Cuestiones básicas sobre Renta Fija

Alfonso Novales
Departamento de Economía Cuantitativa
Universidad Complutense

Septiembre 2014
Versión preliminar
No citar sin permiso del autor

Contents

1 Algunos conceptos básicos sobre renta fija

Un bono es una secuencia de flujos de caja de igual cuantía, un porcentaje$100c$ del nominal N, seguida de un último cash flow de cuantía $100(1+c)N$. La constante c es el cupón del bono, cuyo nominal se toma en unidades de 100. Si, por ejemplo, el nominal de un bono es de 100.000 euros, el precio del bono en cada instante, en base 100, por ejemplo 98,76, se multiplicaría por 1.000 para obtener su valor de mercado.

Con descuento de tipo discreto, el *valor presente* de un bono de nominal N es:

$$PV = \frac{N}{100} \sum_{i=1}^{n} C_{t_i} \frac{1}{(1+R_{t_i})^{t_i}}$$

donde n es el numero de pagos pendientes de realizarse, C_{t_i} la cuantia de los mismos, que será $100cN$ excepto a vencimiento, que será $100(1+c)N$. El valor presente de un bono se conoce como *Fair Value* del bono, que es un concepto teórico, mientras que el precio de mercado de dicho bono es el resultado de las interacciones de oferta y demanda. Los tipos de interés R_{t_i} a que se descuentan los flujos de caja con serán constantes, y su representación, en función de su vencimiento, se conoce como *estructura temnporal* de los tipos de interés.Los factores de descuento son los términos $\frac{1}{1+R_{t_i}}$. Podemos pensar en un tipo de interés constante que generase un valor presente igual al precio de mercado del bono:

$$P^M = \frac{N}{100} \sum_{i=1}^{n} C_{t_i} \frac{1}{(1+y)^{t_i}}$$

este tipo constante y se denomina *tasa interna de rentabilidad* (TIR) del bono. La TIR es la rentabilidad que obtendría el tenedor del bono si lo mantuviese hasta su vencimiento. El cupón apenas tiene efecto sobre la TIR del bono. Claramente, la TIR del bono está invrsamente relacionada con su precio. Cuando el precio del bono sube, la TIR disminuye. Por eso es que una elevación de los tipos de interés de mercado conduce a una caida en los precios de la renta fija.

Con descuento continuo, el valor presente y la TIR del bono vendrian definidos por:

$$
\begin{aligned}
PV &= \frac{N}{100}\sum_{i=1}^{n} C_{t_i}\exp\left(-r_{t_i}t_i\right) \\
P^M &= \frac{N}{100}\sum_{i=1}^{n} C_{t_i}\exp\left(-yt_i\right)
\end{aligned}
$$

Dadas las caracteristicas de un bono, es instructivo variar su TIR y representar la relación entre el precio del bono y la TIR. *Ejercicio: Dibuje las curvas Precio-TIR para a) un bono cupón 5%, vencimiento a 3 años, b) un bono cupón 10%, vencimiento a 3 años, c) un bono cupón 10%, vencimiento a 5 años, y observe:*

- un aumento en el cupón eleva el precio del bono, para cada TIR
- cuando la TIR es igual al cupón del bono, su precio es igual a 100
- un alargamiento del vencimiento aumenta la pendiente y la convexidad de la relación precio-TIR del bono.

Ejercicio: Considere dos bonos. El primero paga cupón anual del 5% y tiene un vencimiento de 3 años. El segundo bono paga cupón del 10% y tiene vencimienot 5 años. Los tipos de interés de mercado a 1, 2, 3, 4 y 5 años son: 4,0%, 4,25%, 4,50%, 4,25% 4,20%. Calcule el valor presente de cada bono y su TIR ¿Que efecto tiene el cupón sobre la TIR del bono?: *R: 101,42 y 125,59. TIRes: 4,48% y 4,22%.* El cupón tiene un efecto pequeño sobre la TIR, como puede comprobarse variando la TIR y repitiendo el ejercicio.

Ejercicio: Dibuje la curva precio-TIR de los siguientes bonos con cupones anuales: Bono 1, con cupon 5%, vencimiento 3 años, b) bono 2, cupón 10%, vencimiento 3 años, c) bono 3, con cupón 10%, vencimiento 5 años. Compruebe que: 1) un incremento en el cupon eleva le precio para cada TIR, 2) SI la yield es igual al cupón, el precio del bono es 100, 3) Un aumento en vencimiento aumenta la pendiente y la convexidad de la relación precio-TIR.

Un *bono cupón cero* tiene un único pago, a su vencimiento. Tales bonos se venden generalmente a descuento. Es decir, el comprador paga $N(1+R_T)^{-T} < N$, siendo T el tiempo a vencimiento y R_T el tipo cupón cero anual correspondiente a dicho vencimiento. En realidad, no existen tales tipos cupón cero, sino que se deducen de los precios de mercado observados para productos cupón cero, resolviendo la ecuación en R_T:

$$
\begin{aligned}
P^M &= N(1+R_T)^{-T} \\
P^M &= N(1+TR_T)
\end{aligned}
$$

según que el vencimiento sea superior a un año (arriba) o inferior a un año (abajo).

Como verá en el siguiente ejercicio:

- los bonos con cupón por encima de los tipos de mercado cotizan por encima de la par (100), y lo contrario sucede con los bonos con cupón por debajo de los tipos de mercado,
- el precio de un bono aumenta con el vencimiento si el cupón está por encima de los tipos de mercado, y lo contrario sucede si el cupón es inferior a los tipos de mercado,

Ejercicio: Considere tres conjuntos de bonos, cada uno de ellos con bonos de vencimientos desde 1 año a 20 años. Los cupones del primer conjunto de bonos son 0%, los del segundo son 5% y los del tercero son 10%. Los tipos de interés de mercado a vencimientos anuales desde 1 a 20 años son: 6,00%, 6,50%, 7,00%, 7,20%, 7,20%, 6,60%, 6,00%, 5,60%, 5,40%, 5,25%, 5,25%, 5,20%, 5,20%, 5,00%, 5,10%, 5,00%, 4,90%, 4,90%, 4,80%, 4,80%. Represente gráficamente los Precios Justos (Fair Value) de cada bono mediante una curva para cada clase, representando precio contra vencimiento. Haga lo mismo con las Yield (TIR).

1.1 Duración y convexidad

La *duración de Macaulay* de un bono es el promedio del valor presente de los distintos flujos, ponderados por vencimiento:

$$D_M = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i P_{t_i}}{P}$$

con:

$$P_{t_i} = \frac{C_{t_i}}{(1+y)^{t_i}} \text{ ó } P_{t_i} = C_{t_i} \exp\left(-y t_i\right)$$

siendo y la TIR del bono. Alternativamente, si se dispone de una curva cupón cero, se utilizarían los tipos apropiados para el descuento de los cash-flows en esta expresión, en vez de la TIR. Un bono cupón cero tiene duración de Macaulay igual a su vencimiento. Todo bono que paga cupón tienen una duración inferior a su vencimiento. La duración representa el tiempo medio sobre el que se reciben los flujos de caja. Si se desplaza a la baja la curva de rentabilidades (yield curve), la duración de Maculay es el punto "break-even" en que la renta que se pierde por reinversión de los cupones queda compensada exactamente por la ganancia en el valor del bono. [EIII.1.7], [EIII.1.8]

Bajo *descuento continuo* tenemos:

$$\frac{dP}{dy} = -\sum_{i=1}^{n} C_{t_i} t_i \exp\left(-y t_i\right) = -\sum_{i=1}^{n} P_{t_i} t_i$$

de modo que en este caso:

$$D_M \equiv duración\ de\ Macaulay = -\frac{1}{P}\frac{dP}{dy}$$

La Duración Modificada es, cambiada de signo, la aproximación de primer orden al porcentaje de variación en el precio por unidad de cambio en la TIR (yield). La duración modificada es, por tanto, una medida de riesgo. Bajo descuento discreto, es facil ver que en un bono con cupones anuales, la duración modificada es la duración de Macaulay dividida por $1 + y$:

$$D \equiv duración\ modificada = -\frac{1}{P}\frac{dP}{dy} = \frac{D_M}{1+y}$$

Puesto que en mercados se utiliza el descuento discreto es la duración modificada, y no la duración de Macaulay, la que se utiliza como aproximación a la variación porcentual en el precio del bono ante cambio de una unidad en la TIR.

La duración es la aproximación de primer orden al cambio porcentual en el precio del bono por cambio unitario en la TIR, pero ya hemos visto que la relación entre precio y TIR no es lineal, por lo que tiene sentido considerar la curvatura de dicha relacióna través del concepto de *Convexidad*:

$$Convexidad = \frac{1}{P}\frac{d^2P}{dy^2}$$

En el caso de un bono con cupón anual y vencimiento en un número entero T de años, tenemos:

$$\frac{d^2P}{dy^2} = \frac{2C_1}{(1+y)^3} + \frac{6C_2}{(1+y)^4} + \frac{12C_3}{(1+y)^5} + ... + \frac{T(T+1)C_T}{(1+y)^{T+2}}$$

Un bono cupón cero tiene convexidad: $T(T+1)(1+Y)^{-2}$.La convexidad es una variación de segundo orden: es, aproximadamente, la variación en la duración modificada ante cambios de una unidad en la TIR.

Cuando se disponde carteras de bonos, hay que tener en cuenta que la duración modificada no es aditiva para distintos bonos. Tiene interés considerar la duración en valor: $D^{\$} = \frac{dP}{dy}$ y la convexidad en valor: $C^{\$} = \frac{d^2P}{dy^2}$, que están medidas en la misma unidad y la misma divisa que el propio bono. La Value Duration es la Duracion modificada, multiplicada por el precio del bono, mientras que la Value Convexity es la Convexidad multiplicada por el precio del bono. Ambas se calculan como sus análogos habituales, pero sin dividir por le precio del bono o cartera. Estas medidas sí que son aditivas para posiciones en distintos bonos, sin más que tener en cuenta sus magnitudes y el signo de la posición. Sin embargo, los distintos bonos tendrán TIRes diferentes, por lo que la interpretación de la duración y convexidad en valor que resulten no es la misma que en el caso de un único bono. Deben interpretarse como la variación en el valor de la cartera ante un desplazamiento paralelo de la curva de TIRes, es decir, una variación igual en las TIRes a todos los vencimientos.

1.2 Aproximación en duración y convexidad al precio de un bono

La aproximación de segundo orden al precio de un bono es:

$$P(y) \simeq P(y_0) + \frac{dP}{dy} \mid_{y=y_0} (y - y_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2P}{dy^2} \mid_{y=y_0} (y - y_0)^2$$

denotando: $\Delta y = y - y_0$, y por: $\Delta P = P(y) - P(y_0)$, es decir, el cambio en el precio cuando la TIR pasa de y_0 a y, la aproximación de segundo orden puede escribirse:

$$\Delta P \simeq \frac{dP}{dy}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{d^2P}{dy^2}(\Delta y)^2 = -D^{\$}\Delta y + \frac{1}{2}C^{\$}(\Delta y)^2 \tag{1}$$

Nótese que al aplicar estas expresiones, si la TIR cambia, por ejemplo en un 1%, subiendo de 4,22% a 5,22%, entonces $\Delta y = 0,01$.

