

30 de noviembre de 2019

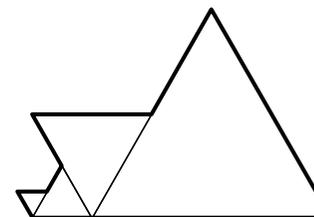
PRUEBA POR EQUIPOS 1º y 2º de ESO (45 minutos)

1. Como seguro que ya sabéis, la media aritmética de dos números positivos x e y es la mitad de su suma: $\frac{x+y}{2}$. Lo que tal vez no sepáis es que la media geométrica de dos números es la raíz cuadrada de su producto: $\sqrt{x \cdot y}$.
Encontrad un par de números tales que su media aritmética sea 13 y su media geométrica sea 12. Explicad cómo los habéis encontrado.
2. Cuando en B son las 14:00 en A son las 18:00. Un avión partió un viernes de A hacia B haciendo una escala intermedia en C . Durante la escala en C estuvieron detenidos 2 horas y 10 minutos. El vuelo llegó a B el sábado a las 12:15 (hora de B). El avión estuvo volando en total 14 horas y 10 minutos. ¿Qué hora era en A cuando despegó el avión?
3. El cuadrado $ABCD$ tienen 36 cm de lado. El punto E está sobre el lado AB a 12 cm de B , F es el punto medio del lado BC y el punto G está sobre CD a 12 cm de C . ¿Cuál es el área de la región que está dentro del triángulo EFG y fuera del triángulo AFD ?

30 de noviembre de 2019

PRUEBA INDIVIDUAL 1º y 2º de ESO (90 minutos)

1. En un tablero de ajedrez de 8×8 colocamos números siguiendo las siguientes reglas:
 - En las casillas blancas se escribe un 0 o un 1, de modo que haya la misma cantidad de casillas blancas con ceros que con unos.
 - En cada casilla negra se escribe la suma de los números que hay en las casillas blancas vecinas.Una vez relleno hacemos la suma de todos los números que hay escritos en el tablero. ¿Cuál es la diferencia entre el menor y el mayor valor que podemos obtener para esa suma?
2. A un concierto benéfico acudieron 2000 personas. Cada una pagó por su entrada una cantidad entera entre 1 y 500 euros (ambos inclusive). Al hacer caja se observó que se habían vendido entradas de todos los precios posibles, que ningún precio se repitió más de 10 veces y que, con esas condiciones, la recaudación fue la mínima posible. ¿Cuántas entradas de cada precio se vendieron?
3. Si $20^{2019} = 10^{2010} \cdot 40^9 \cdot 2^n$, ¿cuánto vale n ?
4. Partiendo de un triangulito equilátero de 1 cm de lado, y añadiendo otros cuatro triángulos equiláteros tales que los lados de uno miden el doble que los del anterior hemos formado esta figura. Si continuamos hasta poner 10 triángulos, ¿cuál será el perímetro de la figura resultante? Encuentra una fórmula que te permita calcular el perímetro para n triángulos.



**XIX Concurso Intercentros de Matemáticas Joaquín Hernández
Comunidad de Madrid**

30 de noviembre de 2019

PRUEBA POR RELEVOS 1º y 2º de ESO (60 minutos)



1A.- En un curso de inglés se inscribieron 30 personas.

La media de edad de todos los inscritos es 21. La media de edad de los chicos es 25 y la de las chicas es 20. ¿Cuántos de los inscritos son hombres?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1B.- Sea "7" la respuesta del problema 2B.

A la fiesta de la geometría acudieron $2 \cdot T$ invitados entre puntos y rectas. El primer punto bailó con 8 rectas; el siguiente punto bailó con 10 rectas; el siguiente con 12; y así sucesivamente hasta que el último punto bailó con todas las rectas. ¿Cuántas rectas fueron a la fiesta de la geometría?

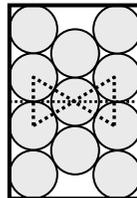
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1C.- Sea "7" la respuesta del problema 2C.

Disponemos de 11 balones de minibasket de $\frac{T}{2}$ cm de diámetro que

queremos guardar en una caja de $\frac{T}{2}$ cm de alta y $2T$ cm de larga.

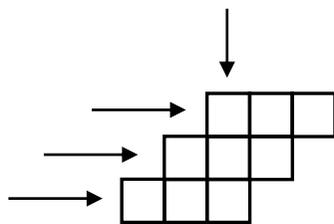
Calcula el ancho de la caja más pequeña en la que caben los 11 balones.



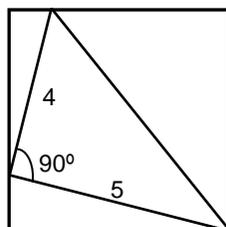
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

PRUEBA POR EQUIPOS 3º y 4º de ESO (45 minutos)

1. Un juego consiste en elegir varios enteros positivos diferentes que sumen 17 y hallar su producto. ¿Cuál es el producto máximo que puede conseguirse?
2. Tenéis que rellenar esta cuadrícula con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 de tal manera que los números de tres cifras que señalan las flechas sean cuadrados perfectos.

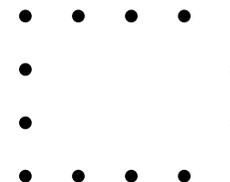


3. Hemos encajado un triángulo rectángulo de catetos 4 y 5 en un cuadrado como puedes ver en el dibujo. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

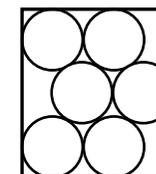


PRUEBA INDIVIDUAL 3º y 4º de ESO (90 minutos)

1. Dentro de un año la edad de Alberto será el doble que la edad de Bea. Dentro de unos años, cuando yo tenga 66 años, la suma de las edades de Alberto y Bea también será 66. Dentro de 6 años mi edad será un múltiplo de la suma de las edades de Alberto y Bea. ¿Cuántos años tengo hoy?
2. Estás viendo algunos puntos formando un rectángulo. Usando esos puntos como vértices, ¿cuántos triángulos podemos formar?



3. Hemos metido en una caja 100 tarjetas numeradas desde el 1 hasta el 100. ¿Cuál es el máximo número de tarjetas que puedo elegir para asegurarme de que entre las que elijo no hay ninguna que sea el doble de otra?
4. Los seis círculos de la figura tienen un radio de 5 cm y, como ves, son tangentes entre sí y también a los lados de un rectángulo. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?



