran rojos. Cada uno de ellos tiene exactamente un amigo o tiene exactamente 5 amigos. Un día, cada camaleón con exactamente un amigo se volvió amarillo y cada camaleón con exactamente 5 amigos se volvió verde. Resultó así que los que son amigos son de colores diferentes. Más tarde, 30 camaleones amarillos se volvieron verdes y 40 verdes se volvieron amarillos. De este modo resultó que los que son amigos son del mismo color.

¿Cuántos camaleones hay en la isla Colorín?

2. Del pentágono *ABCDE*, sabemos que *E* = 150º, que *AB* = 17 cm y *DE* = 8 cm, que los triángulos *ABC* y *CDE* son equiláteros. **Calcula el perímetro del pentágono *ABCDE***.

3. Un juego consiste en escribir un número entero positivo en cada una de las seis caras de un cubo (puedes repetir números). Después hay que escribir en cada vértice del cubo el resultado de multiplicar los tres números que hay en las caras que coinciden en él y por último hay que sumar los ochos números que hay escritos en los vértices. El objetivo es que esta suma sea 105.

Da todas las posibles combinaciones ganadoras.

4. En cada casilla de una cuadrícula de 3 × 3 hemos escrito nueve números de tal manera que cada número es el doble del que tiene justo debajo y es la tercera parte del que tiene justo a su derecha. Si la suma de todos ellos es 728, **escribe la cuadrícula con sus nueve números**.

XVIII Concurso Intercentros de Matemáticas "Joaquín Hernández" de la Comunidad de Madrid

17 de noviembre de 2018

PRUEBA POR RELEVOS 1º y 2º de ESO (60 minutos)

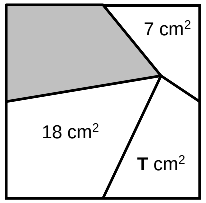
➲**1A.-** Empieza aquí En la isla Colorín viven 90 tortugas y la media de sus edades es de 790 años. La media de las edades de las tortugas hembra es de 810 años y la de las tortugas macho es de 720 años.
¿Cuántas tortugas macho hay en la isla?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1B.- Sea **T** la respuesta del problema 2B.

En un cuadrado hemos señalado un punto interior y lo hemos unido con los puntos medios de los lados del cuadrado.
¿Qué área tiene la región sombreada?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)



1C.- Sea **T** la respuesta del problema 2C.

La carretera de las Matemáticas es una larguísima recta que pasa por ocho bonitas ciudades, situadas de Sur a Norte en este orden: Apotema; Baricentro; Cálculo; Divisor; Ecuación; Factor; Grado; Hipotenusa. Completa la tabla de distancias, en km, entre esas ciudades:

Apotema							
	Baricentro						
		Cálculo					
28			**Divisor**				
	27			**Ecuación**			
43		**25**			**Factor**		
			22			**Grado**	
		38		**T** + 4			**Hipotenusa**

¿Qué distancia hay de Apotema a Ecuación?

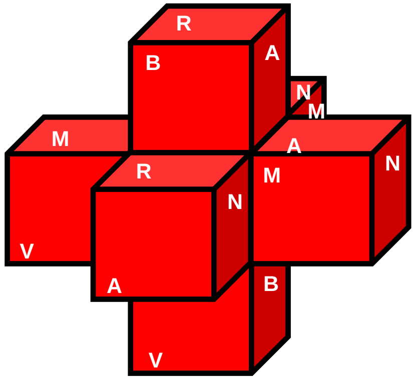
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

XVIII Concurso Intercentros de Matemáticas "Joaquín Hernández" de la Comunidad de Madrid

17 de noviembre de 2018

PRUEBA POR EQUIPOS 3º y 4º de ESO (45 minutos)

1. Con **siete cubos idénticos** he formado una bonita estrella como ves en el dibujo. La única regla que he respetado es que dos caras pegadas entre sí no pueden estar pintadas del mismo color.



Amarillo
Blanco
Marrón
Naranja
Rojo
Verde

Del cubo que está colocado más a la izquierda vemos dos caras, la de arriba de color marrón y la frontal de color verde. ¿Qué colores tienen las restantes caras: la de abajo; la del fondo; la de la izquierda; la de la derecha?

2. Cuatro amigos se encuentran en el interior de en una habitación cerrada con un candado que solo puede abrirse con una clave secreta. Ninguno sabe cómo ha llegado hasta ahí y el pánico empieza a invadirles.

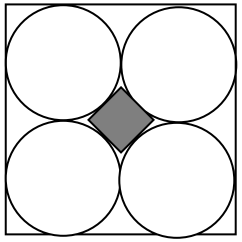
De repente una voz les susurra: "Ahhh, la clave que abre el candado **es un número de siete cifras, ninguna de ellas repetida; cada cifra divide al número de la clave; y la clave es el mayor número que tiene esas cuatro propiedades**. Ahhh, solo contáis con quince minutos, si no,...". El pánico se apoderó de los amigos.

a) Averigua qué tres cifras no pueden formar parte del número misterioso.

b) Encuentra el número misterioso.

(La historia es triste, nunca nadie volvió a ver a los cuatro amigos)

3. ¡Qué bonito dibujo! Un cuadrado grande de 4 cm de lado, cuatro círculos iguales tangentes entre ellos y otro cuadrado pequeñito tangente a los cuatro círculos. ¿Qué área tiene este cuadrado más pequeño?



XVIII Concurso Intercentros de Matemáticas "Joaquín Hernández" de la Comunidad de Madrid

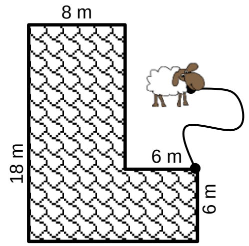
17 de noviembre de 2018

PRUEBA INDIVIDUAL 3º y 4º de ESO (90 minutos)

1. Todavía queda mucho para que llegue el verano. Mientras tanto…
En la suma que ves, letras diferentes representan números diferentes. Sabiendo que **G = J – 1**, ¿qué número se esconde detrás de **AGOSTO**?

	JUNIO
+	**JULIO**
	AGOSTO

2. Francisquita ha atado a su ovejita Beeé en el vértice de su casa en forma de **L**. Si la cuerda mide 12 metros, ¿en qué superficie, en m^2, de su jardín puede pastar la ovejita Beeé?



3. Una señora reparte las manzanas de su huerta a las personas que le van pidiendo de la siguiente forma:
Al primero que llega le da la mitad de las manzanas más media manzana.
Al segundo, la mitad de las que quedan más media manzana.
Al tercero, la mitad de las que quedan más media manzana y así sucesivamente con los siguientes.
Cuando llega el décimo y recoge las manzanas que le corresponden, éstas se acaban.
¿Cuántas manzanas tenía la señora?

4. En un examen de matemáticas, la niña Centésima contestó bien a 100 preguntas y por ello obtuvo una puntuación de 20 000 puntos. Por cada pregunta bien contestada le otorgaban puntos en función del tipo: si era de geometría le daban 4000 puntos; si era de álgebra, 800 puntos; y si era de aritmética, 10 puntos. ¿Cuántas preguntas de cada clase contestó bien la niña Centésima?

XVIII Concurso Intercentros de Matemáticas "Joaquín Hernández" de la Comunidad de Madrid

17 de noviembre de 2018

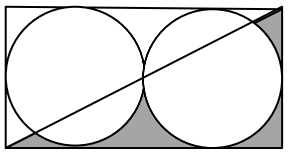
PRUEBA POR RELEVOS 3º y 4º de ESO (60 minutos)

2A.- Sea **T** la respuesta del problema 3A.

Esteban ha hecho una serie de exámenes y tras cada uno de ellos ha sacado la nota media de todos los realizados hasta el momento. En el penúltimo sacó un 82,5 y su media aumentó medio punto. En el último sacó (**T** + 40) puntos y su media disminuyó 1 punto.

¿Cuál fue la **media final** de Esteban en sus exámenes?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

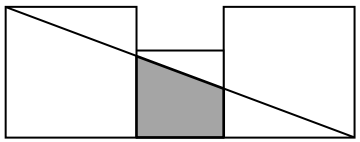


➲ 2B.- Empieza aquí

¿Cuál es el área de la zona sombreada si la base del rectángulo mide 12 cm y su altura 6 cm?

Importante: haz todos tus cálculos tomando la aproximación $\pi \approx 3$.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)



2C.- Sea **T** la respuesta del problema 3C.

En la figura ves dos cuadrados de lado 8 cm y un cuadrado de lado $\frac{T}{50}$ cm.