Supongamos que las TIRes de todos los bonos de una cartera cambian en la misma magnitud, Δy. Podemos agregar entonces las variaciones en los precios de los distintos bonos para obtener, para toda la cartera:

$$\Delta P_c \simeq -D_c^{\$}\Delta y + \frac{1}{2}C_c^{\$}(\Delta y)^2$$

Para un único bono, si dividimos (1) por P, tenemos una aproximación a la variación porcentual en el precio o rentabilidad:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{P}\frac{dP}{dy}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{1}{P}\frac{d^2P}{dy^2}(\Delta y)^2 = -Duración\ \mathrm{mod}ificada.(\Delta y) + (0,5)\,Convexidad\,(\Delta y)^2$$

La duracion y la convexidad entran en esta aproximación con signos opuestos. De modo que dados dos cash flows con la misma duración modificada, aquel que tenga mayor convexidad tendrá un valor menos sensible a cambios en los tipos de interés. Es decir, el valor del cash-flow disminuye menos si suben los tipos, y aumenta más si los tipos de interés descienden. Por tanto, conviene tener una posición con convexidad positiva y elevada.

Aunque la aproximacion que proporcionan la duracion y convexidad a fluctuaciones en el precio de un bono pueden ser buenas en algunos casos, no puede olvidarse que ambas estan diseñadas bajo el supuesto de que los cambios en la estructura temporal son paralelos, es decir, afectan a todos los plazos por igual. Cuando no es asi, puede ser preferible utilizar una técnica de factores de riesgo. En particular, utilizando componentes principales, del modo que luego veremos.

1.3 Inmunización

Si prevemos un desplazamiento paralelo en la curva de tipos y queremos que nuestra cartera no experimente variaciones en precio, deberemos configurar la cartera de modo que tenga duración cero y convexidad igual a cero.

Ejercicio (EIII.1.10)*:* Consideremos de nuevo los dos bonos de los ejemplos anteriores, y supongamos que hemos invertido 1,5 millones de euros en el primero y 1 millón de euros en el segundo. La Value Duration del primer bono es 416,41 euros, y la del segundo bono es igual a 514,00 euros. La Value Convexitiy del primero es 15.678.184 euros y la del segundo bono es 27.938.173 euros. Un cartera que está larga en una unidad en el primer bono y corta en una unidad del segundo tendría una Value Duration de -97,59 euros y una Value Convexity de -12.250.989. Supongamos que queremos inmunizar esta cartera utilizando dos bonos, B_1 y B_2. El primero tiene un principal de 1.000 euros, Fair Value de 1.200 euros, Value Duration igual a 5 y Convexity igual a 20.000. El bono B_2 tiene un principal de 10.000 euros, Fair Value de 10.780 euros, Value Duration igual a 2 y Convexity igual a 100.000. La inmunización se consigue comprando 32,05 unidades de B_1 y vendiendo -128,92 unidades de B_2. Si cotizasen en mercado de acuerdo con su Valor Present (Fair Value), lo que no tiene que suceder, habremos de invertir $(32,05).(1.200) = 38.459$ euros en el primer bono, y vender por un importe de $(128,92)(10.0780) = 1.389.755$ euros en el segundo bono.

2 Métodos de proyección de cash-flows

Una vez identificado un conjunto reducido de factores de riesgo, el siguiente paso es asociar los cash-flows de la cartera a los distintos factores de riesgo. Esto es más sencillo de hacer en carteras de renta fija, para las que generalmente se hará en relación con los vencimientos de los cash-flow de la cartera y de los distintos factores. Los factores son generalmente los tipos de interés de una estructura temporal de tipos cupón cero, que se denominan *vértices* de la proyección. Cuanto mayor sea el número de factores, más aproximada será la proyección de los cash-flows, pero por otra parte, se necesita que los vértices dispongan de suficiente liquidez, lo que generalmente conducirá a reducir su número. La idea es asociar cada cash-flow a los v értices más próximos, como veremos más abajo.

Hay varios procedimientos para efectuar esta proyección:

- El *principal mapping,* que asocia el riesgo de un bono con el vencimiento del principal, únicamente. Para aplicarlo, se calcula el vencimiento medio de los bonos de la cartera, y se toma el VaR del bono cupon cero que tenga dicho vencimiento. Es un método simple, pero ignora el pago de cupones, sobreestimando el riesgo de la cartera.

- El *mapeo por duración* asocia el riesgo al de un bono cupón cero con vencimiento igual a la duración del bono. Se sustituye la cartera de bonos por un único bono cupón cero, con vencimiento igual a la duración de la cartera. Dicha duración no será, generalmente, un número entero de años, por lo que habrá que calcular su VaR por interporlación de los VaR de los dos bonos cupón cero con vencimientos adyacentes a la duración de la cartera de bonos. Este VaR será generalmente inferior al anterior.

- En *el mapeo de cash-flows* se descompone el riesgo de los instrumentos de renta fija en el componente de riesgo asociado a cada uno de los cash-flows. Los cash-flows, en valor presente, descontados con el tipo de interés cupón cero apropiado, se agrupan en los vértices correspondientes de la estructura temporal, siempre que conozcamos la volatilidad de los tipos de interés a dichos vencimientos.Una vez calculado el valor presente del cash flow a un determinado vencimiento, se multiplica por el VaR de dicho vértice, que será $V_j = \Phi^{-1}_{1-p}\sigma_j$. Si los tipos cupón cero a los distintos vencimientos tiene correlación perfecta (lo que justificaría el uso de un solo factor, así como el uso de la duración Macaulay), el VaR de la cartera sería:

$$VaR = \sum_{i=1}^{N} |x_i| \, V_i$$

Cuando, como es habitual, las correlaciones no son perfectas, se premultiplica y postmultiplica dicha matriz por el vector de riesgos monetarios $x_j V_j$ de cada vértice. La raiz cuadrada de dicho producto es el VaR.

2.1 Proyección con valor presente y duración constantes

Comenzamos con tres procedimientos de proyección sencillos, que utilizan vértices adyacentes. Supongamos un cash flow en el período T, con un valor presente de 1 euro, donde $T_1 < T < T_2$, donde T_1 y T_2 son dos de los vértices previamente seleccionados. Denotemos por x_1 y x_2 los cash-flows que asociaremos a los vértices T_1 y T_2.Todos los cash-flows en este punto están en términos de valor presente.[1]

Aunque no es imprescindible que la suma del valor presente de las proyecciones coincida con el valor presente de la cantidad proyectada, es habitual imponer tal condición, que significa:

$$x_1 + x_2 = 1$$

La duración Macaulay del cash-flow original es T, mientras que la de la secuencia formada por las proyecciones es: $(x_1T_1 + x_2T_2)/(x_1 + x_2)$, por lo que la proyección mantendrá invariante la duración Macaulay si y solo si,

$$x_1T_1 + x_2T_2 = (x_1 + x_2)T$$

Las dos condiciones conducen en este caso a una única solución, mientras que por sí solas, cada una de ellas sería compatible con un continuo de proyecciones (si bien no con cualquier proyección) [ver EIII.5.1]

Ejercicio: La proyección de un cash-flow con vencimiento 1 año y 65 dias con valor presente de 1 millon de euros en vértices de 12 y 18 meses, que mantenga

[1] Alternativamente, con descuento continuo podriamos considerar que un cash flow de e^{rT} euros se está proyectando en $e^{r_1T_1}$ euros y $e^{r_2T_2}$ euros, respectivamente. Con descuento discreto, pensaríamos en proyectar $(1+R)^T$ en $(1+R_1)^{T_1}$ y $(1+R_2)^{T_2}$ euros.

invariante la duración y el valor presente es: 638.889 euros en 12 meses y 361.111 en el vértice de 18 meses.

2.2 Proyeción con invarianza del PV01

El modo de imponer esta condición depende de que trabajemos con descuento continuo o discreto. Un cash-flow con valor presente de 1 euro tiene un valor no descontado de e^{rT} euros, con un PV01 aproximado de T euros $\left(PV01(e^{rT}) = e^{rT}Te^{-rT} = T\right)$. Si se proyecta un cash-flow con valor presente de x euros en el vértice i, con vencimiento T_i, su valor no descontado será $xe^{r_iT_i}$ siendo r_i el tipo de interés cupón cero a dicho vencimiento, y su PV01 aproximado es x_iT_i (Recordemos que el PV01 se calcula utilizando cantidades en valor presente). Por tanto, bajo descuento continuo, la invarianza del PV01 requiere,

$$\sum_{i=1}^{n} x_iT_i = T$$

Con descuento discreto, un cash-flow en T con valor presente de 1 euro, tiene un valor no descontado de $(1+R_i)^{T_i}$, y un PV01 aproximado de $T(1+R)^{-1}$. En este caso, la invarianza de PV01 requiere:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_iT_i}{1+R_i} = \frac{T}{1+R}$$

Podemos ver que, bajo descuento continuo, una proyección que mantenga inalterados el valor presente y la duración, mantendrá asimismo invariante el PV01. Esto no sucede bajo descuento discreto.

Además de esto, otra ventaja del descuento continuo es que para mantener la invarianza del PV01 en la proyección, no necesitamos conocer los tipos cupón cero en los vértices, al contrario de lo que sucedería con descuento discreto.

2.3 Proyección con invarianza en volatilidad

Denotemos por $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ las volatilidades de las variaciones en los tipos de interés en los tres vencimientos T, T_1, T_2 y por ρ la correlación entre las variaciones en tipos de interés en los vértices. En ocasiones, se desconoce la volatilidad en T, y se aproxima mediante interpolación de las volatilidades en los dos vértices adyacentes.

Si queremos que la proyección mantenga invariante la volatilidad, tendremos que imponer:

$$x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_1\sigma_2\rho = \sigma^2$$

que no tiene una solución única, pero que puede combinarse con alguna de las condiciones que antes vimos para generar una única solución. En general, con más de dos vértices, la condición sería:

$$x'Vx = \sigma^2$$

donde V es la matriz de covarianzas de las variaciones en los tipos de interés en los vértices seleccionados.

Ejercicio: Considere las mismas condiciones del ejemplo anterior, con volatilidades de 75 pb. para las variaciones en el tipo a 12 meses, y de 90 pb. para las variaciones en el tipo a 18 meses, con correlación de 0,75 entre ambas variaciones. Hay otra solución con un cash-flow negativo. La proyeción que mantine invariante la volatilidad y el valor presente es de 321.564 euros en el tipo a 12 meses y 678.436 euros en el tipo a 18 meses. La proyeción que mantine invariante la volatilidad y la duración es de 683.944 euros en el tipo a 12 meses y 386.577 euros en el tipo a 18 meses. El valor presente de esta proyección es de 1.070.521 euros. Finalmente, la proyeción que mantiene invariante la volatilidad y el PV01 es de 893.542 euros en el tipo a 12 meses y 191.342 euros en el tipo a 18 meses. El valor presente de esta proyección es de 1.084.884 euros.

2.4 Proyección sobre varios vértices

Como hemos visto, si proyectamos sobre dos vértices, no podemos mantener invariantes simultáneamente muchas características del cash-flow original. Podemos conseguirlo si proyectamos sobre un conjunto suficientemente amplio de vértices.