**XIX Concurso Intercentros de Matemáticas Joaquín Hernández
Comunidad de Madrid**

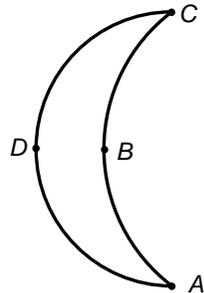
30 de noviembre de 2019

PRUEBA POR RELEVOS 3º y 4º de ESO (60 minutos)

2A.- Sea "T" la respuesta del problema 3A.

En la luna de la figura ADC es una semicircunferencia de radio T y ABC es un cuarto de circunferencia. ¿Cuál es el área de la luna?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)



2B.-
Empieza aquí

¿Cuánto suman las cifras del número $A = 7665667^2 - 7665662^2$?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C.

Calcula el área del cuadrilátero limitado por las gráficas de estas cuatro funciones

$$y = x - 7, \quad y = -x - 1, \quad y = T + 2(6 - x), \quad y = 2x - 4$$

Nota. Es aconsejable representar gráficamente las funciones.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

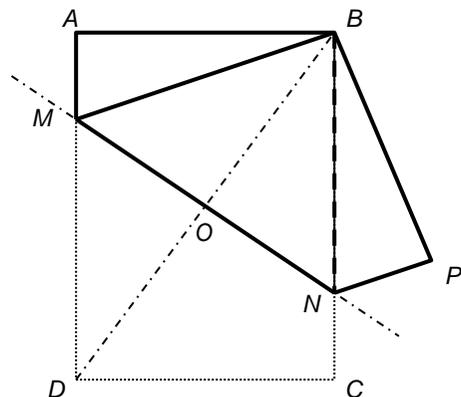
PRUEBA POR EQUIPOS Bachillerato (45 minutos)

1. Tenemos dos números naturales tales que la suma de: su producto, su suma, el cociente del mayor entre el menor y la diferencia del mayor menos el menor es igual a 3125. ¿Cuáles son esos dos números?

2. Completa la división

$$\begin{array}{r}
 \square \square \mathbf{8} \square \\
 \square \square \square \\
 \hline
 \square \square \square \\
 \square \square \square \\
 \hline
 \mathbf{8} \square \\
 \square \square \\
 \hline
 \mathbf{0} \mathbf{0}
 \end{array}$$

3. Disponemos de una hoja de papel rectangular, $ABCD$, de lados $AB = 8$ cm y $AD = 16$ cm. La plegamos de manera que el vértice D coincida con el B , como muestra la figura. Calcula la longitud del segmento MN .

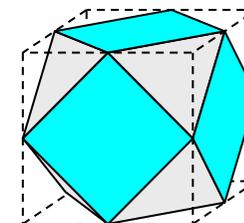
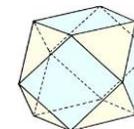


PRUEBA INDIVIDUAL Bachillerato (90 minutos)

1. Tres amigos tienen que sembrar un huerto y atacan juntos esta tarea. Primero empiezan Don Retorcido y la niña Centésima y entre los dos plantan la mitad del huerto. Después Don Retorcido se pone a descansar y continúan con la tarea la niña Centésima y Comenúmeros. Al terminar Don Retorcido apunta "es curioso, de esta manera hemos tardado el doble de tiempo que si hubiéramos trabajado los tres juntos desde el principio". Si en plantar una semilla Don Retorcido emplea 2 segundos y Comenúmeros emplea 5 segundos, ¿cuántos segundos emplea la niña Centésima en plantar una semilla?

2. Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$ y $g(x) = 2x - 3$ calcula el valor de $(f \circ g \circ f^{-1})(2)$.

3. El *cupoctaedro* es un poliedro arquimediano o poliedro semirregular cuyas caras son triángulos equiláteros y cuadrados. Se obtiene truncando un cubo por los vértices. Calcula la superficie del cuboctaedro que se obtiene truncando un cubo de volumen de 64 cm^3 .



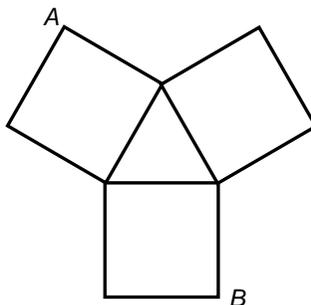
4. En una bolsa hay bolas blancas y negras. Si quitamos 15 bolas blancas el porcentaje de bolas blancas disminuye un 3% y si aumentamos 10 bolas negras el porcentaje de bolas blancas disminuye un 5%. ¿Cuántas bolas de cada clase hay en la bolsa?

30 de noviembre de 2019

PRUEBA POR RELEVOS Bachillerato (60 minutos)

3A.- Sea "T" la respuesta del problema 1A.

En la figura ves un triángulo equilátero de lado T con un cuadrado sobre cada uno de sus lados. Expresa la longitud del segmento AB en la forma $a + b\sqrt{c}$ con a, b, c enteros y c el menor posible. ¿Cuánto vale $\frac{a+b+c}{3}$?



(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

3B.- Sea "T" la respuesta del problema 1B.

Cuando todos partieron por la mañana al gran picnic anual, cada minibús llevaba exactamente el mismo número de personas. A mitad de camino se rompieron $T - 52$ minibuses, de modo que cada minibús debió llevar una persona más. Cuando volvían a casa se estropearon $T - 47$ minibuses más, así que en el camino de regreso había en cada minibús 3 personas más que al salir por la mañana. ¿Cuántas personas asistieron al gran picnic anual?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

3C.- Empezamos aquí Un cuadrado y un octógono regular tienen la misma apotema.