¿Qué área ocupa la zona sombreada?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

XVIII Concurso Intercentros de Matemáticas "Joaquín Hernández" de la Comunidad de Madrid

17 de noviembre de 2018

PRUEBA POR EQUIPOS Bachillerato (45 minutos)

1. Tenemos cuatro dados con caras del 1 al 6. Dos de ellos están equilibrados, pero los otros dos están trucados.

Uno de los dados trucados tiene la siguiente propiedad: la probabilidad del doble de un número es el doble de la probabilidad del número y la probabilidad del triple de un número es el triple de la del número.

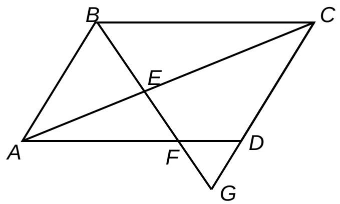
En el otro dado la probabilidad del doble de un número es la mitad de la del número y la probabilidad del triple de un número es la tercera parte de la probabilidad del número.

En ambos dados ocurre que la probabilidad de sacar un 4 es igual a la probabilidad de sacar un 5.

Metemos nuestros cuatro dados en un cubilete y los lanzamos. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 22?

2. En la figura ves un paralelogramo *ABCD*. El punto *G* está en la prolongación del lado *CD* y el segmento *BG* corta a la diagonal *AC* en el punto *E* y al lado *AD* en el punto *F*.

Sabiendo que *BE* = 16 cm y *EF* = 12 cm, ¿cuántos centímetros mide el segmento *FG*?



3. La matrícula de un coche tiene solo cinco cifras, sin letras. Al instalarla, el propietario se equivocó y la puso al revés, lo de abajo para arriba y, ¡cosas de la simetría!, aún así, el número boca abajo tenía sentido y se podía leer. Debido a esto, el propietario no se dio cuenta de su error. Si la diferencia del número que ahora tenía y el original es 78633, ¿cuál es la matrícula correcta?

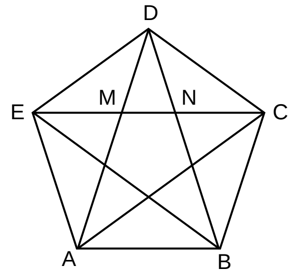
Observación: el número 1 en las matrículas de los coches se escribe l.

XVIII Concurso Intercentros de Matemáticas "Joaquín Hernández" de la Comunidad de Madrid

17 de noviembre de 2018

PRUEBA INDIVIDUAL Bachillerato (90 minutos)

1. En el pentágono regular de la figura, *MN* = 1. Determina las longitudes de los segmentos: *EM*, *EC* y *ED*.



2. Determina los vértices y el área del rectángulo de mayor área inscrito entre las parábolas $y = 12 - x^2$, $y = x^2 - 12$.

3. Las bases de la Asociación *Mathandyou* dicen que para tratar los diferentes asuntos de su interés se formarán pequeñas comisiones de 10 socios cada una con la condición de que no haya dos comisiones que tengan más de un socio en común. Este año se han formado 40 comisiones. Demuestra que la asociación tiene más de 60 socios*.

4. Elena es muy hábil multiplicando por 2, y a Nicolás le gusta más dividir entre 3. Un día toman el número $\frac{729}{64}$ y comienza Elena multiplicándolo por 2, después Nicolás divide el resultado entre 3 y siguen así alternativamente formando una sucesión.

a) ¿Cuál de los dos obtendrá el número 1?

b) Si continuaran indefinidamente, ¿se podría calcular la suma de los infinitos términos? En caso afirmativo, calcúlala y si no fuera posible, justifícalo.

- Este no es el enunciado original del problema.

XVIII Concurso Intercentros de Matemáticas "Joaquín Hernández" de la Comunidad de Madrid

17 de noviembre de 2018

<u>PRUEBA POR RELEVOS</u> Bachillerato (60 minutos)

3A.- Sea **T** la respuesta del problema 1A.

Si $f(x)=\dfrac{6}{x+1}$ y $(g\circ f)(x)=\dfrac{24-12x}{(x+1)^2}$, calcula $(f\circ g)\left(\dfrac{10}{T}\right)$.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

3B.- Sea **T** la respuesta del problema 1B.

¿Cuántos puntos tienen en común las gráficas de las funciones $y=\cos x$, $y=\dfrac{1}{\mathrm{T}\cdot\pi^2}x^2$?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

3C.- Empieza aquí

María sale de casa y va a recoger a su hija al aeropuerto. Para ello conduce a 50 km/h durante la primera hora, pero se da cuenta de que si continúa a esa velocidad llegará una hora tarde, así que aumenta la velocidad en 30 km/h el resto del viaje y llega 30 minutos antes. ¿Qué distancia en km hay entre la casa de María y el aeropuerto?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

XVIII INTERCENTROS SOLUCIONES

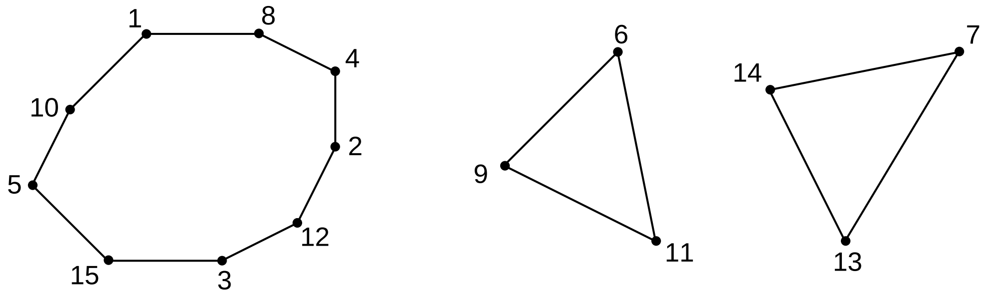
PRUEBA POR EQUIPOS 1º y 2º de ESO (45 minutos)

1. En la isla Colorín hay 15 casas numeradas del 1 al 15 y hay exactamente 15 caminos de **un solo sentido**. De cada casa sale un camino, y cada camino une dos casas. El primer día, en cada casa hay un duende que lleva escrito en su camiseta el número de la casa. El segundo día todos los duendes salen de la casa en la que están y, recorriendo el único camino posible, llegan hasta la casa que está al final del camino. Después de este cambio la distribución quedó así:

Duende	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Casa	10	4	12	8	15	9	14	1	11	5	6	2	7	13	3

El tercer día los duendes vuelven a salir de la casa en la que están y recorren el camino hasta la casa siguiente, y el cuarto día vuelven a hacer lo mismo.

¿Hay algún duende que vuelve a su casa el cuarto día? Si es que sí, indica cuáles y si es que no, justifica la respuesta.



Vuelven a su casa el cuarto día los que llevan en la camiseta el número: **6**, **9**, **11**, **7**, **14** y **13**.

Otro método.

Duende (1º día)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Casa 2º día	10	4	12	8	15	9	14	1	11	5	6	2	7	13	3
3º día	5	8	2	1	3	11	13	10	6	15	9	4	14	7	12
4º día	15	1	4	10	12	6	7	5	9	3	11	8	13	14	2

2. En una caja hay 45 euros en monedas de 2, 5, 10, 20 y 50 céntimos. Si metiéramos en la caja una moneda de 5 céntimos, dos de 10 céntimos, tres de 20 céntimos y cuatro de 50 céntimos, entonces la caja tendría la misma cantidad de monedas de cada tipo.

¿Cuántas monedas de cada tipo hay en la caja?

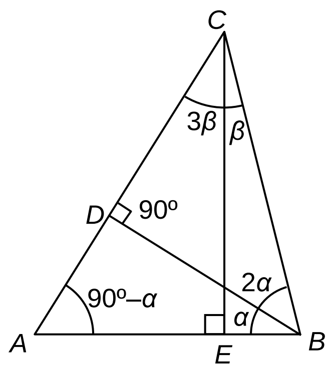
Si designamos con x al número de monedas de 2 céntimos, entonces $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$, $(x-4)$ son la cantidad de monedas de 5, 10, 20 y 50 céntimos, respectivamente.

$$2x+5(x-1)+10(x-2)+20(x-3)+50(x-4)=4500 \Leftrightarrow 87x=4785 \Leftrightarrow x=55$$

Hay **55 monedas de 2 cts**, **54 de 5 cts**, **53 de 10 cts**, **52 de 20 cts** y **51 de 50 cts**.