[EIII.5.3] Calcule la proyección de un cash-flow a 1 año y 65 dias, con valor presente de 1 millon de euros, sobre vértices de 6, 12 y 18 meses, con las volatilidades y correlaciones que aparecen en la tabla.

Correlaciones	6 meses	12 meses	18 meses	Volatilidades (bp.)
6 meses	1			60
12 meses	0,8	1		75
18 meses	0,7	0,75	1	980

Solución: $(x_6, x_{12}, x_{18}) = (-227.054$ euros; $1.092.997$ euros; 134.057 euros$)$, estando estas cantidades en valor presente.

3 Futuros y Forwards

3.1 Características de los contratos de Futuro y Forward

Los contratos de futuros y los forward pueden negociarse con anterioridad al vencimiento, igual que se negocia cualquier otro activo, a un precio que va fluctuando en el tiempo. La diferencia entre el precio del contado y el precio del contrato de futuro o del forward se conoce como la *base* (*basis*). Antes de vencimiento, la base del contrato será no nula, pero a su vencimiento será cero, ya que el precio del futuro converge hacia el precio del contado al acercarse la fecha de vencimiento.

Casi todos los contratos de futuro se cancelan antes de vencimiento. Si se mantienen abiertos hasta su vencimiento, pueden liquidarse mediante pago monetario o por entrega del subyacente. La mayoría de los contratos se liquidan abonando una de las partes la diferencia en valoración. Los contratos sobre commodities o sobre emisiones son una excepción. Cuando el futuro es sobre un bono, una acción o un índice de renta variable, el precio de liquidación es el precio del bono nocional, la acción o el índice. Pero para futuros sobre tipos de interés o sobre commodities, el cálculo del precio de liquidación es bastante más complejo. Otros futuros se liquidan mediante entrega física como los ocntratos sobre metales o sobre energia. Los commodities blandos (leche, mantequilla, zumo de naranja, etc.) suelen liquidarse monetariamente aunque en algunos mercados se admite la entrega de la mercancía. En caso de liquidación por entrega, el contrato especifica la calidad del bien a entregar, asi como los lugares de entrega.

3.1.1 Futuros sobre tipos de interés y swap

Un futuro sobre tipos de interés es la versión, en mercado oficial, de un FRA. Hay, sin embargo, dos diferencias: a) un contrato de futuro tiene una fecha de vencimiento específica (por ejemplo, el tercer viernes de los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre), mientras que un FRA tienen un *horizonte* especificado. Por ejemplo, podemos comprar en cualquier momento un FRA sobe el tipo a 3 meses del Tesoro EEUU con vencimiento en 6 meses, b) el precio de los futuros sobre tipos de interés a 3 meses se da como 100 menos el tipo LIBOR a 3 meses, mientras que el precio del FRA se da simplemente en términos del tipo de interés forward actual.

Uno de los futuros sobre tipos de interés más líquidos es el Futuro sobre Eurodolar, que son futuros sobre tipos de interés EEUU negociado en la plataforma electrónica del International Money Market (IMM) del Chicago Mercantile Exchange (CME). El contrato se basa en un principal de 1 millón de US$ invertidos en el tipo a 3 meses del Treasury bill (Letra del Tesoro EEUU). El tick (incremento) estándar del Eurodolar es de 1 punto básico. En consecuencia, el *valor del punto básico*, o valor en US$ de un tick, es:

$$(\$1.000.000)(0,0001)\frac{90}{360} = \$25$$

El Eurodolar se cancela en *cash* (monetariamente). Si compro el contrato en 98 y cierro mi posición cuando el precio es 99, el mercado me pagará $2.500 .

EL CME tiene también contratos en el tipo a 1 mes LIBOR en $US, con un principal de 3 millón de $US. LIBOR denota London Interbank Offer Rate **COMPLETAR**. El tick es 1 pb., y el valor del pb. es:

$$(\$3.000.000)(0,0001)\frac{30}{360} = \$25$$

Mientras que los Futuros sobre Eurodolar y los Futuros LIBOR están diseñados para cubrir posiciones *cash* en mercados de tipos de interés, los Futuros de CME sobre tipos swap se usan para cubrir tipos de interés con vencimientos largos. Los contratos son sobre tipos swap de EEUU a 2 años, 5 años y 10 años y el tamaño de cada contrato equivale a un valor de 1 punto básico de \$100. Por ejemplo, el Futuro sobre el tipo a 5 años US swap tiene un nominal de \$200.000 ya que:

$$(\$200.000)\,(0,0001)5 = \$100$$

Por igual razón, el contrato a 2 años tiene un nominal de \$500.000 y el contrato a 10 años un nominal de \$100.000. CME negocia también contratos en otras divisas (por ejemplo, Euroyen).

El CBOT tiene contratos de Futuro sobre un swap nocional a 5, 10 y 30 años que paga semestralmente un tipo fijo anual del 6% a cambio de un tipo flotante basado en el tipo LIBOR a 3 meses. El CBOT tienen asimismo contratos de Futuro sobre el tipo de interés Fed Funds a 30 días. En Europa, el contrato equivalente es el Futuro en Euribor, negociado en el mercado Eurex. Tienen un nominal de 1 millón de euros sobre el tipo a 3 meses del European Interbank Offered Rate, convencimienos trimestrales fijos. El precio se da en porcentaje, con tres decimales, como 100 menos el tipo de interés negociado. La variación minima en el precio es de 0,005%, equivalente a un valor de 1 pb. de 12,50 euros. El precio de liquidación final se basa en el promedio de los precios proporcionados por varios bancos sobre el tipo Euribor a 3 meses.

3.1.2 Futuros sobre bonos

Apenas existen Futuros sobre bonos inidividuales. Los futuros sobre bonos se emiten con un *bono nocional* como subyacente, con vencimiento y cupon fijos. Por ejemplo, en el CBOT se negocian en ciclos trimestrales contratos de futuros sobre bono nocional del US Treasury a vencimientos de 2, 5 y 10 años, asi como sobre un bono nocional a largo plazo, con 30 años de vencimiento. Se denomina *open interest* el número de contratos aún en vigor al final de cada día. El número medio de días que un contrato se mantiene en negociación se obtiene dividendo el *open interest* por el número de contratos negociados cada día. En el caso del mercado estadounidense, es un número reducido de días. Como cualquier otro contrato de futuro, habitualmente las posiciones en futuros sobre bonos se cierran y se liquidan intercambiando una cantidad monetaria antes de su vencimiento. El valor del punto en los futuros sobre bonos en EEUU es de \$US 1.000, por lo que cada cada subida de un punto en el precio (de 100 a 101, por ejemplo) hace que los tenedores de dichos contratos reciban \$1.000 de la cámara de compensación. Por otra parte, si el contrato se mantiene hasta vencimiento, la contraparte que está corta en el futuro entregará, en el plazo de un mes tras vencimiento, uno o más bonos de una cesta de bonos previamente definida, en el momento de emitir el contrato de futuros. Los bonos que componen la cesta de *entregables* varía cada mes porque dichos bonos tienen vencimientos fijos.

Cada bono en la cesta tiene un *factor de conversión* que sirve para determinar su valor, en relación con el bono nocional. Las Cámaras de Compensación publican y actualizan las listas de bonos entregables para cada contrato de futuro sobre bono nocional. El factor de conversión es el precio que se obtiene para el bono entregable con la TIR (yield) del bono nocional, dividido por 100. El precio de entrega es igual al precio del futuro multiplicado por el factor de conversión, más el cupón corrido (*accrued interest*). Este producto permite tener en cuenta la diferencia entre el cupón del contrato nocional y el cupón del bono entregable. Por ejemplo, si el contrato de futuros sobre el bono a 10 años del US Treasury tuviese una yield nocional de 6% y ese fuese también el cupón del bono entregable, entonces el factor de conversión sería igual a 1.

Ejemplo: ¿Cual es el factor de conversión frente al contrato de futuro sobre el bono a 10 años del US Treasury con TIR del 6%, de un bono con cupón 5%, con pago semestral, que tiene vencimiento de 7 años exactos el primer dia de negociación del mes de entrega? Si el bono tiene en ese momento 90 días de cupón corrido, y el precio de mercado del futuro sobre el bono a 10 años del US Treasury es 105, calcule el precio de entrega del bono.

Con una TIR de 6%, el precio del bono es 94,35. Por tanto, el factor de conversión es 0,9435. El precio de entrega, basado en un precio de mercado de 105 y 90 días de cupón corrido, será:

$$P(0,05;7) = 105(0,9435) + \frac{90}{182}(2,5) = 100,31$$

Entre los bonos entrebables para un detemrinado futuro, existe cada dia un bono que es el mas barato de entregar (chepaest-to-delivery), y el precio del futuro se ajustará a este precio. Por tanto, antes de calcular le precio de un futuro, hemos de encontrar cual es el bono más barato de entregar. Si dicho bono tiene un factor de conversión de 0,92 y precio 98, sin cupón corrido, entonces el precio del contrato de futuro será: 98/0,92=106,52.

Lógicamente, cual sea el bono mas barato de entrega dependerá de las TIRes de los bonos en la cesta de entregables, y prever el precio del futuro equivale a prever la evolución futura de dichas TIRes. Habitualmente, la cesta de entregables se configura con bonos que tienen unas TIRes similares.

3.1.3 Forwards y Futuros sobre divisas

El comprador de un Forex Forward recibe a vencimiento la divisa al precio establecido en la comprad el Forward, mientras que el vendedor proporciona dicha divisa al precio establecido en el momento de venta del contrato Forward. Los contratos de futuros sobre divisa son menos liquidos que los Forward, que se negocian OTC (over the counter), es decir, sin cámara de compensación. En consecuencia, son mñas flexibles qeu los futuros sobre divisas, que tienen un tamaño nocional fijo, son contra el dolar y se emiten a unos pocos vencimientos. Por contra, los forex forward constituyen uno de los mercados más liquidos, especialmente a plazos de hasta un año. Según el BIS Quarterly Review de septiembre 2007, a finales de 2006 habia un nominal nocional de casi 20 mil millones de $US en Forwards y swaps de divisas abiertos, con un valor de mercado aproximado de unos 467 mil millones de $US. Para las principales divisas los contratos suelen ser de 1 millon de $US y el spread bid-ask es muy reducido: un spread tipico a 3 meses para el $US/libra es de 2,0002-2,0004, mucho menor que el rango de no arbitraje, de modo que el riesgo de base en estos derivados es casi despreciable.

3.1.4 Futuros sobre energía y sobre commodities

Los futuros sobr energia y commodities se negocian activamente en distintos mercados: CME, NYMEX, the US Commodities Exchange, the International Petroleum Exchange (IPE). Para commodities agrícolas, el NYSE Intercontinental Exchange (ICE), CBOT y NYSE Euronext. Los mercados OTC en forwards sobre commodities tambien son bastante líquidos. Los traders utilizan estos contratos ya sea para cobertura o por especulación.