Si el perímetro del cuadrado es $4 + 4\sqrt{2}$, ¿cuál es el perímetro del octógono?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

XIX Concurso Intercentros de Matemáticas "Joaquín Hernández" de la Comunidad de Madrid

30 de noviembre de 2019

PRUEBA POR EQUIPOS 1º y 2º de ESO (45 minutos)

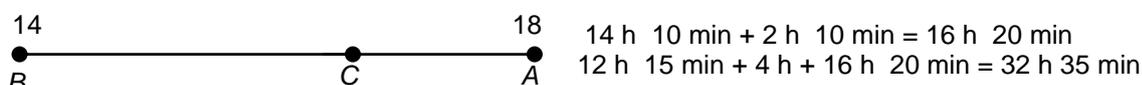
1. Como seguro que ya sabéis, la media aritmética de dos números positivos x e y es la mitad de su suma: $\frac{x+y}{2}$. Lo que tal vez no sepáis es que la media geométrica de dos números es la raíz cuadrada de su producto: $\sqrt{x \cdot y}$.
 Encontrad un par de números tales que su media aritmética sea 13 y su media geométrica sea 12. Explicad cómo los habéis encontrado.

Primera forma. $\frac{x+y}{2} = 13 \Rightarrow x+y = 26$ $\sqrt{x \cdot y} = 12 \Rightarrow x \cdot y = 144$

Escribiendo la ecuación de 2º grado en función de suma y producto de sus soluciones, $x^2 - sx + p = 0$, tenemos $x^2 - 26x + 144 = 0$ cuyas soluciones son $x_1 = 18$; $x_2 = 8$.

Segunda forma. $144 = 1 \cdot 144 = 2 \cdot 72 = 4 \cdot 36 = 8 \cdot 18 = 16 \cdot 9 = 3 \cdot 48 = 6 \cdot 24 = 12 \cdot 12$ y la única descomposición en producto de dos factores cuya suma es 26, es la de $8 \cdot 18$.

2. Cuando en B son las 14:00 en A son las 18:00. Un avión partió un viernes de A hacia B haciendo una escala intermedia en C . Durante la escala en C estuvieron detenidos 2 horas y 10 minutos. El vuelo llegó a B el sábado a las 12:15 (hora de B). El avión estuvo volando en total 14 horas y 10 minutos. ¿Qué hora era en A cuando despegó el avión?

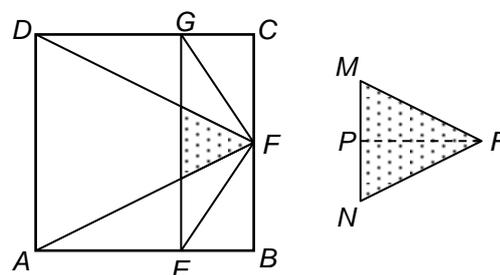


Llegó al día siguiente, por lo tanto cuando despegó el día anterior eran $32 \text{ h } 35 \text{ min} - 24 \text{ h} = 8 \text{ h } 35 \text{ min}$.

3. El cuadrado $ABCD$ tienen 36 cm de lado. El punto E está sobre el lado AB a 12 cm de B , F es el punto medio del lado BC y el punto G está sobre CD a 12 cm de C . ¿Cuál es el área de la región que está dentro del triángulo EFG y fuera del triángulo AFD ?

$PF = EB = 12 \text{ cm} = (36:3) \text{ cm}; \quad MN = AD:3 = (36:3) = 12 \text{ cm}$

$S_{MNF} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 = 72 \text{ cm}^2$



PRUEBA POR EQUIPOS 3º y 4º de ESO (45 minutos)

1. Un juego consiste en elegir varios enteros positivos diferentes que sumen 17 y hallar su producto. ¿Cuál es el producto máximo que puede conseguirse?

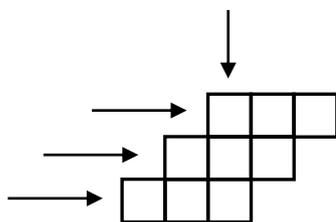
Analizando todas las posibilidades, aunque bastaría con probar en los casos en los que los factores sean más próximos a la media de ellos, tenemos:

Dos factores. $1 \cdot 16 = 16$; $2 \cdot 15 = 30$; $3 \cdot 14 = 42$; $4 \cdot 13 = 52$; $5 \cdot 12 = 60$; $6 \cdot 11 = 66$; $7 \cdot 10 = 70$; $8 \cdot 9 = 72$.

Tres factores. $1 \cdot 2 \cdot 14 = 28$; $1 \cdot 3 \cdot 13 = 39$; $1 \cdot 4 \cdot 12 = 48$; $1 \cdot 5 \cdot 11 = 55$; $1 \cdot 6 \cdot 10 = 60$; $1 \cdot 7 \cdot 9 = 63$; $2 \cdot 3 \cdot 12 = 72$; $2 \cdot 4 \cdot 11 = 88$; $2 \cdot 5 \cdot 10 = 100$; $2 \cdot 6 \cdot 9 = 108$; $2 \cdot 7 \cdot 8 = 112$; $3 \cdot 4 \cdot 10 = 120$; $3 \cdot 5 \cdot 9 = 135$; $3 \cdot 6 \cdot 8 = 154$; $4 \cdot 5 \cdot 8 = 120$; $4 \cdot 6 \cdot 7 = 168$.

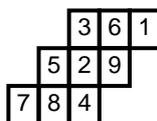
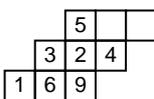
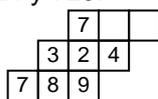
Cuatro factores. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = 55$; $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 10 = 80$; $1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 9 = 90$; $1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 8 = 96$; $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 9 = 108$; $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 = 120$; $1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 = 126$; $1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 140$; $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 8 = 192$; $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$; $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 240$.

2. Tenéis que rellenar esta cuadrícula con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 de tal manera que los números de tres cifras que señalan las flechas sean cuadrados perfectos.



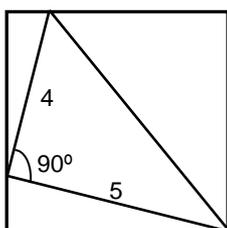
Buscamos los cuadrados perfectos de 3 cifras diferentes: 169, 196, 256, 289, 324, 361, 529, 576, 625, 729, 784, 841, 961.

Dos de ellos han de tener la misma cifra central y que no coincida ninguna de las otras. Eso sólo ocurre con 324 y 529 o 324 y 729.



Solución buscada.