3. En el triángulo acutángulo ABC, sea D el punto del lado AC tal que BD es perpendicular a AC y sea E el punto del lado AB tal que CE es perpendicular a AB. Sabiendo las siguientes igualdades entre ángulos: $C\hat{B}D = 2A\hat{B}D$ y $A\hat{C}E = 3B\hat{C}E$, **calcula las medidas de los tres ángulos del triángulo ABC**.

Nota: Llamamos ángulo $P\hat{Q}R$ al ángulo agudo de vértice Q que forman los segmentos PQ y QR.



$$\left.\begin{array}{l} 4\beta+2\alpha=90^\circ \\ 3\alpha+\beta=90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow 3\beta-\alpha=0^\circ \Rightarrow \alpha=3\beta \text{ luego } 9\beta+\beta=90^\circ \Rightarrow \beta=9^\circ \text{ y } \alpha=27^\circ$$

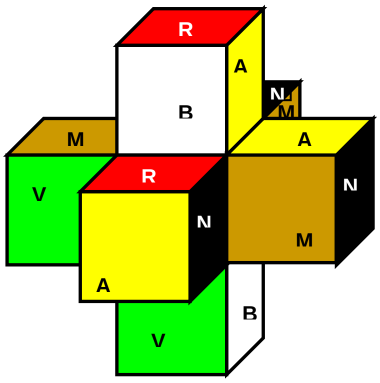
.

Por lo tanto $\boxed{\hat{A}=90^\circ-27^\circ=63^\circ;\ \hat{B}=3\cdot 27=81^\circ;\ \hat{C}=4\cdot 9=36^\circ}$.

PRUEBA POR EQUIPOS 3º y 4º de ESO (45 minutos)

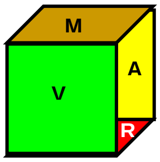
1. Con **siete cubos idénticos** he formado una bonita estrella como ves en el dibujo. La única regla que he respetado es que dos caras pegadas entre sí no pueden estar pintadas del mismo color.

Amarillo
Blanco
Marrón
Naranja
Rojo
Verde

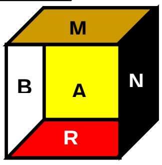


Del cubo que está colocado más a la izquierda vemos dos caras, la de arriba de color marrón y la frontal de color verde. ¿Qué colores tienen las restantes caras: la de abajo; la del fondo; la de la izquierda; la de la derecha?

Observando el de la derecha y el de delante se concluye que R y M ocupan caras opuestas y observando el superior y el de delante, B y N ocupan caras opuestas.
En conclusión A y V ocupan caras opuestas.



Ya conocemos cuatro de las caras.



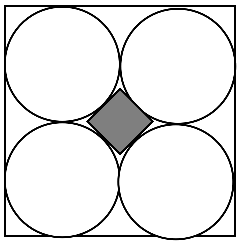
Para determinar las otras dos basta observar que A, N y M tienen un vértice en común y situando la cara M en la parte superior y la A de fondo se deduce que la de la derecha es N y se obtiene la respuesta.

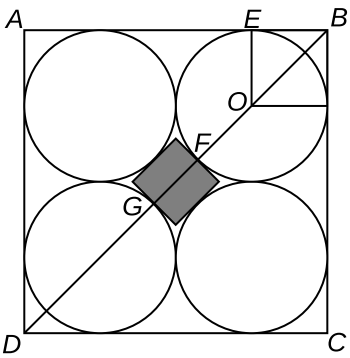
Abajo R. Fondo A. Izquierda B, Derecha N.

2. Cuatro amigos se encuentran en el interior de en una habitación cerrada con un candado que solo puede abrirse con una clave secreta. Ninguno sabe cómo ha llegado hasta ahí y el pánico empieza a invadirles.
De repente una voz les susurra: "Ahhh, la clave que abre el candado **es un número de siete cifras, ninguna de ellas repetida; cada cifra divide al número de la clave; y la clave es el mayor número que tiene esas cuatro propiedades**. Ahhh, solo contáis con quince minutos, si no,...". El pánico se apoderó de los amigos.
a) Averigua qué tres cifras no pueden formar parte del número misterioso.
b) Encuentra el número misterioso.
(La historia es triste, nunca nadie volvió a ver a los cuatro amigos)

El 0 no puede ser porque no tiene sentido que un número sea divisible por 0. El 5 tampoco porque la clave terminaría en 5 y no sería múltiplo de las cifras pares. Se necesita suprimir una cifra de las ocho que quedan pero al suprimir cualquiera de 1, 2, 3, 6, 7 y 8 el número resultante no sería múltiplo de 9 y si quitamos el 9 entonces no sería múltiplo de 3. Por lo tanto el 4 es el que tampoco puede formar parte de la clave. Las cifras **0**, **5** y **4** no pueden pertenecer al número misterioso.
Como tiene que ser múltiplo de 8 buscamos la menor terminación de tres cifras que sea múltiplo de 8 y ésta es 312.
Para las cuatro restantes buscamos la combinación que nos de el mayor múltiplo de 7 y ésta es la respuesta. **9867312**.

3. ¡Qué bonito dibujo! Un cuadrado grande de 4 cm de lado, cuatro círculos iguales tangentes entre ellos y otro cuadrado pequeñito tangente a los cuatro círculos. ¿Qué área tiene este cuadrado más pequeño?





Si AB = 4 entonces EB = 1 que es el radio de los círculos.
Se deduce que $OB = \sqrt{2}$ y que $DB = 4\sqrt{2}$.
Puesto que $DB = DG + GF + FB$ se deduce que:
$4\sqrt{2} = 2\left(1+\sqrt{2}\right) + GF \Rightarrow GF = 2\sqrt{2} - 2 = 2\left(\sqrt{2}-1\right)$
La superficie del cuadrado pequeño es.

$$S = GF^2 = \left[2\left(\sqrt{2}-1\right)\right]^2 = 4\left(2+1-2\sqrt{2}\right) = 4\left(3-2\sqrt{2}\right) \text{ cm}^2$$

PRUEBA POR EQUIPOS **Bachillerato** (45 minutos)

1. Tenemos cuatro dados con caras del 1 al 6. Dos de ellos están equilibrados, pero los otros dos están trucados.

Uno de los dados trucados tiene la siguiente propiedad: la probabilidad del doble de un número es el doble de la probabilidad del número y la probabilidad del triple de un número es el triple de la del número.

En el otro dado la probabilidad del doble de un número es la mitad de la del número y la probabilidad del triple de un número es la tercera parte de la probabilidad del número.

En ambos dados ocurre que la probabilidad de sacar un 4 es igual a la probabilidad de sacar un 5.

Metemos nuestros cuatro dados en un cubilete y los lanzamos. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 22?

Primer dado defectuoso: $p(1)=x,\ p(2)=2x,\ p(3)=3x,\ p(4)=p(5)=4x,\ p(6)=6x$

Como $p(1)+p(2)+...+p(6)=1 \Rightarrow x=p(1)=\frac{1}{20},...,\ p(5)=\frac{4}{20},\ p(6)=\frac{6}{20}$

Segundo dado defectuoso: $p(1)=y,\ p(2)=\frac{y}{2},\ p(3)=\frac{y}{3},\ p(4)=p(5)=\frac{y}{4},\ p(6)=\frac{y}{6}$

Como $y+\frac{y}{2}+\frac{y}{3}+\frac{y}{4}+\frac{y}{4}+\frac{y}{6}=1 \Rightarrow y=p(1)=\frac{2}{5},...,\ p(5)=\frac{3}{30},\ p(6)=\frac{2}{30}$

$p(S=22)=p(4666\cup 5566)=p(4666)+p(5566)$

$$p(4666)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 2=\frac{1}{36}\left(\frac{1}{75}+\frac{3}{100}+\frac{1}{25}\right)=\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{432}$$

$$p(5566)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 2+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 2+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}\left(\frac{1}{50}+\frac{2}{75}+\frac{6}{100}+\frac{1}{50}\right)=\frac{19}{5400}$$

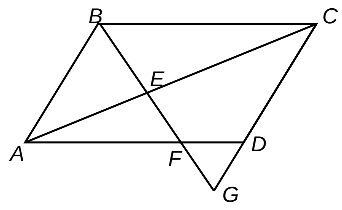
$$\boxed{p(S=22)=\frac{1}{432}+\frac{19}{5400}=\frac{63}{10800}=\frac{7}{1200}=0{,}005833...}$$

Esquemáticamente se podría escribir mediante una tabla.