La mayor liquidez se centra en el contrato mas proximo a vencimiento (*prompt futures/near to expiry*). Por tanto, cuando se usan para cubriri el precio spot a largo plazo, se organiza la exposición a *prompt futures* a lo largo del tiempo y segun van venciendo los contratos, se cambian por el siguiente más proximo a vencimiento, lo que se conoce como *rolling the hedge*. EL coste de transacción es minimo, pero hay un riesgo de base en esta operación, porque el precio del nuevo futuro puede ser diferente del precio del que acaba de vencer.

El contrato se puede liquidar en cash, pago monetario o por entrega del subyacente al precio acordado. Si se hace en cash, se intercambia la diferencia entre el precio acordado y el precio de liquidacion, qeue s habitualmente un promedio de precios spot durante unperiodo previo a vencimiento (segun un esquema acordado en el contrato). Cuando se liquida mediante entrega se hace segun la calidad y los lugares de entrega descritos en el contrato.

La *convenience yield* es una medida del beneficio que proprciona disponer del bien. Es bastante incierta, dificil de cuantificar, y generalmente con características estacionales. Junto con el carry-cost (coste de entrega) son las fuentes de incertidumbre principales al fijar el precio de estos contratos. Es conveniente utilizar los precios de futuros a vencimiento constante como factores de riesgo para estos contratos (Case Study III.2.6.3). Los futuros a vencimienot constante no se negocian pero peuden obtenerse mediante interpolacion, para concatenar los precios de contratos con vencimientos adyacentes. Por ejemplo, si el prompt futuro tiene vencimiento $T_1 < 1$ mes con precio P_1 y el siguiente contrato vence en $T_2 > 1$ mes con precio P_2, el precio concatenado del futuro con vencimiento a 1 mes es:

$$P = \frac{(T_2 - \frac{1}{12})P_1 + (\frac{1}{12} - T_1)P_1}{T_2 - T_1}$$

Estos precios concatenados pueden utilizarse para caracterizar las propiedades de un determinado mercado, y ver la influencia de postenciales factores de riesgo, como la climatología, el desajuste de oferta y demanda, etc.. Los precios pueden verse afectados asimismo por el comportamiento especulativo de los traders, que pueden llegar a inducir tendencias no justificadas por la evolución de la oferta y demanda del commodity subyacente. [ver gráficos de 3 mercados de futuros sobre energia y 3 mercados de futuros sobre commodities]

3.1.5 Futuros sobre acciones e índices y Exchange Traded Funds (ETFs)

Los contratos sobre indices se negocian en muchos mercados y son liquidos, especialmente los del S&P500 y FTSE100, a diferencia de los futuros sobre acciones, que tienen poco volumen. Todos ellos se negocian en cash. Los futuros sobre indices vencen el tercer viernes de cada mes, coincidiendo con el vencimiento de las opciones sobre índices. La liquidación encash del S&P500 es de $250 por punto, mientas qeu la del FTSE100 es de 10 libras por punto. Si compro un futuro sobre FTSE100 a 6000, el valor de mi posición es de 60.000 libras y si el precio del futuro es 6500 cuando cierre mi posición, habré hecho un beneficio de 5.000 libras.

Una diferencia importante entre acciones e indices es que los indices no pueden venderse en corto, pues habria que vender cada accion con sus ponderaciones y reequilibrar la posición continuamente. Por tanto, el rango de no arbitraje puede ser muy amplio por su parte baja, ya que el precio de contado puede situarse muy por encima del precio del futuro.

3.2 Relaciones teóricas entre Contado, Futuros y Forwards

Se presentan las propiedades en términos de descuento continuo y Forward, en vez de descuento discreto y Futuros, aunque pueden trasladarse de unos a otros.

3.2.1 Precios de no arbitraje

La ley de un precio especifica que si el mismo bien negocia en dos mercados, le preico debe ser el mismo. Si no fues así, podriamos hacer un beneficio sin riesgo, comprando en le mercado donde el precio es inferior, y vendiendo en el otro mercado. Por supuesto determinadas fricciones,como costes de transporte, impuesto, comisiones, etc., pueden generar una determinada brecha entre precios. El principio de ausencia de arbitraje es, precisamente, que no puede hacerse beneficio sin asumir riesgo alguno. Mas generalmente, si dos inversiones presentan le mismo perfil de riesgo, deben tener la misma rentabilidad.

Denotamos por T el vencimiento del contrato forward, cuyo precio es fijo cuando se compra en $t < T$. Sea $S(t)$ el precio del contado en dicho momento, y denotemos por $F(t, T)$ el precio que se acuerda en t para la entrega del subyacente en T. Por tanto, $S(T) = F(T, T)$. Hay dos modos de tener el activo subyacente en T : a) pedir prestado $S(t)$ y comprarlo ahora, en t, b) comprar el Forward al precio acordado ahora, en t, $F(t, T)$. Suponemos que no existen costes de transacción ni cash-flows como dividendos o cupones. Suponemos asimismo que en el instante t podemos prestar y pedir prestado al tipo continuo cupon cero libre de riesgo $r(t, T)$, por un plazo $T - t$.

El valor de la estrategia a) es:

$$S(T) - S(t) \exp\left[r(t, T)(T - t)\right]$$

La estrategia b) nos daría en T un contrato que tendría valor $S(T)$ por el que habríamos pagado $F(t,T)$, de modo que el valor de la estrategia es:

$$S(T) - F(t,T)$$

La ausencia de arbitraje implica la igualdad de ambas expresiones, por lo que el valor justo (Fair value) o teórico del Forward sería:

$$F^*(t,T) = S(t)\exp\left[r(t,T)(T-t)\right]$$

por o que el fair value de una posición larga forward equivale a una posición en el contado junto con una posición larga en un bono cupón cero con vencimiento igual al tiempo a vencimiento del Forward.

Si existen dividendos o cupones, la estrategia a) genera ingresos adicionales, que hay que tener en cuenta. Supongamos que el subyacente es una acción con pagos por dividendo, aunque el mismo argumento podría aplicarse a un bono con cupón fijo. La rentabilidad por dividendo anual es el valor presente de los dividendos anuales, dividido por el precio de la acción. Si se reinvierten, el valor presente debería incluir la renta obtenida por reinversión. La rentabilidad continua acumulada $y(t,T)$ entre el período t y el período T se define:

$$y(t,T) = \frac{C(t,T)}{S(t)(T-t)}$$

donde $C(t,T)$ es el valor presente en t de los dividendos obtenidos entre t y T, incluida cualquier renta obtenida por reinversión.

En presencia de dividendos, el valor de la estrategia a) sería:

$$S(T) - S(t)\exp\left[r(t,T) - y(t,T)\right](T-t)]$$

por lo que el Fair Value es:

$$F^*(t,T) = S(t)\exp\left[r(t,T) - y(t,T)\right](T-t)]$$

Ejercicio [EIII.2.2] *Consideremos una acción con pago trimestral por dividendos. Mantenemos la acción por 6 meses. Su preico actual es 100 euros y recibimos 2 euros por acción dentro de 1 mes, y de nuevo dentro de 4 meses. Suponiendo que los dividendos no se reinvierten, que le tipo cupón cero a 1 mes es 4,75% y el tipo a 4 meses es 5%, calcule: a) el valor presente de los dividendos acumulados continuamente, b) la rentabilidad por dividendoe sobre un período de 6 meses. R: a) 3.959 euros; b) 7,92%.*

Ejercicio [EIII.2.3] *El FTSE 100 cerró el 19/12/2005 en 5531,63. La rentabilidad continua por dividendo a 3 meses sobre el índice fue de 3,14% y el tipo continuo cupón cero a 3 meses era de 4,57%. Suponiendo que los Futuros pueden comprarse con un margen nulo ¿cuál habria sido el Fair Price del Futuro sobre el FTSE100 con vencimiento en 17 de marzo de 2006? R: 5.551,44.*

3.2.2 Riesgo por Dividendo y Riesgo de Tipo de Interés

El riesgo por dividendo es el que surge por la incertidumbre acerca del pago de dividendos de la acción o el índice entre el momento actual y el vencimiento del contrato. Si, antes del vencimiento, un dividendo no se ajusta a la rentabilidad por dividendo prevista, el precio del índice o de la acción y el precio del futuro se verán afectados. Supongamos que se ha comprado un contrato de futuro a 3 meses sobre una acción cuyo Fair Value estaba calculado bajo un determinado supuesto acerca del dividendo a recibir dentro de 1 mes y que, llegado ese momento, se anuncia que dicho dividendo no será distribuido. Es previsible que el efecto sobre el precio del subyacente sea mayor, al no haberse percibido dicho dividendo.

Los contratos de futuro tienen asimismo un riesgo de financiación, que surge por la incertidumbre acerca de los costes del préstamo (o del coste de oportunidad) necesario para comprar el contrato. La incertidumbre acerca de los tipos cupón cero entre el moomento dlea compra y el vencimienot dle contrato es la causa de este riesgo de tipos de interés.

La exposición al riesgo de un futuro sobre accion o sobre indice puede descomponerse en exposición a tres factores: el subyacente, la rentabilidad por dividendo, y los tipos cupón cero. Tomando logaritmos en la expresión anterior:

$$\ln F^*(t,T) - \ln S(t) = [r(t,T) - y(t,T)](T-t)$$

Las rentabilidades a un periodo del contado y del futuro son:

$$\begin{aligned} r_S(t) &= \ln S(t) - \ln S(t-1) \\ r_{F^*}(t) &= \ln F^*(t,T) - \ln F^*(t-1,T) \end{aligned}$$

Suponiendo que no hay variaciones en los tipos de interés o la rentabilidad por dividendo entre $t-1$ y t, y que el Forward y el Futuro tienen el mismo precio, obtenemos una expresión aproximada para la rentabilidad teórica del contrato de futuro:

$$r_{F^*}(t) \approx r_S(t) - r(t,T) + y(t,T)$$

como función de la rentabilidad del contado, del coste de financiación y de la rentabilidad por dividendo.

La exposición en una cantidad N a un Futuro equivale a:

- una exposición al contado en cuantía N
- una exposición $-N$ al tipo cupón cero a plazo $T-t$, con una sensitividad nominal:

$$PV01_r(t,T) = -N\delta01_r(t,T) \approx -N(T-t)\exp[-r(t,T)(T-t)]10^{-4}$$

- una exposición N a la rentabilidad por dividendo a plazo $T-t$, con una sensitividad nominal:

$$PV01_y(t,T) = -N\delta01_y(t,T) \approx -N(T-t)\exp[-y(t,T)(T-t)]10^{-4}$$

donde hemos utilizado las expresiones aproximadas que ya conocemos para $PV01$.

Ejercicio: Continuando con el ejemplo anterior, supongamos que invertimos 5 millones de libras en el Futuro a 3 meses sobre FTSE100. Suponiendo que los Futuros pueden comprarse con un margen nulo y que el Futuro está valorado a Fair Value, determine la sensibilidad de la posición al FTSE100, la rentabilidad por dividendo a 3 meses y le tipo cupon cero a 3 meses. R: 5.000.000 libras; -126,4 libras; 126,0 libras.

Como se ve, el riesgo de tipos de interés es despreciable en comparación con el riesgo de mercado de accciones.