3. Hemos encajado un triángulo rectángulo de catetos 4 y 5 en un cuadrado como puedes ver en el dibujo. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

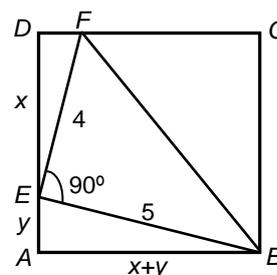


Los triángulos ABE y DEF son semejantes, luego

$$\frac{x}{4} = \frac{x+y}{5} \Rightarrow 5x = 4(x+y) \Rightarrow x = 4y$$

En el triángulo ABE $y^2 + (x+y)^2 = 5^2 \Rightarrow 26y^2 = 25 \Rightarrow y = \frac{5}{\sqrt{26}}$

Como $x = 4y$ entonces $x = \frac{20}{\sqrt{26}}$ y el lado es $x+y = \frac{25}{\sqrt{26}}$



PRUEBA POR EQUIPOS Bachillerato (45 minutos)

1. Tenemos dos números naturales tales que la suma de: su producto, su suma, el cociente del mayor entre el menor y la diferencia del mayor menos el menor es igual a 3125. ¿Cuáles son esos dos números?

$$(x \cdot y) + (x + y) + \frac{x}{y} + (x - y) = 3125 \Rightarrow x \cdot y + 2x + \frac{x}{y} = 3125$$

$$x \cdot y^2 + 2x \cdot y + x = 3125y \Leftrightarrow x(y^2 + 2y + 1) = 3125y \Rightarrow x = \frac{3125y}{(y+1)^2}$$

Como $3125 = 5^5$ y los números y , $(y + 1)$ son primos entre sí, $(y + 1)^2$ tiene que ser un cuadrado perfecto divisor de 5^5 . Solo hay tres posibilidades: 1, 25 y 625. Pero $(y + 1)^2 = 1$ nos lleva a que $y = 0$ y el cociente $x : y$ no tiene sentido.

$$\text{Si } (y + 1)^2 = 25 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x = \frac{3125 \cdot 4}{25} = 500$$

$$\text{Si } (y + 1)^2 = 625 \Rightarrow y = 24 \Rightarrow x = \frac{3125 \cdot 24}{625} = 120$$

Las dos posibilidades son: $x = 500, y = 4$ y $x = 120, y = 24$

Comprobación. $2000 + 504 + 496 + 125 = 3125$
 $2880 + 144 + 96 + 5 = 3125$

2. Completa la división

$$\begin{array}{r} \square \square \boxed{8} \square \\ \square \square \square \\ \hline \square \square \\ \square \square \\ \hline \boxed{0} \boxed{0} \end{array} \quad \begin{array}{r} \square \square \\ \square \boxed{3} \end{array}$$

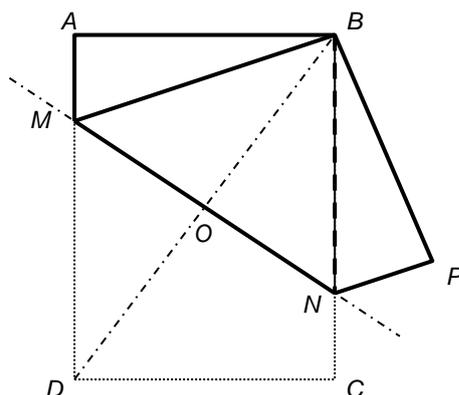
Es fácil deducir que $d = 0$ y $b = 8$. En el divisor, a solo podría ser 2 o 5, para que al multiplicar por e se obtenga un número terminado en 0, pero 5 no es posible ya que $3 \cdot a$ tendría dos cifras, luego $a = 2$ y $e = 5$.

Al multiplicar 3 por c nos tenemos que llevar 2 para obtener $b = 8$, luego c es 7, 8 o 9. Pero 5 por c termina en 0, por lo que $c = 8$.

Conclusión, el divisor es 28 y el cociente 53, por lo que el dividendo es $28 \cdot 53 = 1484$.

$$\begin{array}{r} \square \square \boxed{8} \square \\ \square \square \boxed{d} \\ \hline \square \square \\ \square \square \\ \hline \boxed{0} \boxed{0} \end{array} \quad \begin{array}{r} \boxed{a} \boxed{c} \\ \boxed{e} \boxed{3} \end{array}$$

3. Disponemos de una hoja de papel rectangular, $ABCD$, de lados $AB = 8$ cm y $AD = 16$ cm. La plegamos de manera que el vértice D coincida con el B , como muestra la figura. Calcula la longitud del segmento MN .



Como $MD = MB$ y el triángulo AMB es rectángulo,

$$MB^2 = AM^2 + AB^2.$$

Tomando $x = MB$, tenemos:

$$x^2 = (16 - x)^2 + 8^2 \Rightarrow 0 = 320 - 32x$$

Por lo tanto $x = MB = 10$ cm y

$$AM = 16 - 10 = 6$$
 cm.

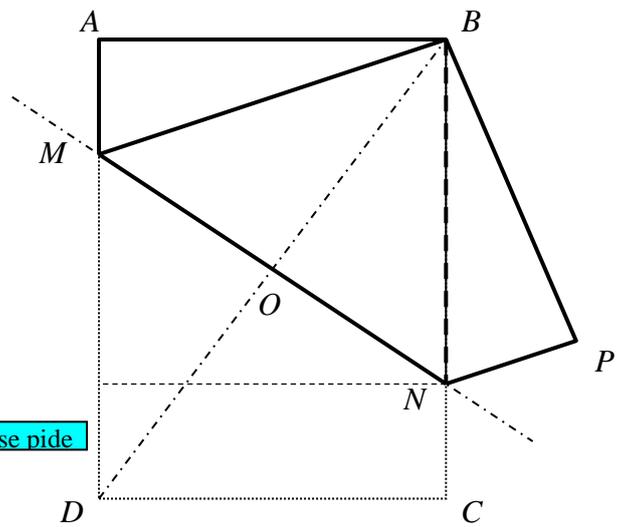
Trazando por N una recta paralela a DC se obtiene otro triángulo rectángulo MSN en el que

$$MN^2 = MS^2 + NS^2 \text{ .. Además } NC = AM = 6$$
 cm y

$$MS = 16 - 6 - 6 = 4$$
 cm.