Dado 1	Dado 2	Dados 3 y 4	Probabilidades
4	6	6 y 6	$\frac{4}{20}\cdot\frac{2}{30}\cdot\frac{1}{36}$
6	4	6 y 6	$\frac{6}{20}\cdot\frac{3}{30}\cdot\frac{1}{36}$
6	6	4 y 6 ó 6 y 4	$\frac{6}{20}\cdot\frac{2}{30}\cdot\frac{1}{36}\cdot 2$
5	5	6 y 6	$\frac{4}{20}\cdot\frac{3}{30}\cdot\frac{1}{36}$
5	6	5 y 6 ó 6 y 5	$\frac{4}{20}\cdot\frac{2}{30}\cdot\frac{1}{36}\cdot 2$
6	5	5 y 6 ó 6 y 5	$\frac{6}{20}\cdot\frac{3}{30}\cdot\frac{1}{36}\cdot 2$
6	6	5 y 5	$\frac{6}{20}\cdot\frac{2}{30}\cdot\frac{1}{36}$

$$\boxed{p(S=22)=\frac{8+18+24+12+16+36+12}{20\cdot 30\cdot 36}=\frac{126}{21600}=\frac{7}{1200}}$$

2. En la figura ves un paralelogramo *ABCD*. El punto *G* está en la prolongación del lado *CD* y el segmento *BG* corta a la diagonal *AC* en el punto *E* y al lado *AD* en el punto *F*.
Sabiendo que *BE* = 16 cm y *EF* = 12 cm, ¿cuántos centímetros mide el segmento *FG*?



Designamos mediante *x* a la medida del segmento *FG.* Los triángulos *ABF* y *DGF* son semejantes, luego

$$\frac{FD}{FG}=\frac{AF}{BF}\Leftrightarrow\frac{FD}{x}=\frac{AF}{28}\Rightarrow 28\cdot FD=AF\cdot x$$

También son semejantes *AFE* y *CBE* luego

$$\frac{FE}{AF}=\frac{EB}{BC}\Leftrightarrow\frac{12}{AF}=\frac{16}{AF+FD}=\frac{4}{FD}\Rightarrow 12\cdot FD=4\cdot AF\Rightarrow AF=3\cdot FD$$

Sustituyendo en la expresión anterior se obtiene $28\cdot FD=3\cdot FD\cdot x\Rightarrow x=FG=\dfrac{28}{3}$ cm.

3. La matrícula de un coche tiene solo cinco cifras, sin letras. Al instalarla, el propietario se equivocó y la puso al revés, lo de abajo para arriba y, ¡cosas de la simetría!, aún así, el número boca abajo tenía sentido y se podía leer. Debido a esto, el propietario no se dio cuenta de su error. Si la diferencia del número que ahora tenía y el original es 78633, ¿cuál es la matrícula correcta?
Observación: el número 1 en las matrículas de los coches se escribe I.

Las únicas cifras que al invertirlas representan también una cifra son: 0, I, 6, 8 y 9. Además hay que tener en cuenta que al girar la matrícula 180º las cifras se invierten de orden.
Como edcba – abcde = 78633 entonces a – e puede ser 9 – 6 = 3 o bien 11 – 8 = 3.
Si a = 9 y e = 6 el número de la matrícula no aumentaría al dar la vuelta la matrícula, de donde se deduce que a = 1 y e = 8.
Las tres cifras centrales son pues 0, 6 y 9 y como en la resta de a – e nos llevamos 1, la diferencia entre b y d o (10+b) y d tiene que ser 4, lo que nos conduce a que b = 0 y d = 6 de donde c = 9.

La matrícula correcta es I0968 y al girarla se convierte en 8960I.

La diferencia es 8960I – I0968 = 78633.

PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

RELEVOS A

1A. En la isla Colorín viven 90 tortugas y la media de sus edades es de 790 años. La media de las edades de las tortugas hembra es de 810 años y la de las tortugas macho es de 720 años. **¿Cuántas tortugas macho hay en la isla?**

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

Sea x el número de las tortugas macho. Entonces, $810(90 - x) + 720x = 790 \cdot 90 \Rightarrow$
$720x - 810x = 790 \cdot 90 - 810 \cdot 90 \Rightarrow -90x = -1800 \Rightarrow \boxed{x = 20}$ tortugas macho.

3A. Sea **T** la respuesta del problema 1A.

Si $f(x) = \dfrac{6}{x+1}$ y $(g \circ f)(x) = \dfrac{24-12x}{(x+1)^2}$, calcula $(f \circ g)\left(\dfrac{10}{T}\right)$.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

$\boxed{\textbf{T = 20}}$

$$f(x) = \frac{6}{x+1} \Rightarrow x+1 = \frac{6}{y} \Rightarrow x = \frac{6}{y} - 1 \text{ Por lo tanto } f^{-1}(x) = \frac{6}{x} - 1$$

$$g(x) = \left(g \circ (f \circ f^{-1})\right)(x) = (g \circ f)\left(f^{-1}(x)\right) = (g \circ f)\left(\frac{6}{x} - 1\right) = \frac{24 - 12\left(\frac{6}{x} - 1\right)}{\left(\frac{6}{x} - 1 + 1\right)^2} = x^2 - 2x$$

$$(f \circ g)\left(\frac{10}{T}\right) = (f \circ g)\left(\frac{10}{20}\right) = (f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(\frac{1}{4} - 1\right) = f\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{6}{-\frac{3}{4} + 1} = 24 \quad \boxed{S = 24}$$

2A. Sea **T** la respuesta del problema 3A.

Esteban ha hecho una serie de exámenes y tras cada uno de ellos ha sacado la nota media de todos los realizados hasta el momento. En el penúltimo sacó un 82,5 y su media aumentó medio punto. En el último sacó (**T** + 40) puntos y su media disminuyó 1 punto.

¿Cuál fue la **media final** de Esteban en sus exámenes?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

$\boxed{\textbf{T = 24}}$

Si x es la suma de las notas de todos los exámenes hasta el momento y n el número de exámenes, entonces:

$$\frac{x}{n} + \frac{1}{2} = \frac{2x+n}{2n} = \frac{x+82{,}5}{n+1} = \frac{x+82{,}5+64}{n+2} + 1 = \frac{x+n+148{,}5}{n+2}$$

Si $\dfrac{2x+n}{2n} = \dfrac{x+82{,}5}{n+1} \Rightarrow 2xn + 2x + n^2 + n = 2xn + 165n \Rightarrow 2x + n^2 = 164n$

Si $\dfrac{2x+n}{2n} = \dfrac{x+n+148{,}5}{n+2} \Rightarrow 2xn + 4x + n^2 + 2n = 2xn + 2n^2 + 297n \Rightarrow 4x - n^2 = 295n$

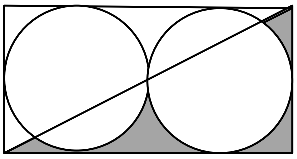
Eliminando la x con ambas expresiones se obtiene $3n^2 - 33n = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 11 \end{cases}$

Pero como $n = 0$ no tiene sentido, $n = 11$. Entonces $2x + 11^2 = 164 \cdot 11 \Rightarrow x = 841{,}5$

La media inicial era 841, 5 : 11 = 76,5 y la final medio punto menos, 76. $\boxed{S = 76}$

RELEVOS B

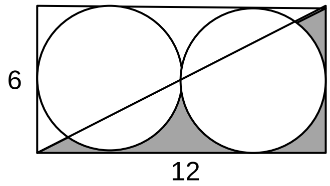
2B. ¿Cuál es el área de la zona sombreada si la base del rectángulo mide 12 cm y su altura 6 cm?



Importante: haz todos tus cálculos tomando la aproximación $\pi \approx 3$.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

El radio es 3 y la superficie a determinar es la mitad de la diferencia del área del rectángulo y la suma de las áreas de los dos círculos.

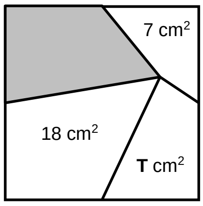


Por lo tanto $S = \frac{1}{2}\left(6 \cdot 12 - 2\pi \cdot 3^2\right)$

Tomando la aproximación $\pi \approx 3$ se obtiene $\boxed{S = 9}$ cm².

1B. Sea **T** la respuesta del problema 2B.

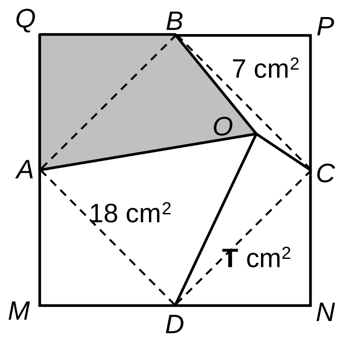
En un cuadrado hemos señalado un punto interior y lo hemos unido con los puntos medios de los lados del cuadrado.