3.2.3 Forwards de divisas y diferencial de tipos de interés

Consideremos una inversión en una posición forward $S_f(t)$ en activos en una divisa común, distinta de la nuestra. En un instante futuro T necesitaremos adquirir $S_f(t)$ unidades de dicha divisa y vender $S_d(t)$ unidades de la divisa doméstica. El Fair Value del contrato Forward en la divisa es:

$$F_f(t,T) = S_f(t)\exp\left[r_f(t,T)(T-t)\right]$$

mientras que el Fair Value del contrato doméstico es:

$$F_d(t,T) = S_d(t)\exp\left[r_d(t,T)(T-t)\right]$$

El tipo de cambio de contado es el precio de contado de la divisa extranjera dividido por el precio de contado de nuestra divisa:

$$S(t) = S_f(t)/S_d(t)$$

por lo que podemos obtener el Fair Value del contrato Forward sobre el tipo de cambio dividiendo las dos expresiones anteriores, para obtener:

$$F^*(t,T) = S(t)\exp\left[r_d(t,T) - r_f(t,T)\right].(T-t)$$

y utilizando un argumento similar al de la sección anterior:

$$r_{F^*}(t) \approx r_S(t) + r_f(t,T) - r_d(t,T)$$

por lo que la diferencia entre las rentabilidades del tipo de cambio forward y al contado es aproximadamente igual al diferencial de intereses, compuesto de modo continuo.

En consecuencia, la exposición en una cantidad N a un Forward de tipo de cambio equivale a:

- una exposición al tipo de cambio de contado en cuantía N
- una exposición $-N$ al tipo cupón cero doméstico a plazo $T-t$, con una sensitividad nominal:

$$PV01_d(t,T) = -N.\delta 01_d(t,T) \approx -N.(T-t)\exp[-r_d(t,T)(T-t)]10^{-4}$$

- una exposición N al tipo cupón cero extranjero a plazo $T-t$, con una sensitividad nominal:

$$PV01_f(t,T) = -N.\delta 01_f(t,T) \approx -N.(T-t)\exp[-r_f(t,T)(T-t)]10^{-4}$$

donde hemos utilizado las expresiones aproximadas que ya conocemos para $PV01$.

Ejercicio: Un banco español toma una posición por 30 millones de euros en un contrato Forward a 6 meses sobre el tipo de cambio euro/$US . Los tipos cupón cero continuos a 6 meses en EEUU y la eurozona son 5,5% y 4,5%, respectivamente. Calcule la sensibilidad de la posición al tipo de cambio de contado, y a los tipos cupón cero a 6 meses en EEUU y la eurozona. R : 30 millones de euros; 1.534 euros; -1.542 euros.

Como se ve, el riesgo de tipos de interés es despreciable en comparación con el riesgo divisa.

3.2.4 Bono entregable

En Futuros sobre un bono nocional, se especifica una cesta de bonos entregables, cada uno de ellos con un factor de conversión, cualquiera de los cuales sería admisible al vencimiento del Futuro. Logicamente, se entregará aquel bono que resulte más barato en dicho momento. Cada uno de estos bonos tendrá un rentabilidad por cupón $y_i(t,T), i = 1,2,...,n$. Denotemos por $C(t,T)$ el valor presente en t de la renta por cupones recibidos entre t y el vencimiento del Forward, incluyendo el cupón corrido, y habiendo reinvertido dichos pagos al tipo cupón cero. Para cada uno de estos bonos tendremos un Fair Value:

$$F_i^*(t,T) = S_i(t)\exp\left[r(t,T) - y_i(t,T)\right].(T-t)]$$

siendo $S_i(t)$ el precio actual de cada uno de los bonos en la cesta de entregables.

Denotemos por CF_i el factor de conversión de cada bono y supongamos que no hay incertidumbre acerca de la TIR del bono nocional en la fecha de entrega, ni tampoco acerca de la fecha de entrega (en lugar de ser cualquier dia en el plazo de un mes tras el vencimiento del Forward). El bono má barato (*cheapest-to-delivery*) será aquel con un menor valor del producto: $CF_i.F_i^*(t,T)$.El Fair Value del cheapest-to-delivery será también el Fair Value de todos los bonos en la cesta de entregables.

3.2.5 Forwards sobre commodities, Carry-costs y Convenience yield

En el caso de Futuros sobre commodities, tendriamos que considerar algunos costes adicionales en la estrategia a) que analizamos al calcular el Fair Value de un contrato. Por ejemplo, los *Carry Costs*, que incluyen los costes de transporte, seguro y almacenamiento del bien físico. Pero también hay algunos beneficios asociados a tener el bien en nuestro poder. El oro es un commodity que se compra por motivo de inversión, fundamentalmente, pero hay otros commodities, como los agrícolas, que será interesente tener en nuestro poder, especialmente en tiempos de escasez. Tal bneficio se conoce como *Convenience Yield*. El Convenience Yield suele fluctuar con las estaciones. Por ejemplo, disponder de enertgia almacenada durante los meses centrales del invierno o del verano puede proporcionar un convenience yield elevado, siendo menos importante en otros meses. El *Net Convenience Yield* es la diferencia entre *Convenience Yield* y *Carry Costs*, y es generalmente negativo.

Siguiendo un argumento al que hicimos antes, igualando el valor de las estrategias a) y b), llegariamos a:

$$F_i^*(t,T) = S_i(t) \exp\left[r(t,T) - y_i(t,T)\right].(T-t)]$$

siendo $S(t)$ el precio de contado del commodity, $F_i^*(t,T)$ el Fair Value en t del contrato Forward para entrega en T, $r(t,T)$ el tipo continuo libre de riesgo a plazo $T-t$, e $y(t,T)$ el valor presente del Net Convenience Yield asociado a mantener el commodity entre t y T.

Aunque la expresión anterior es similar a la de otros contratos de Futuro, existen dos diferencias:

1. la natural simetría propia de la inversión en activos finacnieros, deja de existir en el caso de muchos commodities. Mientras que podemos diseñar las estrategias a) y b) en términos de posiciones largas o cortas en el caso de activos financieros, en el caso de commodities no podemos ir cortos. esto hace que el precio de mercado de un futuro sobre commodities pueda caer muy por debajo de su Fair Value,

2. exiten muchas más fuentes d eincertidumbre acerca de los Carry Costs y la Convenience Yield que acerca de la rentabilidad por dividendo o de los tipos cupón cero. Los costes de almacenamiento pueden flucturar mucho, asi como los Carry Costs, en mercados como la energía. En estos mercados, es frecuente que se produzcan desequilibrios entre oferta y demanda. Los contratos vencen cada mes y las compañias espewranq ue se entregue el bien fisicamente. Si hay algun excedente, se almacena, si es posible. Si se produce un pico de demanda inesperado, por bajas temperaturas, por ejemplo, el precio de contado sufrirá una fuerte elevación, mientras que el precio del futuro se ve menos afectado. Si el exceso de demanda es muy fuerte, incluso el precio del futuro más próximo a vencimiento puede aumnetar significativamente. Si, por le contrario, la demanda es baja y la capacidad de almacenamiento está practicamente saturada, entonces el precio de contado puede caer por debajo del precio del futuro.

3.2.6 Fair Values del contado y del Futuro

La estrategia b) no considera ningun desembolso en el momento de compra del contrato. Sin embargo, en el caso de los Futuros, hay que entregar un porcentaje del precio, conocido como *margen*, que se va ajustando según fluctue el preico del contado. Estos ajustes en margen llevan consigo un coste financiero (real o de oportunidad) que hemos de considerar.

Puede probarse que el precio de un Futuro es igual al precio teórico del Forward similar si la curva cupón cero es plana y no varia en el tiempo. En otros caso, la diferencia entre el Fair Value de ambos contratos dependerá de la correlación entre variaciones en los tipos cupón cero y la rentabilidad del activo subyacente. Si dicha correlación es positiva, el preciod el Futuro tenderá a ser superior al del Forward equivalente, sucediendo lo contrario cuando la correlación es negativa. Dichas diferencias pueden ser notables si el vencimiento del contrario no es muy reducido.

Otra consideración tiene que ver con la liquidez de los Futuros y los Forward, que es muy superior a la del mercado del contado. Por tanto, el *price discovery* (formación de precios) se produce en los mercados derivados, y es quiza mas razonable pensar en determinar el Fair Value del contado en función del precio observado del Forward o del Futuro, que viceversa. EL Fair Value del contado sería:

$$S^*(t) = F(t,T) \exp\left[y(t,T) - r(t,T)\right].(T-t)$$

Por ejemplo, en el caso del tipo de cambio:

$$S^*(t) = F(t,T) \exp\left[r_f(t,T) - r_d(t,T)\right].(T-t)$$

3.3 La base

La *base* es la diferencia entre los precios de mercado del contado y del futuro:

$$B(t,T) = S(t) - F(t,T)$$

El *riesgo de base* recoge nuestra incertidumbre acerca de la evolución temporal de esta magnitud. Más adelante veremos la relación que existe entre la base y la correlación entre los precios del contado y del Futuro. Los cambios en la base pueden descomponrse en tres componentes: un efecto vencimiento, que es puramente determinista, cambios en el Fair Value de la base, y cambios debidos a fluctuaciones en el precio del Futuro alrededor de su Fair Value.

3.3.1 Mispricing y Rango de ausencia de arbitraje

En mercados liquidos, y en ausencia de costes de transacción, el precio de mercado de un Forward debería ser igual a su Fair Value. Sin embargo, esto no sucede por la existencia de costes de transacción del contado y del futuro. Si denotamos por $x(t)$ la diferencia entre el precio de mercado y el Fair Value, como proporción del contado, entonces el precio de mercado del Forward con vencimiento en T puede escribirse:

$$F(t,T) = F^*(t,T) + x(t,T)S(t) \tag{2}$$

El término $x(t)$ se conoce como *mispricing* del Futuro aunque, por las razones ya comentadas, debería mas bien pensarse en que se trata de un mispricing del contado respecto del Futuro o del Forward. Para hacer un beneficio con una estrategia basada en el mispricing, éste debe ser superior a los costes de transacción.

Debido a la incertidumbre existente acerca del Net Convenience Yield en el caso de commodities, de la cuantía y momento de pago de dividendos en el caso de acciones, y del tipo de interés libre de riesgo durante la vida del contrato, existe todo un rango de precios de no arbitraje, y no solamente uno de tales precios. En ocasiones, el mispricing es aparentemente muy elevado, pero conviene tener en cuenta que debe calcularse con precios tomados en el mismo instante de tiempo; como los mercados de futuros y contado suelen tener distintos horarios, esto no es siempre posible. Además, debe recordarse que el Fair Value del Futuro se basa en el supuesto de ausencia de Margen de garantías, lo que no es cierto.

Suponiendo que es posible hacer arbitraje en amba direcciones (compra y venta), las posibles estrategias deben basarse en el Fair Value corregido de estos factores, en el caso de Futuros, y deben basarse en una de estas dos operaciones:

- vender el contado a precio S_B (bid), prestarlo a tipo r_B hasta el vencimiento del Forward, y comprar el Forward, pagando un precio no superior a $F_B = S_B e^{r_B(T-t)}$, porque esta es la cantidad que recibiremos al término de nuestro préstamo, que coincide con el vencimiento del contrato Forward,
- pedir prestado a coste r_A para comprar el contado a precio S_A, y vender el Forward a un precio no inferior $F_A = S_A e^{r_A(T-t)}$, porque esta es la cantidad que habriamos de pagar en T.