De aquí se obtiene la longitud de MN .

$$MN^2 = 4^2 + 8^2 = 80 \Rightarrow MN = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$
 cm



El área del triángulo MBN es

Esto no se pide

$$S = \frac{MN \cdot OB}{2} = \frac{4\sqrt{5} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{16^2 + 8^2}}{2} = \frac{4\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{2} = 40$$
 cm²

El área del pentágono $ABPNM$ es: $S_{ABPNM} = S_{MBN} + 2 \cdot S_{ABM} = 40 + 2 \cdot \frac{8 \cdot 6}{2} = 88$ cm² Esto no se pide

También $S_{ABPNM} = S_{ABCD} - S_{BMN} = 16 \cdot 8 - 40 = 128 - 40 = 88$ cm² Esto no se pide

PRUEBA INDIVIDUAL 1º y 2º de ESO (90 minutos)

1. En un tablero de ajedrez de 8 × 8 colocamos números siguiendo las siguientes reglas:
- En las casillas blancas se escribe un 0 o un 1, de modo que haya la misma cantidad de casillas blancas con ceros que con unos.
 - En cada casilla negra se escribe la suma de los números que hay en las casillas blancas vecinas.
- Una vez relleno hacemos la suma de todos los números que hay escritos en el tablero. ¿Cuál es la diferencia entre el menor y el mayor valor que podemos obtener para esa suma?

Los unos que menos aportan son los que están en las orillas, por lo tanto para obtener la menor suma hay que colocar 14 unos en las orillas y los otros dos en el interior.

Para que la suma sea la mayor posible, los unos han de estar en el interior, que caben los 16.

Suma mínima.

Dos unos aportan 2 puntos cada uno,

$$2 \cdot 2 = 4$$

Doce unos aportan 3 puntos cada uno,

$$12 \cdot 3 = 36$$

Dos unos aportan 4 puntos cada uno,

$$2 \cdot 4 = 8$$

Además los 16 unos de los cuadros blancos.

En total $4 + 36 + 8 + 16 = 64$.

Suma máxima.

Cada uno aporta 4 puntos $16 \cdot 4 = 64$

Además los 16 unos de los cuadros blancos. En total $64 + 16 = 80$

La diferencia entre la mayor y la menor suma es $80 - 64 = 16$.

1	3	1	2	1	2	1	2
3	1	2	0	1	0	2	1
1	2	0		0		0	2
2	0		0		0	1	1
1	1	0		0		0	2
2	0		0		0	2	1
1	2	0	1	0	2	1	3
2	1	2	1	2	1	3	1

0		0	1	0	1	0	
	0	2	1	3	1	2	0
0	2	1	4	1	4	1	1
1	1	4	1	4	1	3	0
0	3	1	4	1	4	1	1
1	1	4	1	4	1	2	0
0	2	1	3	1	2	0	
	0	1	0	1	0		0

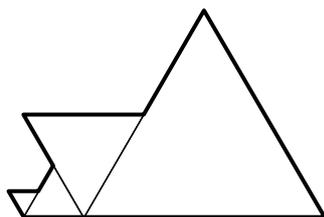
2. A un concierto benéfico acudieron 2000 personas. Cada una pagó por su entrada una cantidad entera entre 1 y 500 euros (ambos inclusive). Al hacer caja se observó que se habían vendido entradas de todos los precios posibles, que ningún precio se repitió más de 10 veces y que, con esas condiciones, la recaudación fue la mínima posible. ¿Cuántas entradas de cada precio se vendieron?

Si tomamos 10 de cada una de las n de menor precio y de las $(500 - n)$ restantes una sola tendremos que $10n + (500 - n) = 2000 \Rightarrow 9n = 1500 \Rightarrow n = \frac{1500}{9} = 166,66\dots$ Luego, como n es entero, habrá 10 de cada una de las 166 de menor precio. Quedan $(2000 - 1660) = 340$ restantes y $500 - 166 = 334$ precios. Luego habrá 333 entradas desde 168, 169, ..., hasta 500 € y las 7 entradas que sobran son de 167 €.

3. Si $20^{2019} = 10^{2010} \cdot 40^9 \cdot 2^n$, ¿cuánto vale n ?

$$20^{2019} = 10^{2010} \cdot 40^9 \cdot 2^n \Leftrightarrow \frac{4^{2019} \cdot 5^{2019}}{2^{2010} \cdot 5^{2010} \cdot 8^9 \cdot 5^9} = 2^n \Leftrightarrow \frac{2^{4038}}{2^{2037}} = 2^{2001} = 2^n \Rightarrow n = 2001$$

4. Partiendo de un triángulo equilátero de 1 cm de lado, y añadiendo otros cuatro triángulos equiláteros tales que los lados de uno miden el doble que los del anterior hemos formado esta figura. Si continuamos hasta poner 10 triángulos, ¿cuál será el perímetro de la figura resultante? Encuentra una fórmula que te permita calcular el perímetro para n triángulos.



La sucesión es: 3, 7, 15, 31, 63, ... es decir, (4-1), (8-1), (16-1), (32-1), ... son potencias de dos menos 1.

Por lo tanto $a_n = 2^{n+1} - 1$ y $a_{10} = 2^{11} - 1 = 2047$

PRUEBA INDIVIDUAL 3º y 4º de ESO (90 minutos)

1. Dentro de un año la edad de Alberto será el doble que la edad de Bea. Dentro de unos años, cuando yo tenga 66 años, la suma de las edades de Alberto y Bea también será 66. Dentro de 6 años mi edad será un múltiplo de la suma de las edades de Alberto y Bea. ¿Cuántos años tengo hoy?