¿Qué área tiene la región sombreada?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

$\boxed{T = 9}$



ABCD es un cuadrado, luego la suma de las alturas de los triángulos *ADO* y *BCO* y bases respectivas *AD* y *BC* es igual que el lado del cuadrado. Lo mismo ocurre con los triángulos *ABO* y *DCO*, por lo tanto $S_{ABO} + S_{DCO} = S_{ADO} + S_{BCO}$.

Como también los triángulos *ABQ, BCP, CDN* y *DAM* son iguales, se verifica que $S_{AQBO} + S_{DNCO} = S_{AMDO} + S_{BPCO}$, es decir,

$S_{AQBO} + 9 = 18 + 7 \Rightarrow S_{AQBO} = 16$. $\boxed{S = 16}$ cm².

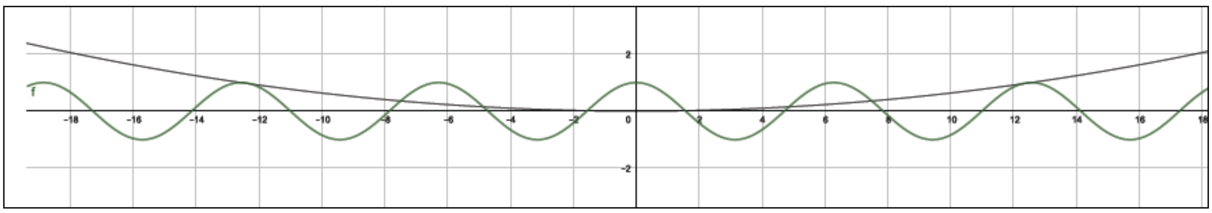
3B. Sea **T** la respuesta del problema 1B.

¿Cuántos puntos tienen en común las gráficas de las funciones $y = \cos x$, $y = \frac{1}{T \cdot \pi^2} x^2$?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

$\boxed{T = 16}$

La parábola es $y = \frac{x^2}{(4\pi)^2}$ y solo podrá cortar a la función $y = \cos x$ cuando sea igual o menor que 1. La función que determina la parábola es igual a 1 para $x = \pm 4\pi$, lo cual nos determina el intervalo en el que pueden haber puntos de corte. Esbozando las gráficas de las funciones se observa que hay 10 puntos de corte. 5 en la parte positiva y otros 5 en la negativa (por simetría). La dificultad estriba en darse cuenta de que un poco antes de 4π hay otro punto de corte ya que en 4π una función es cóncava con pendiente positiva y la otra convexa con pendiente cero.



RELEVOS C

3B. María sale de casa y va a recoger a su hija al aeropuerto. Para ello conduce a 50 km/h durante la primera hora, pero se da cuenta de que si continúa a esa velocidad llegará una hora tarde, así que aumenta la velocidad en 30 km/h el resto del viaje y llega 30 minutos antes. ¿Qué distancia en km hay entre la casa de María y el aeropuerto?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

Si t es el tiempo estimado para llegar al aeropuerto podemos plantear las relaciones de los tiempos empleados en cada trayecto: $\frac{50+y}{50}=t+1$ y también $1+\frac{y}{80}=t-\frac{1}{2}$.

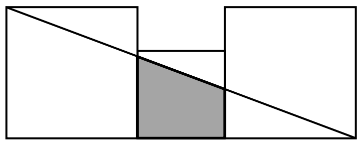
Eliminando t entre ambas ecuaciones se obtiene $\frac{y}{50}-\frac{y}{80}=\frac{3}{2}\Rightarrow y=200$.

Por lo tanto $x + y = 250$ km. $\boxed{S = 250}$ km.

2C. Sea **T** la respuesta del problema 3C.

En la figura ves dos cuadrados de lado 8 cm y un cuadrado de lado $\frac{T}{50}$ cm.

¿Qué área ocupa la zona sombreada?



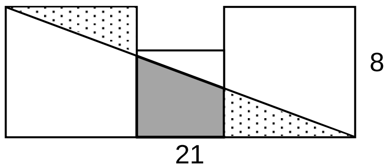
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

$\boxed{\mathbf{T = 250}}$

$\frac{T}{50}=\frac{250}{50}=5$. Los triángulos punteados son iguales.

El área de la mitad del rectángulo de lados 21 y 8 es igual que la de un cuadrado grande más la del cuadrilátero que se pide.

Por lo tanto $\frac{1}{2}\cdot 21\cdot 8=8^2+S\Rightarrow S=84-64=20$. $\boxed{S = 20}$ cm^2.



1C. Sea **T** la respuesta del problema 2C.

La carretera de las Matemáticas es una larguísima recta que pasa por ocho bonitas ciudades, situadas de Sur a Norte en este orden: Apotema; Baricentro; Cálculo; Divisor; Ecuación; Factor; Grado; Hipotenusa. Completa la tabla de distancias, en km, entre esas ciudades:

Apotema							
	Baricentro						
		Cálculo					
28			**Divisor**				
	27			**Ecuación**			
43		**25**			**Factor**		
			22			**Grado**	
		38		**T** + 4			**Hipotenusa**

¿Qué distancia hay de Apotema a Ecuación?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

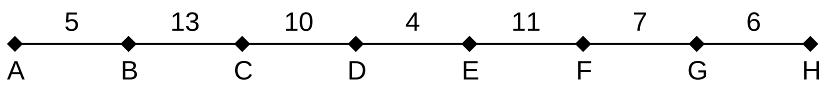
T = 20

T + 4 = 24

Se pueden ir deduciendo una a una diciendo: Si de A a E hay 43 y de C a E hay 25, entonces de A a C hay 43 – 25 = 18. Y así sucesivamente.

También se pueden plantear sistemas de ecuaciones lineales. S = 32

Apotem							
5	**Baricentro**						
18	13	**Cálculo**					
28	23	10	**Divisor**				
32	**27**	14	4	**Ecuación**			
43	38	**25**	15	11	**Factor**		
50	45	32	**22**	18	7	**Grado**	
56	51	**38**	28	**T** + 4	13	6	**Hipotenusa**

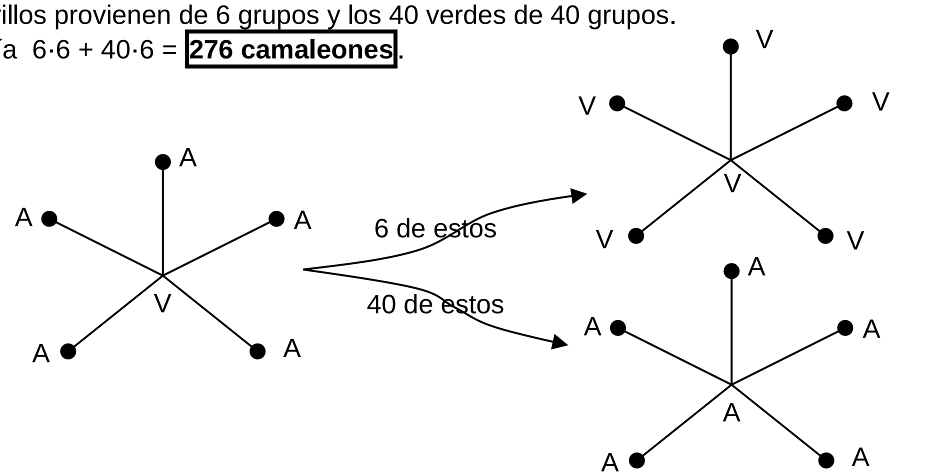


PRUEBA INDIVIDUAL 1º y 2º de ESO (90 minutos)

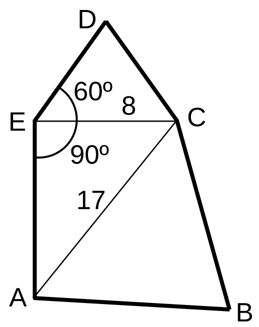
1. En la isla Colorín todos los camaleones eran rojos. Cada uno de ellos tiene exactamente un amigo o tiene exactamente 5 amigos. Un día, cada camaleón con exactamente un amigo se volvió amarillo y cada camaleón con exactamente 5 amigos se volvió verde. Resultó así que los que son amigos son de colores diferentes. Más tarde, 30 camaleones amarillos se volvieron verdes y 40 verdes se volvieron amarillos. De este modo resultó que los que son amigos son del mismo color.

