Riesgo de crédito

Alfonso Novales
Departamento de Economía Cuantitativa
Universidad Complutense

Diciembre 2017
Versión preliminar. No citar sin permiso del autor
Estas notas se basan en J.Hull, "Risk Management and Financial Institutions", 4 edicion, 2015

Contents

1 Derivados de crédito. Valoración de un credit default swap (CDS)

En un CDS, el comprador de protección paga una cantidad periodica, fijada de antemano, hasta que se produzca una insolvencia, o hasta el vencimiento del contrato, si no hay insolvencia. El vendedor del CDS pagará al comprador una cantidad $100(1-R)$ en caso de default del emisor del CDS.

[Hull Appendix K] Supongamos una probabilidad incondicional de insolvencia cada año, $P(t)$,que suponemos, por simplicidad, constante para todos los años: $P(t) = P$. Probabilidad de insolvencia incondicional en año $t : P(t) = P(1-P)^{t-1}$.Probabilidad de supervivencia acumulada hasta el año $t : V(t) = \sum_{s=1}^{s=t} P(s) = \sum_{s=1}^{s=t} P(1-P)^{t-1} = (1-P)^t$

- (A) Calculo del valor actual de pagos del comprador: multiplicamos el spread del CDS s por la probabilidad de supervivencia del emisor del CDS en cada momento en que hay que efectuar un pago. Descontamos al dia de hoy y agregamos. El resultado será un numero de veces el spread s .

- (B) Calculo del pago devengado a realizar si hay insolvencia: se trata de la parte del pago que habria que haber efectuado ese año. Este componente opera en función del momento en que se produzca el default. En el ejercicio se supone que las insolvencias, si ocurren, suceden a final de año, mientras que los pagos sobre el CDS se hacen a mitad de año. Para cada año se multiplica la probabilidad de insolvencia de ese año por la cuantia del pago devengado (que dependerá del momento del año en que se produzca la insolvencia), se descuenta y se agrega. Es, de nuevo, igual a un número de veces el spread del CDS.

- (C) Calculo del valor actual de ingresos del comprador: Multiplicamos la probabilidad de insolvencia de cada momento de pago por el Nominal y por $(1-R)$, y asi obtenemos el ingreso esperado. Descontamos en valor presente y agregamos.

Se igualan ambas cantidades para obtener el spread s del contrato CDS: A+B=C.

Observaciones:

- como sucede con otros contratos de productos derivados, en el momento de la negociación, un CDS vale prácticamente cero. Posteriormente, el spread ira variando, y habrá que hacer un mark-to-market del CDS.

- las probabilidades utilizadas en la valoración de CDS deben ser probabilidades riesgo-neutro. Pueden deducirse de precios de bonos, o de asset swaps, o pueden deducirse de este ejercicio de calculo del spread, si lo resolvemos en la direccion contraria, utilizando un spread observado. Si en el mismo tomamos la probabilidad de insolvencia como una incógnita, porque sabemos que el mercado está cotizando el CDS a 100 pb. por año y hacemos los cálculos a la inversa, encontrariamos que la probabilidad de insolvencia cada año, condicional en que no se haya producido insolvencia antes, es de 1,61% por año.

- un CDS binario se estructura de modo similar, pero el pago es una cantidad fija. Si volvemos al ejemplo y suponemos un pago fijo de \$1 en vez de $\$(1-R)$, obtendriamos un spread de 207 bp.

- la valoración del CDS es poco sensible al valor numérico utilizado para R porque las probabilidades de insolvencia son aproximadamente propocionales a $1/(1-R)$ y los pagos del CDS son proporcionales a $1-R$. Lo contrario sucede en un CDS binario, porque la segunda condicion no se cumple.

2 Estimación de probabilidades de insolvencia (default) (cap.19 en Hull(2015))

Las probabilidades de default de una empresa pueden estimarse de distintas maneras. Las empresa de rating asignan ratings supuestamente asociados con dichas probabilidades. Moody's asigna ratings Aaa, Aa, A, Baa, Ba, B, Caa; subdivide el rating Aa en Aa1, Aa2, y Aa3, el rating A se subdivide en A1, A2, A3. Standard&Poors utiliza ratings: AAA, AA, A, BBB, BB, B y CCC. Subdivide el rating AA en AA+, AA, AA-, el rating A en A+, A y A-, y asi con todos los demás. La idea es que los rating son estables, por lo que solo se actualizan si cambian las expectativas de supervivencia de la empresa a largo plazo. Si hay dificultades de corto plazo que se perciben como reversibles, no deberian afectar al rating.

Muchos bancos tienen procedimientos internos de rating de crédito. En Basilea se permite el uso de estos procedimientos internos para estimar la probabilidad de default o insolvencia (PD). Tambien se les permite utilizar procedimientos internos para estimar la Loss given default (LGD), la exposición a default (EAD), y el vencimiento medio M. Para estimar la PD suele utilizarse informacion sobre ratios de rentabilidad, como la rentabilidad sobre activos, y ratios de balance, como el debt-to equity ratio. En este tipo de cálculos se tiene en cuenta que el servicio de un crédito (pago de intereses más principal) requiere disponer de liquidez, más que de beneficios.