Sean A, B y C las edades de Alberto, Bea y la mía. Llamamos x al tiempo que tiene que transcurrir hasta que yo tenga 66 años. Entonces:

$$A + 1 = 2(B + 1) \Rightarrow A = 2B + 1 \text{ y también } C + x = 66; A + B + 2x = 66.$$

$$\text{Dentro de 6 años } C + 6 = k(A + B + 12).$$

$$\text{Operando, } x = 66 - C; A + B = 66 - 2x = 66 - 2(66 - C) = 2C - 66.$$

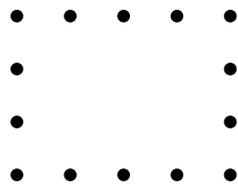
$$\text{Sustituyendo resulta } C + 6 = k(2C - 66 + 12) = k(2C - 54) \Rightarrow k = \frac{C + 6}{2C - 54}.$$

Pero k es positivo, luego $2C - 54 > 0 \Rightarrow C > 27$. Pero también k es un entero mayor o igual a 2.

$$k = \frac{C + 6}{2C - 54} \geq 2 \Rightarrow C + 6 \geq 4C - 108 \Rightarrow 114 \geq 3C \Rightarrow 38 \geq C. \text{ Conclusión } \boxed{C = 38}$$

Las otras incógnitas son: $x = 66 - 38 = 28$; $A + B = 2 \cdot 38 - 66 = 10$ y como $A = 2B + 1$ se obtiene $A = 7, B = 3$.

2. Estás viendo algunos puntos formando un rectángulo. Usando esos puntos como vértices, ¿cuántos triángulos podemos formar?



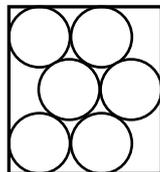
Hay 14 puntos y siempre tres de ellos determinan un triángulo salvo que estén alineados. Por lo tanto el número de triángulos que podemos formar es

$$C_{14,3} - 2 \cdot C_{5,2} - 2 \cdot C_{4,2} = 364 - 20 - 8 = 336$$

3. Hemos metido en una caja 100 tarjetas numeradas desde el 1 hasta el 100. ¿Cuál es el máximo número de tarjetas que puedo elegir para asegurarme de que entre las que elijo no hay ninguna que sea el doble de otra?

Si tomamos las 50 tarjetas que van desde el 51 hasta el 100 y elegimos todos los impares desde el 1 hasta el 25 y luego 4, 16, 20, 24, obtenemos $50 + 13 + 4 = 67$.

4. Los seis círculos de la figura tienen un radio de 5 cm y, como ves, son tangentes entre sí y también a los lados de un rectángulo. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?



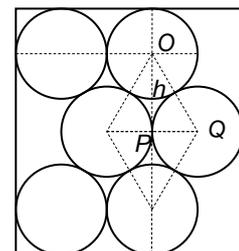
Los lados del rectángulo son: ancho $5r = 25$, alto $2r + 2h = 10 + 2h$

En el triángulo rectángulo OPQ $OP^2 = OQ^2 - PQ^2$ es decir,

$$h = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$$

Las dimensiones del rectángulo son: ancho 25 cm

$$\text{Alto } 10 + 10\sqrt{3} = 10(1 + \sqrt{3})$$



PRUEBA INDIVIDUAL Bachillerato (90 minutos)

1. Tres amigos tienen que sembrar un huerto y atacan juntos esta tarea. Primero empiezan Don Retorcido y la niña Centésima y entre los dos plantan la mitad del huerto. Después Don Retorcido se pone a descansar y continúan con la tarea la niña Centésima y Comenúmeros. Al terminar Don Retorcido apunta "es curioso, de esta manera hemos tardado el doble de tiempo que si hubiéramos trabajado los tres juntos desde el principio". Si en plantar una semilla Don Retorcido emplea 2 segundos y Comenúmeros emplea 5 segundos, ¿cuántos segundos emplea la niña Centésima en plantar una semilla?

Designamos con $2C$ al número de semillas que hay que sembrar. El número de semillas que siembran en 1 segundo Don Retorcido, la niña Centésima y Comenúmeros son, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{5}$, respectivamente, el tiempo que tardan en sembrar, en el primer caso $2C$ semillas es:

$$\frac{C}{\frac{1}{2} + \frac{1}{x}} + \frac{C}{\frac{1}{x} + \frac{1}{5}} = \frac{2xC}{x+2} + \frac{5xC}{x+5} = xC \left(\frac{2x+10+5x+10}{(x+2)(x+5)} \right) = xC \left(\frac{7x+20}{(x+2)(x+5)} \right)$$

Don Retorcido y la niña Centésima.

Si trabajan los tres juntos $\frac{2C}{\frac{1}{2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{5}} = \frac{20xC}{5x+2x+10} = xC \frac{20}{7x+10}$. Como este tiempo es la mitad que el

otro,

$$2xC \frac{20}{7x+10} = xC \left(\frac{7x+20}{(x+2)(x+5)} \right) \Rightarrow \frac{40}{7x+10} = \frac{7x+20}{(x+2)(x+5)} \Rightarrow 40x^2 + 280x + 400 = 49x^2 + 210x + 200 \Rightarrow 9x^2 - 70x - 200 = 0 \Rightarrow x_1 = 10 \text{ y } x_2 = -\frac{20}{9}$$

No tiene sentido el valor de x_2 por lo tanto la solución es 10 segundos

2. Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$ y $g(x) = 2x - 3$ calcula el valor de $(f \circ g \circ f^{-1})(2)$.

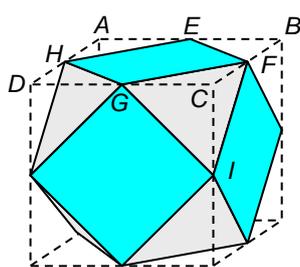
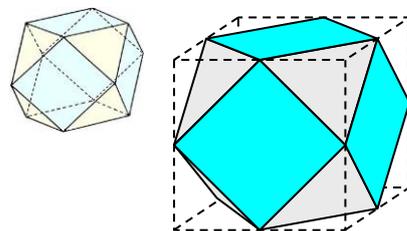
Un primer método es hallar la función $f^{-1}(x)$.

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5 = (x-2)^3 + 3 \Rightarrow y - 3 = (x-2)^3 \Rightarrow x = 2 + \sqrt[3]{y-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 + \sqrt[3]{x-3}$$

$$\text{Entonces } (f \circ g \circ f^{-1})(2) = f(g[f^{-1}(2)]) = f(g(1)) = f(-1) = -24$$

Otro método es hallar directamente $f^{-1}(2)$. $2 = f(x) \Rightarrow 2 = x^3 - 6x^2 + 12x - 5 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = 0$ que por Ruffini nos da la única solución real que es $x = 1$ y luego como en el caso anterior.