¿Cuántos camaleones hay en la isla Colorín?

Los 30 amarillos provienen de 6 grupos y los 40 verdes de 40 grupos.
En total había $6 \cdot 6 + 40 \cdot 6 =$ **276 camaleones**.



2. Del pentágono *ABCDE*, sabemos que $E = 150º$, que $AB = 17$ cm y $DE = 8$ cm, que los triángulos *ABC* y *CDE* son equiláteros. **Calcula el perímetro del pentágono *ABCDE*.**

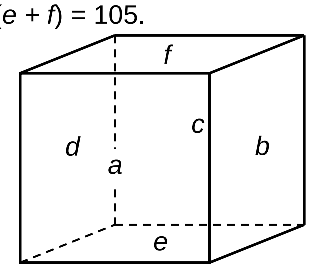


Como $D\hat{E}C = 60º$ y $D\hat{E}A = 150º$ entonces $C\hat{E}A = 90º$ y el triángulo *CEA* es rectángulo.
Por lo tanto $EA = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$. El perímetro es 8 + 8 + 17 + 17 + 15 = **65 cm**.

3. Un juego consiste en escribir un número entero positivo en cada una de las seis caras de un cubo (puedes repetir números). Después hay que escribir en cada vértice del cubo el resultado de multiplicar los tres números que hay en las caras que coinciden en él y por último hay que sumar los ochos números que hay escritos en los vértices. El objetivo es que esta suma sea 105.

Da todas las posibles combinaciones ganadoras.

$afb + bfc + cfd + dfa + aeb + bec + ced + dea = 105$
$a(fb + df + eb + de) + c(eb + de + df + fb) = (a + c)(eb + de + df + fb) = (a + c)(b + d)(e + f) = 105$.
Como $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, cada uno de esos factores ha de ser 3, 5 o 7 y corresponden a las sumas de los números que ocupan caras opuestas.
Si $a + c = 3$ solo hay una posibilidad, que sean (1, 2), es igual el orden.
Si $b + d = 5$ hay dos posibilidades, (1, 4) y (2, 3).
Y entonces $e + f = 7$ tiene tres posibilidades, (1, 6), (2, 5) y (3,4).



En total hay seis posibilidades:
$\{(1,2);(1,4);(1,6)\}$ $\{(1,2);(1,4);(2,5)\}$ $\{(1,2);(1,4);(3,4)\}$
$\{(1,2);(2,3);(1,6)\}$ $\{(1,2);(2,3);(2,5)\}$ $\{(1,2);(2,3);(3,4)\}$

4. En cada casilla de una cuadrícula de 3 × 3 hemos escrito nueve números de tal manera que cada número es el doble del que tiene justo debajo y es la tercera parte del que tiene justo a su derecha. Si la suma de todos ellos es 728, **escribe la cuadrícula con sus nueve números**.

Una forma sencilla es rellenar la cuadrícula con números que cumplan las condiciones y observar la suma de todos. A continuación se ajustan a la suma exigida.

4	**12**	**36**
2	**6**	**18**
1	**3**	**9**

La suma es 1 + 2 + 3 + … + 36 = 91 y como 728 = 91 · 8 basta con multiplicar por 8 a todos los números de la cuadrícula.

32	**96**	**288**
16	**48**	**144**
8	**24**	**72**

También se podría haber rellenado con *x*, 2*x*, 3*x*, etc y plantear una ecuación para hallar *x*.

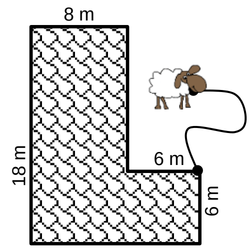
PRUEBA INDIVIDUAL 3º y 4º de ESO (90 minutos)

1. Todavía queda mucho para que llegue el verano. Mientras tanto…En la suma que ves, letras diferentes representan cifras diferentes. Sabiendo que **G = J – 1**, ¿qué número se esconde detrás de **AGOSTO**?

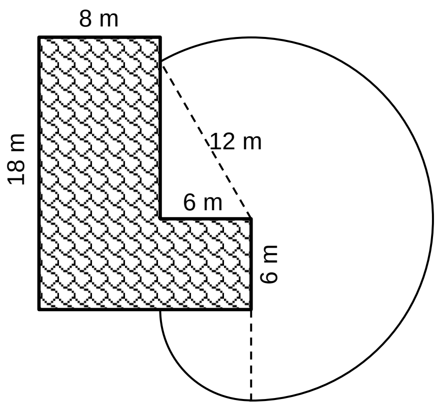
```
   JUNIO
+  JULIO
  AGOSTO
```

Es evidente que **A** = 1 y que **O** = 0. Entonces **U** = 5.
J y **G** solo podrían ser 7 y 6, 8 y 7, 9 y 8 para que al sumar **J + J** nos llevemos 1. Pero 7 + 7 nunca puede terminar en 6 aunque arrastráramos una unidad. 9 + 9 termina en 8, pero como en el anterior la suma es 10 nos llevaríamos 1. Por lo tanto **J** = 8, **G** = 7
Analizamos los otros posibles valores.
I no puede ser 0, 1, 4, 5, 7, 8, 9.
Si **I** = 2, **T** = 4 y nos quedan para **N, L** y **S** las cifras 3, 6 y 9 únicamente.
Si **I** = 3, **T** = 6 y nos quedan para **N, L** y **S** las cifras 2, 4 y 9 únicamente, que no pueden ser.
Si **I** = 6, **T** = 2 y nos quedan para **N, L** y **S** las cifras 3, 4 y 9 únicamente, que no pueden ser porque al sumar **I + I** nos llevaríamos 1.
Hay dos soluciones 85320 + 85620 = 170940 y 85620 + 85320 = 170940 pero en ambos casos la suma es la misma: **A G O S T O = 1 7 0 9 4 0**.

2. Francisquita ha atado a su ovejita Beeé en el vértice de su casa en forma de **L**. Si la cuerda mide 12 metros, ¿en qué superficie, en m², de su jardín puede pastar la ovejita Beeé?



La zona en la que puede pastar la oveja se compone de un triángulo y dos sectores circulares de radios 12 y 6.



Los ángulos del triángulo son 30º, 60º y 90º ya que $\cos\alpha = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60º$ (si no se tienen nociones de trigonometría, basta con caer en la cuenta que un triángulo rectángulo con hipotenusa doble que un cateto es una mitad de un triángulo equilátero dividido por una de sus alturas).
La amplitud del sector grande es 210º y la del pequeño 60º.
El otro cateto del triángulo es $c = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$
El área de la zona es por tanto,

$$\boxed{S = \frac{6 \cdot 6\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}\pi \cdot 6^2 + \frac{\pi \cdot 12^2 \cdot 210}{360} = 18\sqrt{3} + 93\pi \text{ m}^2}.$$

3. Una señora reparte las manzanas de su huerta a las personas que le van pidiendo de la siguiente forma:
Al primero que llega le da la mitad de las manzanas más media manzana.
Al segundo, la mitad de las que quedan más media manzana.
Al tercero, la mitad de las que quedan más media manzana y así sucesivamente con los siguientes.
Cuando llega el décimo y recoge las manzanas que le corresponden, éstas se acaban.
¿Cuántas manzanas tenía la señora?

Cuando llega el 10º había 1, coge la mitad de las que hay más media y se acaban las manzanas.
El 9º se encuentra 3, coge la mitad de las que hay más media manzana y queda 1.
El 8º se encuentra 7, se lleva 4 y deja 3.
El 7º se encuentra 15, se lleva 8 y deja 7.
Ya se ve la sucesión de las que se llevan. 1, 2, 4, 8, 16,…, 2^9
El primero se llevó 2^9 manzanas y dejó $2^9 - 1$. Luego en total había $2^9 + 2^9 - 1$ = **1023 manzanas**.

4. En un examen de matemáticas, la niña Centésima contestó bien a 100 preguntas y por ello obtuvo una puntuación de 20 000 puntos. Por cada pregunta bien contestada le otorgaban puntos en función del tipo: si era de geometría le daban 4000 puntos; si era de álgebra, 800 puntos; y si era de aritmética, 10 puntos. ¿Cuántas preguntas de cada clase contestó bien la niña Centésima?

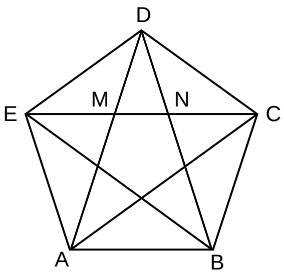
Sean *x, y, z,* el número de preguntas de geometría, álgebra y aritmética, respectivamente.