En consecuencia, el rango de no arbitraje es (F_A, F_B). Si el precio ask de mercado es superior al precio ask teórico del Forward: $F_A^M > F_A$ venderiamos el Forward y comprariamos el contado, mientras que si $F_B^M > F_B$, entonces venderíamos el contado y comprariamos el Forward.

El desarrollo de mercados electrónicos ha incrementado significativamente los volúmenes negociados, aumentando la competencia entre dealers, y estrechando el margen bid-ask, con poco espacio para arbitraje. Esto hace que la correlación entre los precios del contado y del futuro sean elevados en los activos financieros negociados en mercados desarrollados. En mercados menos desarrollados y liquidos, las correlaciones suelen ser inferiores. Tambien son reducidas tales correlaciones en los commodities, especialmente por las fluctuaciones inesperadas en carry costs, convenience yield, y costes de almacenamiento. También lo son en ocasiones en algunos commodities "ligeros", como el petróleo (ver ejemplo en Alexander).

3.3.2 Riesgo de base

El Fair Value de la base en el instante t , como proporción del precio del contado, es:

$$b^*(t,T) = \frac{S(t) - F^*(t,T)}{S(t)} = 1 - \exp\left\{[r(t,T) - y(t,T)]\,(T-t)\right\} \qquad (3)$$

donde $y(t,T)$ denota el cupón, la tasa de dividendos, etc., en función dela naturaleza del subyacente. A vencimiento, la base es cero, puesto que el precio del futuro converge al precio del contado. Antes del vencimiento, hay tres componentes en las variaciones sufridas por la base:

- el tiempo a vencimiento, que es determinista y se conoce exactamente en cada instante, haciendo que la base tenga un comportamiento en términos de "dientes de sierra". Según t oscila entre 0 (inicio del contrato) y T (vencimiento), este componente cae linealmente,
- los tipos de interés, dividendos, carry costs, convenience yields, y similares, que afectan al Fair Value de la base y que se superponen a los dientes de sierra generados por el primer componente,
- fluctuaciones en el precio de mercado del futuro dentro de su rango de no arbitraje, es decir, la incertidumbre sobre el mispricing.

El primero no constituye ningún riesgo. El segundo es impredecible en el caso de commodities, pero es pequeño en el caso de Forwards sobre divisas, bonos, acciones, o indices de renta variable. La fuente importante de riesgo proviene de la incertidumrbe acerca de las variaciones en el tercer factor, excepto en commodities en los que la incertidumbre sobre le carry cost y el convenience yield podrían ser importantes..

Para distinguir entre los dos últimos componentes, consideremos una posición en contado sobre una acción en $t = 0$, con valor $S(0)$, que se cubre vendiendo n contratos de futuro con vencimiento T y precio $F(0,T)$. Si no rebalanceamos la cobertura, en un periodo $t, 0 < t < T$, el valor de mercado de la posición será:

$$V(t) = S(t) - n\,[F(t,T) - F(0,T)]$$

que combinado con (2) y (3) conduce a:

$$V(t) = nF(0,T) + S(t)\,[1 - n\,(1 - b^*(t,T) + x(t,T))]$$

El primer término es conocido en $t = 0$. En el segundo término hay dos fuentes de incertidumbre que necesitan cobertura: sobre $b^*(t,T)$ y sobre $x(t,T)$.

En el caso de commodities, no se pueden tomar posiciones cortas, ya que no puede venderse lo que no se tiene. En consecuencia, no hay cota inferior al rango de no arbitraje, y el precio del contado puede elevarse muy por encima del precio del futuro. En algunos casos ni siquiera hay mercado de contado, como en el caso de derivados sobre clima. En tal caso, el precio forward puede fluctuar en un rango muy amplio, por lo que estos derivados están entre los más volátiles.

La divergencia entre precios de ocntado y de futuro es evidente en el caso de la energia, donde el precio del contado puede fluctuar muy fuertemente, lo que no hace el precio del futuro. De hecho, los precios de contado pueden llegar a ser negativos, debido a que es mas costoso cerrar una planta generadora que mantenerla produciendo incluso en periodos donde la demanda es muy reducida.

3.4 Cobertura con Fowards y Futuros

Si denotamos por N_F el tamaño de cada contratod e futuros, por N_S el tamaño de la posición de contado, por n el número de contratos de futuros utilizados en la cobertura, y por $S(t), F(t,T)$ sus precios en t, el ratio de cobertura (hedge ratio) se define:

$$\beta(t) = \frac{n.N_F.F(t,T)}{N_S.S(t)}$$

3.4.1 Enfoque del seguro

Tradicionalmente, la cobertura se ha visto como un seguro. Con la cobrtrura queremos minimizar la incertidumbre acerca del valor de la cartera cubierta en el momento en que se diseña la cobertura. Dada la coincidencia entre los precios del contado y del futuro a vencimiento, cuando existe un contrato de futuro sobre la posición que se quiere cubrir, y los futuros se van a liquidar a vencimiento, el ratio de cobertura optimo es igual a 1.

Ejemplo: Consideremos una empresa de energía que necesita comprar 10.000 barriles de petroleo para calefacción el 31 de marzo. Como los precios han subido bastante recientemente, la compañía compra futuros sobre NYMEX con entrega el 31 de marzo. Cada contrato es por 1.000 barriles, asi que compra 10 contratos, y asegura el precio que pagará por ellos.

Pero supongamos que hay un desajuste entre vencimientos, de modo que la posicion cubierta se va a cerrar en algun periodo $t, t < T$. El valor de la cartera cubierta en t es:

$$P(t) = nN_F F(t,T) - N_S S(t)$$

con varianza:

$$Var\left(P(t)\right) = n^2 N_F^2 Var\left(F(t,T)\right) + N_S^2 Var\left(S(t)\right) - 2nN_F N_S Cov\left(F(t,T), S(t)\right) \tag{4}$$

Bajo un ratio unitario: $nN_F = N_S$, tendríamos:

$$DT\left(P(t)\right) = N_S \sqrt{Var\left(F(t,T)\right) + Var\left(S(t)\right) - 2Cov\left(F(t,T), S(t)\right)}$$

Nuestro criterio es minimizar (4) , lo que conduce al *ratio de cobertura de mínima varianza*:

$$n^* = \frac{N_S}{N_F}\beta^*$$

donde:

$$\beta^* = \frac{Cov\left(F(t,T), S(t)\right)}{Var(F(t,T))}$$

3.4.2 Enfoque media-varianza

Cuando existen contratos de futuros sobre el subyacente que se pretende cubrir y los vencimientos cooinciden, existe una cobertura perfecta. Se pueden vender futuros para reducir el riesgo de la posicion de contado. Vendiendo un numero suficiente de contratos de futuro, se llegaría a obtener la rentabilidad del activo sin riesgo. Alternativamente, un especulador compraria contratos de futuro para apalancar su posición de contado.

Si no existe tal cobertura perfecta, el contado y el futuro son dos activos con determinada rentabildiad esperada y riesgo, que dibujan una frontera eficiente sobre la que podriamos posicionarnos en funcion de nuestras preferencias, o simplemente, caracterizar la cartera de minimo riesgo.

Si denotamos:

$$\Delta P(t) = P(t) - P(0);\ \Delta S(t) = S(t) - S(0);\ \Delta PF(t) = F(t,T) - F(0,T)$$

con:

$$\Delta P(t) = nN_F.\Delta F(t,T) - N_S.\Delta S(t)$$

de modo que el expected $P\&L$ es:

$$E\left(\Delta P(t)\right) = nN_F.E\left(\Delta F(t,T)\right) - N_S.E\left(\Delta S(t)\right)$$

con varianza:

$$Var\left(\Delta P(t)\right) = n^2 N_F^2 Var\left(\Delta F(t,T)\right) + N_S^2 Var\left(\Delta S(t)\right) - 2nN_F N_S Cov\left(\Delta F(t,T), \Delta S(t)\right) \tag{5}$$

Bajo un ratio unitario:

$$DT\left(\Delta P(t)\right) = N_S\sqrt{Var\left(\Delta F(t,T)\right) + Var\left(\Delta S(t)\right) - 2Cov\left(\Delta F(t,T), \Delta S(t)\right)} \tag{6}$$

Si la compañía del ejemplo anterior estuviese interesada no solo en la cobertura, sino en la $P\&L$ que tuviese en dicha cobertura, el ratio de cobertura optimo dependerá de la actitud de la empresa respecto del riesgo.

Ejemplo: Supongamos que elfuel de calefacción al contado cotiza a 82 euros por barril a 15 de Marzo, y la empresa compra 10 contratos de futuro a 80 euros por barril. Supongamos que en el momento de la cobertura, la empresa cree que contado y futuro tienen volatilidad de 25% y una correlación de 0,90. A 31 de marzo, el contrato expira, con un precio de contado (y de futuro) igual a 85 euros por barril. El P&L de la cartera cubierta es:

$$P\&L = 10.000\,[(85-80)-(85-82)]\ euros = 20.000\ euros$$

que es independiente del precio pagado a vencimiento.

El *riesgo de precio* es la desviación tipica de este $P\&L$. Para calcularlo, utilizamos (6) con $N_S = 10.000$, y:

$$\begin{aligned} DT\,(\Delta F(t)) &= 80(0,25)/\sqrt{250/10}\ euros = 4,00\ euros \\ DT\,(\Delta S(t)) &= 82(0,25)/\sqrt{250/10}\ euros = 4,10\ euros \\ Cov(\Delta F, \Delta S) &= (0,95).4.(4,10) = 15,58\ euros \end{aligned}$$

por lo que el *Precio del riesgo* es:

$$\Pr\text{ecio del Riesgo} = 10.000\sqrt{4,1^2+4,0^2+2(15,58)}\ euros = 12.845\ euros$$

La cartera de minima varianza sobre la frontera eficiente se obtendria derivando en (5), obteniendo:

$$n^* = \frac{N_S}{N_F}\beta^*$$

donde:

$$\beta^* = \frac{Cov\,(\Delta F(t,T), \Delta S(t))}{Var(\Delta F(t,T))}$$

En el ejemplo anterior: $\beta^* = \frac{15,58}{16} = 0,97375$.

Puesto que existe una cobertura perfecta y la cobertura se mantiene hasta vencimiento, este ratio debería ser unitario. No lo es exactamente porque el enfoque de minima varianza impone una restricción enlas crenecias del inversor: $Corr\,(\Delta F(t,T), \Delta S(t)) = DT\,(\Delta F(t,T))\,/DT\,(\Delta S(t))$, que no hemos impuesto en el ejemplo. Cuando la cobertura no se mantiene hasta vencimiento, tal restricción no es precisa, pues la cobertura ya no es perfecta.