3. El cuboctaedro es un poliedro arquimediano o poliedro semirregular cuyas caras son triángulos equiláteros y cuadrados. Se obtiene truncando un cubo por los vértices. Calcula la superficie del cuboctaedro que se obtiene truncando un cubo de volumen de 64 cm^3 .



Si el volumen del cubo es 64 cm^3 , su arista, AB , será de 4 cm .

El área de una cara, $ABCD$, es de 16 cm^2 . El área de la cara $EFGH$ es un medio del área de la cara $ABCD$ por lo tanto $S_{EFGH} = 8 \text{ cm}^2$.

La arista GF de esa cara es $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$.

Como el área de un triángulo equilátero de lado x es $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ el área de la cara FGI

$$\text{es } S_{FGI} = S_{\triangle FGI} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\sqrt{8})^2 = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

$$\text{El área del cuboctaedro es } S = 6 \cdot 8 + 8 \cdot 2\sqrt{3} = 48 + 16\sqrt{3} = 16(3 + \sqrt{3})$$

Esto no se pide

4.- Calcula el volumen del cuboctaedro anterior y en general el volumen del cuboctaedro de arista a .

Solución.-

a) Basta quitar al volumen del cubo el volumen de las 8 pirámides que se quitaron al trincar el cubo.

$$V_{GFCI} = \frac{1}{3} S_{GFC} \cdot Cl = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{4}{3} \text{ cm}^3, V_{\text{cuboctaedro}} = 64 - 8 \cdot \frac{4}{3} = \frac{160}{3} \text{ cm}^3.$$

b) Si la arista es a ,
$$V_{GFCI} = \frac{1}{3} S_{GFC} \cdot Cl = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{24}$$

$$V_{\text{cuboctaedro}} = (a\sqrt{2})^3 - 8 \cdot \frac{a^3 \sqrt{2}}{24} = 2\sqrt{2}a^3 - \left(\frac{a^3 \sqrt{2}}{3}\right) = \sqrt{2}a^3 \left(2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3} \sqrt{2}a^3$$

4. En una bolsa hay bolas blancas y negras. Si quitamos 15 bolas blancas el porcentaje de bolas blancas disminuye un 3 % y si aumentamos 10 bolas negras el porcentaje de bolas blancas disminuye un 5 %. ¿Cuántas bolas de cada clase hay en la bolsa?

Solución. t bolas en total, x bolas blancas, y bolas negras. $t = x + y$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{t} - \frac{x-15}{t-15} = \frac{3}{100} \\ \frac{x}{t} - \frac{x}{t+10} = \frac{5}{100} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 100(xt - 15x - xt + 15t) = 3t^2 - 45t \\ 500x \left(\frac{10}{t(t+10)} \right) = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 500x = t(515 - t) \\ 2 \cdot 500x = 5t(t+10) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot t(515 - t) = 5t(t+10) \Rightarrow 1030 - 2t = 5t + 50 \Rightarrow 7t = 980 \Rightarrow t = 140.$$

$$500x = t(515 - t) \Rightarrow x = \frac{140 \cdot 375}{500} = 105 \qquad y = 140 - 105 = 35$$

PRUEBA POR RELEVOS 1º y 2º de ESO (60 minutos)

1A.- Empieza aquí

En un curso de inglés se inscribieron 30 personas.

La media de edad de todos los inscritos es 21. La media de edad de los chicos es 25 y la de las chicas es 20.
¿Cuántos de los inscritos son hombres?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

$$x \text{ chicos, } y \text{ chicas. } x + y = 30. \quad 30 \cdot 21 = 25x + 20y \Leftrightarrow 126 = 5x + 4y. \quad 4x + 4y = 120. \text{ Restando } x = 6.$$

1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B

A la fiesta de la geometría acudieron $2 \cdot T$ invitados entre puntos y rectas. El primer punto bailó con 8 rectas; el siguiente punto bailó con 10 rectas; el siguiente con 12; y así sucesivamente hasta que el último punto bailó con todas las rectas.

¿Cuántas rectas fueron a la fiesta de la geometría?

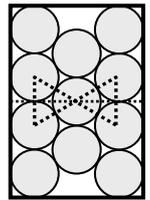
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

$$T = 45, \quad 2T = 90. \text{ Hay } n \text{ puntos, el último punto bailó con } 8 + 2(n - 1) \text{ rectas, por lo tanto } n + 8 + 2(n - 1) = 90$$

$$3n + 6 = 90 \Rightarrow n = 28 \text{ Por lo tanto el número de rectas es } 90 - 28 = 62.$$

1C.- Sea "T" la respuesta del problema 2C.

Disponemos de 11 balones de minibasket de $\frac{T}{2}$ cm de diámetro que queremos guardar en una caja de $\frac{T}{2}$ cm de alta y $2T$ cm de larga. Calcula el ancho de la caja más pequeña en la que caben los 11 balones.

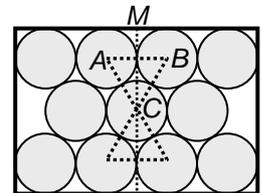


(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

$$T = 42.$$

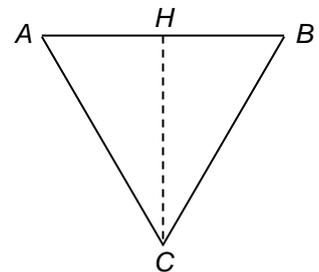
La distribución de las pelotas en la caja más pequeña ha de ser como en la figura. El ancho de la caja es el doble del segmento MC que mide un radio más la altura

del triángulo equilátero ABC de lado 2 radios de los balones, es decir $\frac{T}{2}$ cm.



$$T = 42 \text{ cm, luego } AB = 21 \text{ cm y } HC = \sqrt{21^2 - \left(\frac{21}{2}\right)^2} = \frac{21}{2}\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{El ancho de la caja debe ser } 2\left(\frac{21}{2} + \frac{21}{2}\sqrt{3}\right) = 21(1 + \sqrt{3}) \cong 57,37 \text{ cm}$$

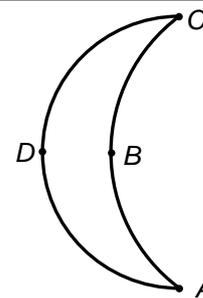


PRUEBA POR RELEVOS 3º y 4º de ESO (60 minutos)

2A.- Sea "T" la respuesta del problema 3A.