Entonces, $\left.\begin{array}{r} x+y+z=100 \\ 4000x+800y+10z=20\,000 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} z=100-x-y \\ 4000x+800y+10(100-x-y)=20\,000 \end{array}\right\}$

Esto nos conduce a la ecuación diofántica $399x + 79y = 1900 \Rightarrow y = \frac{1900 - 399x}{79}$

Como *y* ha de ser entero positivo entonces $1 \le x \le 4$. Para *x* = 1 se obtiene *y* = 19. Para los otros valores de *x* se obtienen valores de *y* no enteros. Los valores son: *x* = 1, *y* = 19, *z* = 80:
1 de geometría, 19 de álgebra y 80 de aritmética.

PRUEBA INDIVIDUAL Bachillerato (90 minutos)



1. En el pentágono regular de la figura, $MN = 1$.

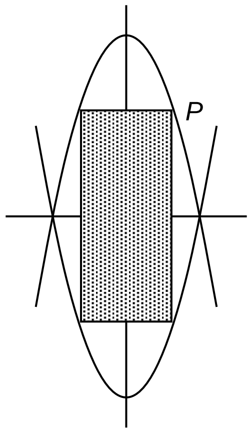
Determina las longitudes de los segmentos: *EM*, *EC* y *ED*.

Los triángulos *EMD* y *EDC* son isósceles y semejantes. También son isósceles y semejantes *BNE y MND*.
Llamando *x* a *EM* , tenemos que $ED = EN = x + 1$ y $EC = x + 2$.

Entonces $\frac{EM}{FD} = \frac{FD}{EC} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{x+1}{x+2} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$ cuyas soluciones son

$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Solo vale la positiva que corresponde a la razón áurea $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$

$$\boxed{EM = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi,\ EC = 2+\sqrt{5} = \Phi^3,\ ED = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \Phi^2}$$



2. Determina los vértices y el área del rectángulo de mayor área inscrito entre las parábolas $y = 12 - x^2$, $y = x^2 - 12$.

Llamando a las coordenadas del punto *P* (*x, y*), con $x > 0$, $y > 0$, el área del rectángulo es $S = 2x \cdot 2y = 4xy$

Pero $y = 12 - x^2$, luego $S = 4x(12 - x^2) = 4(12x - x^3)$

$S' = 4(12 - 3x^2)$ $\quad S'' = 4(-6x) = -24x$

La primera derivada se anula para $x = 2$ y $S'(2) < 0$ luego se trata de un máximo relativo. $f(2) = 12 - 4 = 8$.

Los vértices son *P*(2, 8), *Q*(–2, 8), *R*(2, –8), *S*(–2, –8) y el área mide *S* = 4·2·8 = 64 u².

Otro método. Para no tener que usar las derivadas se puede proceder así.
Buscamos las coordenadas enteras del posible punto *P* y encontramos $P_1(1, 11)$, $P_2(2, 8)$ y $P_3(3, 3)$

Para P_1 el rectángulo de vértices $(\pm 1, \pm 11)$ tiene de área 2 · 22 = 44.

Para P_2 el rectángulo de vértices $(\pm 2, \pm 8)$ tiene de área 4 · 16 = 64.

Para P_3 el rectángulo de vértices $(\pm 3\ \pm 3)$ tiene de área 6 · 6 = 36.

Parece que el área máxima se encontrará en el punto P_2 o en uno cercano.

Tomando $x = 2 + \alpha$ con $-2 < \alpha < 2\sqrt{3}$ se obtiene un área que es $S = 2(2+\alpha) \cdot 2(12 - (2+\alpha)^2)$, es decir,

$S = 64 - 4\alpha^2(6+\alpha)$. Si $\alpha > 0$ el área es evidentemente menor. Si $-2 < \alpha < 0 \Rightarrow 6 + \alpha > 0$ y

$S = 64 - 4\alpha^2(6+\alpha) < 64$.

Por lo tanto el área máxima se alcanza con los vértices en los puntos $(\pm 2, \pm 8)$ y es igual a 64.

3. Las bases de la Asociación *Mathandyou* dicen que para tratar los diferentes asuntos de su interés se formarán pequeñas comisiones de 10 socios cada una con la condición de que no haya dos comisiones que tengan más de un socio en común. Este año se han formado 40 comisiones. Demuestra que la asociación tiene más de 60 socios*.

Por cada comisión se pueden formar $\binom{10}{2} = 45$ parejas diferentes y ninguna de ellas puede estar en otra comisión. Como hay 40 comisiones, en total se pueden formar un mínimo de 45 · 40 = 1800 parejas diferentes de socios.
Si *n* es el número de socios $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \geq 1800$ luego $n > 60$.

*Por un error del que os pedimos nuestras más sinceras disculpas, en la prueba la pregunta que se formuló fue: ¿*Cuántos socios tiene como mínimo la asociación*? Aún no sabemos resolver este problema. Seguimos pensándolo y eso nos mantiene entretenidos, pero si algún lector tiene la solución, estaremos encantados de que nos la mande a conprim@ucm.es. También nos parece que es un problema abierto bonito para plantearlo en el aula, incluso en 1º o 2º ESO y ver hasta dónde se puede llegar.
El jurado valorará lo que hayan trabajado los estudiantes y los avances que hayan logrado en este problema.
Nosotros mientras tanto hemos conseguido acotar el mínimo entre 61 y 100.

¡¡¡HEMOS RECIBIDO UNA ACOTACIÓN MEJOR Y LA SOLUCIÓN DEFINITIVA DEL PROBLEMA!!!

Adjuntamos ambas al final de este documento y damos nuestra más sincera enhorabuena a **Nané** (1ºESO) por su solución con 90 socios y a **Miguel** (4º ESO) por su demostración (nada fácil) de que el número mínimo es 82.

La siguiente distribución por filas, columnas y paralelas a las diagonales representa una solución para 100 socios.

	C11	C12	C13	C14	C15	C16	C17	C18	C19	C20
C1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C2	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C3	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
C4	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
C5	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C6	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
C7	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
C8	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
C9	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
C10	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

	C11	C12	C13	C14	C15	C16	C17	C18	C19	C20
C1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C2	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C3	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
C4	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
C5	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C6	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
C7	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
C8	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
C9	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
C10	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

4. Elena es muy hábil multiplicando por 2, y a Nicolás le gusta más dividir entre 3. Un día toman el número $\frac{729}{64}$ y comienza Elena multiplicándolo por 2, después Nicolás divide el resultado entre 3 y siguen así alternativamente formando una sucesión.

a) ¿Cuál de los dos obtendrá el número 1?

b) Si continuaran indefinidamente, ¿se podría calcular la suma de los infinitos términos? En caso afirmativo, calcúlala y si no fuera posible, justifícalo.

Como $a_1 = \frac{729}{64} = \frac{3^6}{2^6}$ cuando hayan pasado seis términos con n impar y otros seis términos con n par se obtendrá el $a_{13} = 1$.

$$\frac{729}{64}, \frac{729}{32}, \frac{243}{32}, \frac{243}{16}, \frac{81}{16}, \frac{81}{8}, \frac{27}{8}, \frac{27}{4}, \frac{9}{4}, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{1}, 1, 2, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \ldots$$

Los términos con n par los consigue Elena y los de n impar Nicolás.

$\boxed{\textbf{El } a_{13} = 1 \textbf{ lo consigue Nicolás}}$.

Los términos con n impar constituyen una progresión geométrica de razón $\frac{2}{3}$ al igual que los términos con n par.

Por lo tanto, la suma es:

$$\boxed{S = S_1 + S_2 = \frac{\frac{729}{64}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{\frac{729}{32}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2187}{64} + \frac{2187}{32} = \frac{6561}{64} = 102{,}515625}$$

SOLUCIÓN DE MIGUEL VALDIVIESO, ALUMNO DE 4º ESO DEL COLEGIO ALEMÁN, ENVIADA EL 14 DE DICIEMBRE DE 2018. ¡¡EXCELENTE TRABAJO!!