Si las creencias del inversor se especifican en términos de las rentabilidades durante el periodo de la cobertura, en vez de sobre las caracteristicas estadisticas de $P\&L$, tendríamos:

$$Var\,(\Delta P(t)) = (nN_F F\sigma_F)^2 + (N_S S\sigma_S)^2 - 2nN_F N_S SF\rho\sigma_F\sigma_S$$

con: $\sigma_S = \sqrt{Var\left(\frac{S(t)-S(0)}{S(0)}\right)}, \sigma_F = \sqrt{Var\left(\frac{F(t)-F(0)}{F(0)}\right)}$, y derivando respecto de n e igualando a cero:

$$n^* = \frac{N_S}{N_F}\frac{S}{F}\rho\frac{\sigma_S}{\sigma_F}$$

por lo que el ratio de cobertura es:

$$\tilde{\beta} = \rho\frac{\sigma_S}{\sigma_F} = \frac{F}{S}\beta^*$$

Esta beta podria calcularse mediante minimos cuadrados ordinarios en una regresión simple que explicase la rentabilidad del contado mediante la rentabilidad del activo de cobertura. Suele ser habitual estimar el ratio de coberturn a partir de la beta de mercado, pero dicha beta es el estimador de minimos cuadrados en una regresion del activo que queremos cubrir sobre el indice de mercado spot, no el futuro. Podemos obtener una a partir de la otra mediante:

$$\tilde{\beta} = \frac{\rho_{cF}}{\rho_{cS}}\frac{\sigma_S}{\sigma_F}\hat{\beta}_m$$

en funcion de las correlaciones de la cartera descubierta con el indice spot y con su futuro, y de las volatilidades de ambos.

3.4.3 Riesgo de posición

El riesgo de posición surge cuando no se puede comprar el número exacto de contratos que permitiría una cobertura perfecta.

Ejemplo: Supongamos que una refineria necesita comprar 10.50 bariles de crudo y piensa cubrir su exposición sobre un periodo de 1 mes comprando Futuros. Cada futuro es por 1.000 barriles. Supongamos que el precio de contado es 100 euros por barril, el precio del futuro en este momento es 102 euros, $\sigma_S = 40\%, \sigma_F = 35\%$, y la correlación entre las rentabilidades del contado y del futuro es de 0,98. El Precio del Riesgo es: $DT(\Delta S) = 11,55 euros, DT(\Delta F) = 10,31 euros, Cov(\Delta S, \Delta F) = 116,652$ $\Rightarrow$Precio del Riesgo =120.666 euros.

Si quisieramos hacer una cobertura *naive*, con ratio unitario, no podríamos, pues necesitariamos 10,45 contratos. *Si añadimos 10 contratos a la exposición de 10.450 barriles de contado, tenemos un precio del riesgo:*

Precio del Riesgo=$\sqrt{(10.000(10,31))^2 + (10.450(11,55))^2 - 2(10.000)(10.450)(116,62)} = 28.417\, euros$

Parte de este riesgo se debe a la imposibilidad de comprar el numero optimo de contratos, 10,45. Esto hace que, con un ratio unitario, tengamos una exposición residual de 450 barriles, y un Riesgo de Posición:

$$\text{Riesgo de Posición} = 450(10,31) = 4.638\ euros$$

Veamos ahora cual es el ratio de minima varianza. Como el contado es mas volatil que el futuro, y tienen correlación alta, el ratio de cobertura de minima varianza sera superior a 1:

$$\tilde{\beta} = 0,98 \frac{0,40}{0,35} = 1,12$$

con un número óptimo de contratos:

$$n^* = \frac{10.450}{1.000} \frac{100}{102} (1,12) = 11,4745$$

por loque comprariamos 11 contratos. El Precio del Riesgo de la cartera cubierta sería:

Precio del Riesgo=$\sqrt{(11.000(10,31))^2 + (10.450(11,55))^2 - 2(11.000)(10.450)(116,62)} = 24.505\, euros$

con u Riesgo de Posición debido a la exposición de 474,5 barriles:

$$\text{Riesgo de Posición} = (474,5)\,(10,31) = 4.890\; euros$$

Si la correlacion entre futuro y contado hubiese sido igual a 1, la cobertura seria perfecta. Puede verse que el Precio del Riesgo bajo la cobertura *naive* se reduce a 17.609 euros, parte de lo cual es Riesgo de Posición. Por otra parte, la cartera cubiertad e minima varianza tendría una Precio del Riesgo igual a cero, ya que podemos escoger los pesos de la cartera de modo que el riesgo de la cartera sea nulo. Habria todavia un Riesgo de Posición, que en este caso sería de 3.002 euros.

3.4.4 Cobertura Proxy (Cobertura cruzada)

Ejemplo: Una planta productora de zumo congelado de limón cree que venderá 750.000 kilos de zumo tras la cosecha, dentro de 6 meses. Existe contratos de futuros sobre zumo de naranja, pero no sobre zumo de limon. El tamaño el contrato es de 15.000 kilos, el precio spot actual es de 1,75 euros por kilo, y el precio del futuro es 1,50 euros/kilo. Las volatilidades del contado y futuro son ambas 40% y la correlacion entre sus rentabilidades es de 0,75.

El Precio del Riesgo se calcula: $DT(\Delta S) = 0,49\, euros, DT(\Delta F) = 0,42\, euros, Cov(\Delta S, \Delta F) = 0,1575$ $\Rightarrow$Precio del Riesgo antes de la cobertura=371.231 euros. Precio del Riesgo de la posición cubierta con el ratio *naive* =248.747 euros. EL ratio de minima varianza es $\beta = 0,75$, y el numero optimo de ontratos es $n^* = 43,75$. Comprariamos 44 contratos, y el Precio del Riesgo de la posición cubierta sería: 245.552 euros. Del cual, sería Riesgo de Posición: 1.591 euros.

3.4.5 Cobertura multivariante (Basket hedging)

Consiste en utilizar varios activos para constituir la cobertura, loque se determina mediante una regresión de la rentabilidad de la cartera descubierta sobre las rentabilidades de los activos que se consideran en la cobertura. Una vez estimados los coeficientes β_i de la regresión, determinariamos el numero optimo de contratos de cada cobertura parcial:

$$n_i = \frac{N_S}{N_{F_i}} \frac{S}{F_i} \hat{\beta}_i$$

La mayor limitación es la posible correlación entre los activos destinados a la cobertura, que generarán problemas en la determinación precisa de los ratios de cobertura, por lo que este tipo de estrategias suele reservarse para activos poco correlacionados.

3.4.6 Eficacia de una cobertura

La eficacia de una cobertura suele medirse mediante la reducción en la volatilidad de la cartera cubierta, respecto de la volatilidad de la cartera descubierta, lo que se conoce como la medida de efectividad de Ederington. Una medida similar es el cuadrado del coeficidnte de correlación lineal enrte la rentabilidad de la cartera descubierta y del activo de cobertura.

Tambien deberia prestarse atención a la asimetira y la curtosis de las rentabilidades de la cartera cubierta, y no solo a su media y varianza.Un aalta curtosis indica que la cobertura puede quedar seriamente deteriorada subitamente, mientras que una asimetria negativa sugiere que es mas probable tener perdidas que ganacias con la posicion cubierta.

Otro enfoque consider auna función de utilidad exponencial para el inversor: $U(W) = \exp(\gamma W), \gamma > 0$, siendo W su riqueza, lo que conduce a un Equivalente Cierto:

$$EC \approx \mu - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 + \frac{s}{6}\gamma^2\sigma^3 - \frac{\kappa - 3}{24}\gamma^3\sigma^4$$

donde s, κ denotan los coeficientes de asimtria y curtosis de la cartera cubierta y γ es el coeficiente de aversion absoluta al riesgo de la función de utilidad anterior, que es constante e igual a γ.

Estos momentos, asi como los que hemos visto en las secciones anteriores, pueden estimarse mediante modelos GARCH bivariantes sobre las rentabilidades del contado y del activo de cobertura. de este modo, el ratio de cobertura se va adapatando a las situaciones de mercado, en funcion de cambios en las volatildades relativas de ambos activos y de su correlación, que puede variar muy significativamente. [ver Lafuente y Novales (2003), Andani, Lafuente y Novales (2009), y Novales y Urtubia (2014) para coberturas cruzadas.

3.4.7 Cobertura: algunos casos prácticos

Cobertura de riesgo de divisas Las carteras internacionales presentan una exposición al riesgo de divisas. Si invertimos una cantidad N de divisa nacional en un activo extranjero en t, para mantenerlo hasta el instante T, periodo en el que gana una rentabilidad $r(t, T)$ que supondremos conocida, el valor de la inversión a vencimiento será: $N.exp(r(t, T).(T - t))$, luego esta es la exposición que tenemos a la divisa y deberiamos tomar una posicion contraria en el tipo de cambio Forward por esta cuantía.

Ejemplo: Un inversor compra 1 millón de euros de dólares australianos en el mercado spot para invertir en una ctivo australiano que tiene una tasa de rentabilidad conocida del 10%. La inversión es por 9 meses y el riesgo de divisa se cubre vendiendo dolares australianos a una tasa forward a 9 meses de 2,45 dolares australianos por euro. Supongamos que el precio spot es de 2,50. l tasa de descuento a 9 meses es del 5,0%.

El valor de la inversión a vencimiento será de 2.694.710 dolares australianos. Para cubrir completamente el riesgo debemos ponernos cortos (vender) en esta cantidad al tipo de 2,45, lo que representa 1.099.882 euros dentro de 9 meses. Con descuento del 5%, esta cnatidad tiene un valor presente hoy de 1.059.400 euros. Pero hasta el vencimiento de la inversion, la tasa de descuento peude variar, por lo que tenemos un riesgo de tipo de interes por esta cantidad. No sabemos cuanto será la tasa de descuento a 8 meses dentro de un mes, por ejemplo, por lo que el valor presente en euros de la cantidad que hemos de tener en T es incierto. La sensibilidad al tipod e descuento está dada por el PV01 de un cash flow de 1.059.400 euros en 9 meses, que es: 79,45 euros.

Si no conociesemos la rentabilidad de la inversion extranjera, el ratio de cobertura de minima varianza dependeria de las volatilidades y la correlacion entre el tipo de cambio y el activo extranjero.

Cobertura de carteras de acciones internacionales Una cartera de acciones que intenta hacer gestion pasiva del S&P500 tiene una beta de mercado de 1. La correlacion entre las rentabilidades de dicha cartera y del indice de mercado es de 0,9, y la correlacion con las rentabilidades del futuro es de 0,81. El indice de contado y el futuro tienen ua volatilidad del 18%. El ratio de cobertura de mínima varianza es:

$$\tilde{\beta} = \frac{0,81}{0,90} = 0,90$$

y la volatilidad de la cartera es:

$$\frac{(0,90)\,(0,18)}{0,81} = 0,20$$

Si tenemos 1,8 millones de euros invertidos en dicha cartera, el indice S&P500 cotiza a 1260, el precio del futuro es 1265 y el valor de cada punto del indice de mi cartera es 1250. ¿Cuantos contratos hemos de vender para la cobertura?

$$n^* = \frac{N_S}{N_F}\frac{S}{F}\rho\frac{\sigma_S}{\sigma_F} = 5,0819$$

de modo que vederemos 5 contratos, asumiendo cierto Riesgo de Posición, puesto que un 1,61% d ela cartera permanece descubierta.