En la luna de la figura ADC es una semicircunferencia de radio T y ABC es un cuarto de circunferencia. ¿Cuál es el área de la luna?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

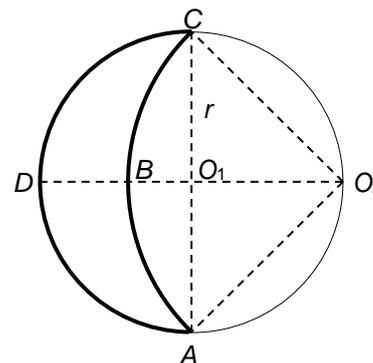


$T = 5 = r$. El triángulo ACO_2 es isósceles y rectángulo por lo que

$$CO_1 = O_1O_2 = r = 5 \quad CO_2 = 5\sqrt{2}$$

El área de la luna es la diferencia entre el área del semicírculo de centro O_1 y el área del segmento circular de centro O_2 .

$$S = \frac{1}{2}\pi \cdot 5^2 - \left(\frac{1}{4}\pi(5\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2}(5\sqrt{2})^2 \right) = \frac{25}{2}\pi - \frac{25}{2}\pi + 25 = 25$$



2B.- ¿Cuánto suman las cifras del número A?

$$A = 7665667^2 - 7665662^2$$

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

$$A = 7665667^2 - 7665662^2 = (7665667 - 7665662)(7665667 + 7665662) = 5 \cdot 15331329 = 76656645.$$

$$7 + 6 + 6 + 5 + 6 + 6 + 4 + 5 = 45.$$

2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C.

Calcula el área del cuadrilátero limitado por las gráficas de estas cuatro funciones

$$y = x - 7, \quad y = -x - 1, \quad y = T + 2(6 - x), \quad y = 2x - 4$$

Nota. Es aconsejable representar gráficamente las funciones.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

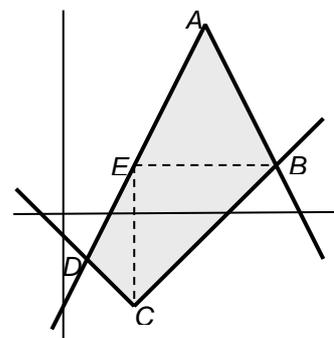
$$T = 8$$

Una vez representadas se determinan las coordenadas de los vértices del cuadrilátero. $A(6, 8)$; $B(9, 2)$; $C(3, -4)$; $D(1, -2)$.

Se divide el cuadrilátero en tres triángulos mediante los segmentos EB y EC

$$S = S_{CDE} + S_{ABE} + S_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 6 + 18 + 18 = 42$$

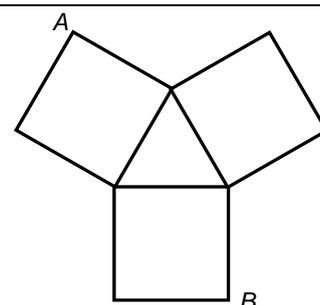
$$T = 42$$



PRUEBA POR RELEVOS Bachillerato (60 minutos)

3A.- Sea "T" la respuesta del problema 1A.

En la figura ves un triángulo equilátero de lado T con un cuadrado sobre cada uno de sus lados. Expresa la longitud del segmento AB en la forma $a + b\sqrt{c}$ con a, b, c enteros y c el menor posible. ¿Cuánto vale $\frac{a+b+c}{3}$?



(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

$T = 6 = AC = EC$. El segmento AB es paralelo a CD luego el triángulo EFG es semejante al CDE y por tanto equilátero. En el triángulo ACF el ángulo de vértice F es de 60° por lo tanto

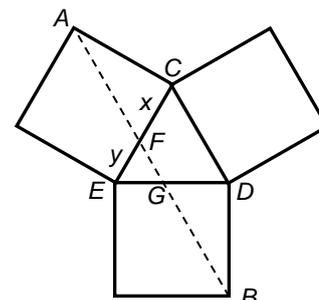
$$\operatorname{tg}60^\circ = \frac{AC}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \quad y$$

$$\operatorname{sen}60^\circ = \frac{AC}{AF} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{AF} \Rightarrow AF = \frac{6 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

$$y = FG = CE - x = 6 - 2\sqrt{3}$$

En conclusión $AB = 2 \cdot AF + FG = 8\sqrt{3} + 6 - 2\sqrt{3} = 6 + 6\sqrt{3}$

$$a = 6, b = 6, c = 3. \text{ Por lo tanto } \frac{a+b+c}{3} = \frac{6+6+3}{3} = 5$$



3B.- Sea "T" la respuesta del problema 1B

Cuando todos partieron por la mañana al gran picnic anual, cada minibús llevaba exactamente el mismo número de personas. A mitad de camino se rompieron $T - 52$ minibuses, de modo que cada minibús debió llevar una persona más. Cuando volvían a casa se estropearon $T - 47$ minibuses más, así que en el camino de regreso había en cada minibús 3 personas más que al salir por la mañana. ¿Cuántas personas asistieron al gran picnic anual?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

$$T = 62, T - 52 = 10, T - 47 = 15.$$

Si designamos con a al número de autobuses y con p al número de pasajeros en cada autobús, tenemos:

$$x \cdot y = (x - 10)(y + 1) = (x - 25)(y + 3) \Rightarrow xy = xy + x - 10y - 10 = xy + 3x - 25y - 75. \text{ Restando } xy \text{ se obtiene que } 0 = x - 10y - 10 = 3x - 25y - 75 \text{ Resolviendo el sistema se obtiene } x = 100, y = 9.$$

El número de personas es $100 \cdot 9 = 900$.

3C.- Empieza aquí

Un cuadrado y un octógono regular tienen la misma apotema. Si el perímetro del cuadrado es $4 + 4\sqrt{2}$, ¿cuál es el perímetro del octógono?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

$$x + 2y = 1 + \sqrt{2} \quad y^2 + y^2 = x^2 \Rightarrow x = y\sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}x \text{ Sustituyendo se}$$

obtiene:

$$x + \frac{2}{\sqrt{2}}x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x \left(1 + \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$x \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}{2 + \sqrt{2}} = 1$$

El perímetro es 8.