Sea m el mínimo número de socios…
Teniendo en cuenta que un total de 40 comisiones han sido formadas a lo largo del último año, se infiere que el máximo número de parejas de comisiones que comparten un socio es

$$\binom{40}{2} = 780$$

Dado que cada comisión comparte un socio como mucho, esto también puede verse como el número de parejas de comisiones en los que cada socio está. Se sigue que, si el k-ésimo socio está en c_k comisiones, entonces participa en $\binom{c_k}{2}$ parejas de comisiones. Por consiguiente

$$\sum_{k=1}^{m} \binom{c_k}{2} \leq \binom{40}{2}$$

Puesto que un total de 40 comisiones con 10 socios respectivamente son convocadas

$$\sum_{k=1}^{m} c_k = 400$$

Nótese que la función $f: x \to \binom{x}{2} = \frac{x^2-x}{2}\ \forall x \in \mathbb{R}$ es convexa. La desigualdad de Jensen establece que, para funciones convexas $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y unos números $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{D}_g$

$$g\left(\frac{\sum_{k=1}^{m} c_k}{m}\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^{m} g(c_k)}{m}$$

Aplicado en f

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m} f(c_k) \geq m \cdot f\left(\frac{\sum_{k=1}^{m} c_k}{m}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m} \binom{c_k}{2} \geq m \cdot \left(\binom{\frac{\sum_{k=1}^{m} c_k}{m}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \binom{40}{2} = \frac{40 \cdot 39}{2} \geq \sum_{k=1}^{m} \binom{c_k}{2} \geq m \cdot \left(\binom{\frac{\sum_{k=1}^{m} c_k}{m}}{2}\right) = m \cdot \left(\binom{\frac{400}{m}}{2}\right) = m \cdot \left(\frac{\left(\frac{400}{m}\right)\left(\frac{400}{m} - 1\right)}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 40 \cdot 39 \geq 400 \cdot \left(\frac{400}{m} - 1\right) \Rightarrow m \geq \frac{4000}{49}$$

Como $m \in \mathbb{N}$,

$$m \geq 82$$

A continuación muestro una tabla con una posible distribución[1] para $m = 82$ con la que se pueden formar 41(>40) comisiones respetando las condiciones. Se sigue que

$$\boxed{m_{\text{mín}} = 82}$$

[1] Esta distribución corresponde a un sistema triple de Steiner $S(t = 2, k = 5, n = 41)$.
En la perseverante búsqueda de la respuesta a este problema he tenido la suerte de tropezar con modelos (como los planos proyectivos de orden n), teoremas (como el de Jensen) o sistemas (como el de Steiner, ideal para el rompecabezas), decisivos a la hora de resolver el problema (y que hasta entonces creía reservados a aquellos versados en las matemáticas).

Comisiones	Soc. 1	Soc. 2	Soc. 3	Soc. 4	Soc. 5	Soc. 6	Soc. 7	Soc. 8	Soc. 9	Soc. 10
C1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C2	1	11	12	13	14	15	16	17	18	19
C3	2	11	20	21	22	23	24	25	26	27
C4	3	12	20	28	29	30	31	32	33	34
C5	1	21	28	35	36	37	38	39	40	41
C6	4	11	29	35	42	43	44	45	46	47
C7	5	13	20	36	42	48	49	50	51	52
C8	6	14	22	28	43	48	53	54	55	56
C9	2	15	30	35	49	53	57	58	59	60
C10	7	12	23	37	42	54	57	61	62	63
C11	3	16	21	44	48	58	61	64	65	66
C12	1	24	29	50	53	62	64	67	68	69
C13	8	11	31	36	55	57	65	67	70	71
C14	8	17	20	38	43	59	61	68	72	73
C15	7	17	25	28	45	49	64	70	74	75
C16	5	16	25	32	35	54	67	72	76	77
C17	8	14	24	32	39	42	58	74	78	79
C18	2	17	31	39	46	48	62	76	80	81
C19	9	12	25	38	46	51	53	65	78	82
C20	10	18	21	32	45	51	56	57	68	80
C21	5	19	26	29	39	56	60	61	70	82
C22	10	14	27	33	36	46	60	63	64	72
C23	2	19	34	40	43	51	63	66	67	74
C24	8	12	27	41	47	49	56	66	69	76
C25	4	17	21	34	52	54	60	69	71	78
C26	6	13	25	29	41	58	63	71	73	80
C27	4	15	22	32	36	62	66	73	75	82
C28	10	13	23	30	39	43	65	69	75	77
C29	3	19	22	37	46	49	68	71	77	79
C30	1	27	30	44	51	54	70	73	79	81
C31	9	11	34	37	50	56	58	72	75	81
C32	9	18	20	41	44	55	60	62	74	77
C33	4	18	26	28	50	59	63	65	76	79
C34	7	13	26	33	35	55	66	68	78	81
C35	9	16	22	33	40	42	59	69	70	80
C36	7	18	24	30	40	47	48	71	72	82
C37	10	16	26	31	37	47	52	53	73	74
C38	6	19	24	33	38	44	52	57	75	76
C39	6	15	27	31	40	45	50	61	77	78
C40	5	15	23	34	38	47	55	64	79	80
C41	3	14	23	41	45	52	59	67	81	82

ACOTACIÓN DE NANÉ MELIKYAN TOROSYAN DE 1ºESO DEL IES FORTUNY ENVIADA EL 18 DE DICIEMBRE DE 2018. ¡¡GRACIAS Y ENHORABUENA!!

El problema decía así:

Las bases de la Asociación Mathandyou dicen que para tratar los diferentes asuntos de su interés se formarán pequeñas comisiones de 10 socios cada una con la condición de que no haya dos comisiones que tengan más de un socio en común. Este año se han formado 40 comisiones. ¿Cuántos socios tiene como mínimo la asociación?

<u>Solución</u>

Nombramos a los socios asignándoles un número a cada uno.

El socio uno estará en la misma comisión que los socios con los números: 11; 20; 28; 35; 41; 46; 50; 53; 55 (se ve que a cada número se le suma la cantidad correspondiente al número anterior en el siguiente orden: 10; 9; 8;…;2). En la segunda comisión se comienza con el número 2 siguiendo el mismo proceso: 2; 12; 21;…56.

Y así sucesivamente hasta llegar a la comisión que comience con el socio número 40. Para demostrar que el proceso es correcto, he aquí él mismo entero:

Comisiones				Socios						
1	1	11	20	28	35	41	46	50	53	55
2	2	12	21	29	36	42	47	51	54	56
3	3	13	22	30	37	43	48	52	55	57
4	4	14	23	31	38	44	49	53	56	58
5	5	15	24	32	39	45	50	54	57	59
6	6	16	25	33	40	46	51	55	58	60
7	7	17	26	34	41	47	52	56	59	61
8	8	18	27	35	42	48	53	57	60	62
9	9	19	28	36	43	49	54	58	61	63
10	10	20	29	37	44	50	55	59	62	64
11	11	21	30	38	45	51	56	60	63	65
12	12	22	31	39	46	52	57	61	64	66
13	13	23	32	40	47	53	58	62	65	67
14	14	24	33	41	48	54	59	63	66	68
15	15	25	34	42	49	55	60	64	67	69
16	16	26	35	43	50	56	61	65	68	70
17	17	27	36	44	51	57	62	66	69	71
18	18	28	37	45	52	58	63	67	70	72
19	19	29	38	46	53	59	64	68	71	73
20	20	30	39	47	54	60	65	69	72	74
21	21	31	40	48	55	61	66	70	73	75
22	22	32	41	49	56	62	67	71	74	76
23	23	33	42	50	57	63	68	72	75	77
24	24	34	43	51	58	64	69	73	76	78
25	25	35	44	52	59	65	70	74	77	79
26	26	36	45	53	60	66	71	75	78	80
27	27	37	46	54	61	67	72	76	79	81
28	28	38	47	55	62	68	73	77	80	82
29	29	39	48	56	63	69	74	78	81	83
30	30	40	49	57	64	70	75	79	82	84
31	31	41	50	58	65	71	76	80	83	85
32	32	42	51	59	66	72	77	81	84	86
33	33	43	52	60	67	73	78	82	85	87
34	34	44	53	61	68	74	79	83	86	88
35	35	45	54	62	69	75	80	84	87	89
36	36	46	55	63	70	76	81	85	88	90
37	37	47	56	64	71	77	82	86	89	91
38	38	48	57	65	72	78	83	87	90	92
39	39	49	58	66	73	79	84	88	91	93
40	40	50	59	67	74	80	85	89	92	94

Según este proceso, como mínimo debería ser 94, pero este número se puede reducir en 4 unidades cambiando los socios de las 4 últimas comisiones de forma que el primer miembro de cada una de estas 4 comisiones es el último del anterior. Con las demás comisiones no se podría aplicar esta forma ya que los números se repiten, y además resultaría un número mayor al que obtenemos ahora.

Comisiones				**Socios**						
37	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
38	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
39	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
40	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37

Obtenemos que el número mínimo de socios es 90.