Otro enfoque tradicional es el Z-score, desarrollado por E.Altman (1968, "Financial ratios, discriminant analysis, and the prediction of corporate bankruptcy", Journal of Finance, 23, 4, 589-609) utilizando técnicas de análisis discriminante. De este modo, seleccionó cinco ratios contables: X_1: Working

Capital/Total Assets, X_2: Retired Earnings/Total Assets, X_3: Earnings before interest and taxes/Total Assets, X_4: Market value of equity/Book value of total liabilities, X_5: Sales//Total assets, y propuso el Z-score:

$$Z = 1,2X_1 + 1,4X_2 + 3,3X_3 + 0,6X_4 + 0,999X_5$$

Si el Z-score es superior a 3, se considera que no es probable que la empresa haga default; si está entre 2,7 y 3,0, deberiamos ponerla "en alerta"; si está entre 1,8 y 2,7 hay riesgo de default, y si es inferior a 1,8, a probabilidad de entrar en dificultades financieras es elevada.

2.1 Probabilidades de default históricas

Moody's proporciona tablas de tasas acumuladas de default a lo largo del tiempo, Q_t, por niveles de rating. Estas tablas miden la probabilidad Q_t de que una empresa haga default antes de que finalice el año t. Por eso son probabilidades acumuladas. Las probabilidades acumuladas son crecientes con el número de años considerados para bonos investment-grade porque cuanto mas tiempo pase mas probable es que su salud financiera se deteriore, y suelen ser decrecientes para bonos de emisores con bajo rating de crédito, porque si dicho emisor sobrevive los primeros años, será señal de que su salud financiera ha mejorado.

[ver Tabla 19.1 en Hull, pág. 402]

La probabilidad que asociamos actualmente a que una empresa haga default durante el año t es la diferencia entre las probabilidades acumuladas que asociamos para los años t y t-1: $Q_t - Q_{t-1}$. Estas son probabilidades incondicionales de default. Es la probabilidad de default en el año t, vista en el año 0 (la probabilidad que actualmente asignamos a un default dentro de t años). La probabilidad de default en el año t, condicional a que no se haya producido default anteriormente es igual a $(Q_t - Q_{t-1})/Q_{t-1}$. Esta es una probabilidad sobre un intervalo de tiempo de amplitud unidad.

Si denotamos por S_t la probabilidad de superviviencia (probabilidad de no default) hasta el instante t, $S_t = 1 - Q_t$,la probabilidad de default entre t y $t + \Delta t$ será igual a $S(t) - S(t + \Delta t)$. La probabilidad de default entre t y $t + \Delta t$ condicional a haber sobrevivido hasta t es entonces: $\frac{S(t)-S(t+\Delta t)}{S(t)}$.

Definimos la *hazard rate* o *intensidad de default* λ_t entre t y $t+\Delta t$, de modo que $\lambda_t \Delta t$ sea la probabilidad de default en dicho periodo *condicional* en que no se haya producido default entre 0 y t. Por tanto, λ_t debe satisfacer:

$$\lambda_t \Delta t = \frac{S(t) - S(t + \Delta t)}{S(t)} \Rightarrow S(t + \Delta t) - S(t) = -\lambda_t S_t \Delta t$$

Tomando límites:

$$\frac{dS_t}{dt} = -\lambda_t S_t$$

es decir:

$$S_t = e^{-\int_0^t \lambda_s ds} = e^{-\bar{\lambda} t}$$

donde $\bar{\lambda}$ denota la intensidad media de default entre 0 y t.

Como Q_t es la probabilidad de que se produzca default antes de t, tenemos:

$$Q_t = 1 - S_t = 1 - e^{-\bar{\lambda} t} \Rightarrow \bar{\lambda}(t) = -\frac{1}{t} \ln(1 - Q_t) \quad (1)$$

que nos permite estimar probabilidades de default.

EXAMPLE 19.2 (Hull)

Suppose that the hazard rate is a constant 1.5% per year. The probability of a default by the end of the first year is 1 - e$^{-0.015\times 1}$ = 0.0149. The probability of a default by the end of the second year is 1 - e$^{-0.015\times 2}$ = 0.0296. The probability of a default by the end of the third, fourth, and fifth years are similarly 0.0440, 0.0582, and 0.0723. The unconditional probability of a default during the fourth year is 0.0582-0.0440 = 0.0142. The probability of default in the fourth year, conditional on no earlier default is 0.0142/(1 - 0.0440) = 0.0149.