Supongamos que el ratio de dividendo del indice a 3 meses es del 4%, el tipo cupon cero a 3 meses de la eurozona es 5% (ambos en composicion continua) y que las variaciones diarias en el S&P500 están habitualmente alrededor de

2 puntos del índice. Estimemos las sensibilidades diarias de la cartera a fluctuaciones en la rentabilidad por dividendo, el tipo cupon cero, y el precio de mercado del futuro.

- PV01 de una exposición nominal de 1,8 millones de euros debido a cambios en rentabilidad por dividendo:

$$-1.800.000(0,25)\exp(-(0,04)(0,25)).10^{-4} = -44,55\ euros$$

- PV01 de una exposición nominal de 1,8 millones de euros debido a cambios en los tipos de interés:

$$1.800.000(0,25)\exp(-(0,045)(0,25)).10^{-4} = 44,44\ euros$$

- Como la proporcion de cartera que se cubrio es del 98,39%, el riesgo de base diario debido a cambios en el precio del futuro es:

$$(0,9839)\frac{2}{1260} = 15,62\ bp$$

por lo que la sensibilidad de la cartera debida a fluctuaciones en el preciod el futuro es:

$$1.800.000(0,001562) = 2.811\ euros$$

Un riesgo adicional surge del *tracking error*, cuando la cartera no sigue exactamente al índice. La rentabilidad de la cartera cubierta con un ratio de cobertura β sería:

$$\begin{aligned} N\left(r(t,T) - \beta r_F^*(t,T)\right) &\approx N\left(r_S(t,T) - \beta\left[r_S(t,T`) + r(t,T) - y(t,T)\right]\right) = \\ &= N(1-\beta)r_S(t,T) - N\beta r(t,T) + N\beta y(t,T) \end{aligned}$$

por lo que tenemos:

- una exposición de $N(1-\beta)$ al indice spot,
- una exposición de $-N\beta$ al tipo de descuento de igual vencimiento que el futuro, con sensibilidad nominal:

$$PV01_r(t,T) = N\beta\delta 01_r(t,T) \approx N\beta(T-t)\exp\left[-r(t,T)(T-t)\right]10^{-4}$$

- una exposición de $N\beta$ a la tasa de dividendos sobre la cesta de accciones de igual vencimiento que el futuro, con sensibilidad nominal:

$$PV01_y(t,T) = N\beta\delta 01_y(t,T) \approx N\beta(T-t)\exp\left[-y(t,T)(T-t)\right]10^{-4}$$

La primera de estas exposiciones es, previsiblemente, mucho mayor que las otras dos y si la cartera está denominada en divisa extranjera, habrñá otra exposición al riesgo de divisa. Finalmente, si no podemos comprar el número exactod e contratos de fturo, tendremos asimismo un Riesgo de Posición.

Ejemplo: Consideremos un banco español que invierte 1 millón de euros en una cartera que hace index tracking del S&P500, siendo el tipo de cambio actual de 1,8 dóalres/euro. Tenemos por tanto 1,8 millones de dólares invertidos en la cartera, y supongamos que el ratio de cobertura de mínima varianza es de 0,9.

Ya vimso antes que deberiamos vender 5 contratos de futuros para la cobertura. Supongamos que la volatilidad del tipo de cambio es 10%. ¿Cuáles son los factores de riesgo de la cartera cubierta y las sensibilidades nominales a dichos factores de riesgo sobre horizontes de 1 día?

- Riesgo por *tracking error:* Puesto que el ratio de minima varianza es presumiblemente proximo a 1, es probable que el hechod e que le ratiod e cobertura de la cartera sea de 0,9 se deba al tracking error. Es decir, la cartera no genera la misma rentabilidad que el S&P500 lo que introduce un componente de riesgo especifico en la cartera. el riesgo total es $0,20^2 = 0,04$. El riesgo sistematico es: β^2.(Varianza de la rentabilidad del futuro) $= (0,9)^2\,(0,18)^2 = 0,02624$. Por tanto, el riesgo especifico es 1,73% por año. A horizonte de un dia, dicho riesgo es de 0,7418%, suponiendo 250 dias/año. En términos nominales, el riesgo específico es: (1.000.000 euros)(0,007418) = 7.418 euros.

- Riesgo divisa (*riesgo forex*): No se ha cubierto el riesgo divisa. Con una volatilidad del 10%, la desviacion tipica diaria es de 0,6325%. Luego el riesgo forex diario es: (1.000.000 euros)(0,006325) = 6.325 euros.

- Riesgo de posición: Deberiamos vender 5,0819 contratos, pero venderemos solo 5 contratos. Tenemos asi un riesgo de posición cuyo factor de riesgo es la rentabilidad del futuro. La volatilidad del futuro es 18% y tnemos un 1,16% de la posición sin cubrir, por lo que el riesgo de posición diario es: $(0{,}18)(0{,}0116)/\sqrt{250} = 1,83bp$. En términos nominales: (1.000.000 euros)(0,000183) = 183 euros.

En un ejemplo anterior calculamos el riesgo de base nominal diario, debido a fluctuaciones en el precio de mercado del futuro, obteniendo 2.811 $US o, equivalentemente 1.562 euros. Los riesgos debidos a la incertidumbre sobre la rentabilidad por dividendo o los tipos de interés que hemos oibtenido son mucho menores. el riesgo mas importante es el del tracking error. El riesgo divisa es asimismo importante, pero puede cubrirse mediante una posicion en un Forward sobre la divisa. El riesgo siguiente en importancia es el riesgo de base, debido a fluctuaciones en el precio de mercado del futuro. Los restantes riesgos, mucho menores, son los de rentabilidad por dividendo, tipos de interés y el riesgo de posición residual.

Caso práctico: Cobertura de una cartera de futuros sobre energía

Cobertura de una cartera de bonos Los futuros son sobre bono nocional, de modo que la cobertura de una cartera de bonos es siempre una cobertura cruzada. Esto sucede incluso si queremos cubrir una posicion sobre un unico bono y se trata del cheapest-to-delivery. Es frecuente suponer la aproximacion:

$$F(t,T) - F(t-1,T) \approx \frac{CTD(t) - CTD(t-1)}{CF_{CTD}}$$

siendo CTD le precio del cheapest-to-delivery y CF_{CTD} el factor de conversión del chepoaest-to-delivery.

Bajoesta aproximación, el bono CTD esta casi prfectamenet correlacionado con el futuro, y la $P\&L$ tendrá una volatilidad igual a CF_{CTD} multiplicado por la volatilidad del futuro. Por tanto, el ratio de cobertura de minima varianza es, que proporcionará una varianza próxima a cero, es:

$$\beta^* = \frac{Cov\,(\Delta F(t), \Delta CFT(t))}{Var(\Delta F(t))} \approx \frac{CF_{CTD}.Cov(\Delta F(t), \Delta F(t))}{Var(\Delta F(t))} = CF_{CTD}$$

y el número de bonos preciso para la cobertura será:

$$n^* = \frac{N_S}{N_F} CF_{CTD}$$

Los futuros sobre bono nocional se especifican en términos de valor del punto básico, y el principal N_F que es equivalente a un valor del punto básico de P es: $100P$. Por ejemplo, los futuros sobre US Treasury tienen un valor del punto de \$1.000, lo que significa que si el precio del futuro sube de 100 a 101, el inversor recibe \$1.000. El principal equivalente invertido en el bono nocional es por tanto de \$100.000.

Ejemplo: Un inversor tiene una cartera de 500.000 euros en el bono US Treasury al 4 y 1/2% con vencimiento en noviembre 2015, que es actualmente el cheapest-to-delivery frente al contrato de futuro sobre el US Treasury a 10 años que vence en diciembre 2007. El factor de conversión para este bono es 0,9080. ¿VCuantos contratos de futuro debe vender para cubrir la invrsión en el bono?

Por la expresión anterior: $n^* = \frac{500.000}{100.000}(0,9080) = 4,54$, de modo que venderá 5 contratos, asumiendo un notable riesgo de posición puesto que estaría sobrecubierto en un 10,13%. por tanto, el riesgo de posición es algo mayor de un 10% del $P\&L$ del futuro sobre el bono nocional.

La aproximación que antes vimos se utiliza para otros bonos en la cesta, e incluso fuera de ella, pero no sería muy aceptable para carteras de bonos. Para todo bono que no sea cheapest-to-delivery, hay un riesgo de base que surge de la diferencia entre la yield del bono nocional y la del bono que se está cubriendo. Si denotamos por $\Delta y_B(t)$ el cambio en la yield del bono que se cubre desde $t = 0$ hasta t, en que se cierra la cobertura. Sea $\Delta y_F(t)$ la magnitud analoga para el bono nocional. El ratio de cobertura de minima varianza no es entonces el factor de conversión del bono, sino:

$$\beta^* = \frac{Cov\left(\Delta y_B(t), \Delta y_F(t)\right)}{Var\left(\Delta y_F(t)\right)} CF_B$$

expresión cuyo primer factor se podria estimar mediante la aplicacion de minimos cuadrados en una regresion de las variaciones enla yield del bono sobre las variaciones análogas del bono nocional.

Para cubrir una cartera de bonos con un unico contrato de futuro sobre bono nocional, podemos aproximar el ratio de cobertura utilizando el $PV01$ de la cartera $PV01_S$ y del contrato de futuro $PV01_F$. Conociendo el cupon y el vencimiento de cada bono y los del bono nocional podemos calcular el PV01 de ambos, utilizando la curva cupon cero con composición continua para descontar los cash-flows. Supongamos que el cambio en la curva cupon cero sobre el periodo de cobertura es un desplazamiento paralelo. Entonces, puesto que el calculo del PV01 se basa en la cantidad principal invertida, tenemos:

$$\frac{N_S.\Delta F(t)}{N_F.\Delta S(t)} = \frac{PV01_F}{PV01_S}$$

donde $\Delta S(t)$ denota el cambio en el precio de la cartera de bonos sobre el periodo de cobertura y N_S es el nominal invertido en dicha cartera. ene ste caso, el número de contratos para la cobertura *one-to-one* sería:

$$n^* = \frac{PV01_S}{PV01_F}$$

Por ejemo, si un inversor tiene una cartera de bonos con un PV01 de 3.000 euros y el PV01 del bono nocional es 75 euros, dbeería vender 40 futuros sobre el bono nocional para cubrir la cartera. Alternativamente, podriamos calcular la cobertura utilizando las *value durations* de la cartera de bonos y del futuro, ya que sabemos que son aproximadas a las PV01 (iguales para desplazamientos paralelos de la curva cupon cero). Si no hacemos el supuesto de desplazamiento paralelo, volveriamos a tener riesgo de base por la diferencia entre la *yield* del bono nocional y la *yield* de la cartera que se está cubriendo. El ratio de cobertura de mínima varianza sería entonces:

$$\beta^* = \frac{Cov\left(\Delta y_B(t), \Delta y_F(t)\right)}{Var\left(\Delta y_F(t)\right)} \frac{PV01_S}{PV01_F} \frac{N_F}{N_S}$$

lo que ilustra que podriamos realizar la cobertura no con un unico bono, sino con una cartera de bonos, simplemente utilizando el PV0 de dicha cartera.