2.2 Estimación de la probabilidad de insolvencia a partir de precios de bonos

El precio actual de un bono cupon cero a 1 año debe coincidir con la esperanza matemática de su valor en dos estados (default/no default) descontando los flujos al tipo de interés libre de riesgo, i . Denotemos por r_c la TIR del bono corporativo, por Q_1 la probabilidad de que la empresa en consideración haga default antes de un año y por R la recovery rate. La recovery rate R de un bono es la cantidad que perciben los tenedores de bonos cuando la empresa entra en dificultades. Es el complementario de la pérdida esperada en caso de default ("Loss given default", LGD), de modo que $R = 1 - LGD$ y se supone que R disminuye según descendemos en el nivel de rating. Utilizando datos para 1982-2004, Moody's propone $R = 57,4\%$ para bonos "Senior secured", $R = 44,9\%$ para bonos "Senior unsecured", $R = 39,1\%$ para bonos "Senior subordinated", $R = 32,0\%$ para bonos "Subordinated", y $R = 28,9\%$ para bonos "Junior subordinated", lo cual está relacionado con la prioridad que cada tipo de deuda ocupa entre los acreedores en caso de dificultades del emisor.[1]

El valor del bono libre de riesgo y el valor riesgo-neutro del bono corporativo son:

$$\begin{aligned} B_f &= \frac{100}{1+i} \\ B_c &= \frac{100}{1+r_c} = \frac{100(1-Q_1) + R.100.Q_1}{1+i} \end{aligned} \quad (2)$$

[1] Según Moody's, una relación aproximada es:

$$Average\ recovery = 0,52 - 6,9(Average\ default\ rate)$$

por lo que:

$$B_f - B_c = \frac{100.Q_1(1-R)}{1+i}$$

o, lo que es lo mismo:

$$\frac{B_f - B_c}{B_f} = Q_1(1-R)$$

El diferencial de precios de ambos bonos mide la pérdida esperada por insolvencia. La expresión anterior nos dice que dicho diferencial es el producto de la probabilidad de insolvencia por la perdida esperada.

En general, en bonos de más de un periodo, el diferencial de precios de ambos bonos, o pérdida esperada por insolvencia, es igual al producto de la probabilidad de insolvencia por el valor presente de la pérdida esperada en caso de insolvencia durante la vida del bono. Para ello, calculamos cada periodo el valor descontado de las rentas que dejariamos de percibir si se produce insolvencia en dicho periodo. A dichos flujos les aplicamos la Recovery rate y luego calculamos su valor presente en el momento actual.[2]

A partir de (2) tenemos:

$$1+i = (1+r_c)\left[1 - Q_1(1-R)\right] \Rightarrow \frac{r_c - i}{1+r_c} = Q_1(1-R)$$

donde Q_1 y R no son observables. Por tanto:

$$Q_1 = (1-R)^{-1}\frac{r_c - i}{1+r_c}$$

y, si aproximamos en serie de Taylor:

$$s \approx Q_1(1-R) \Rightarrow Q_1 = \frac{s}{1-R} \tag{3}$$

siendo s el spread o diferencial de crédito: $s = r_c - i$.

Esta expresión nos permite estimar la probabilidad de insolvencia durante el primer año Esta expresión nos permitiría estimar la probabilidad de insolvencia el primer año (el bono vence en 1 año) para la empresa que emitió el bono, a partir del spread de su TIR respecto del bono libre de riesgo, suponiendo una determinada recovery rate. Si tuvieramos un conjunto de bonos emitidos a distintos vencimientos, podríamos estimar las probabilidades de insolvencia para distintos años, obteniendo asi una estructura temporal de probabilidades de insolvencia.

[2] ver hoja de cálculo "Expected loss from default in a bond".

Probabilidades acumuladas de insolvencia y spreads de crédito		
	Probabilidad acumulada de default antes de 7 años	Spread de crédito (bps)
Rating	1970-2013	bonos a 7 años:1996-2007
Aaa	0,241	35,74
Aa	0,682	43,67
A	1,615	68,68
Baa	2,872	127,53
Ba	13,911	280,28
B	31,774	481,04
Caa	56,878	1103,70

En tiempo continuo:

$$\begin{aligned} B_f &= 100e^{-iT} \\ B_c &= 100e^{-r_c T} = \left[100(1-Q_1) + 100RQ_1\right] e^{-iT} \end{aligned}$$

es decir, dividiendo por e^{-iT}:

$$e^{-sT} = 1 - Q_1(1-R) \Rightarrow Q_1 = \frac{1-e^{-sT}}{1-R} \tag{4}$$

También:

$$sT = -\ln\left[1 - Q_1(1-R)\right]$$

donde $T = 1$ en este caso, y $Q_1 < 1, R < 1$, siendo por tanto, una expresión muy similar a la anteriormente obtenida.

Además:

$$B_f - B_c = 10e^{-iT} - 100\left[1 - Q_1(1-R)\right] e^{-iT} = 100e^{-iT}(1-R)Q_1$$

que al igual que su analogo en tiempo discreto, muestra que el diferencial en $t = 0$ del precio del bono corporativo respecto del bono sin riesgo es igual al valor esperado del coste de insolvencia: $B_f.PD.LGD$.

A partir de la expresión (4) podemos estimar probabilidades de default utilizando spreads observados respecto del tipo de interés libre de riesgo. Dada una recovery rate R y unos spread de tipos con respecto al activo sin riesgo para una secuencia de bonos cupon cero que vencen a distintos horizontes, podriamos calcular las probabilidades de insolvencia para los distintos años.

Por otra parte, si creemos que tenemos una probabilidad de insolvencia objetiva Q', podemos deducir la prima de riesgo que está cotizando en el mercado:

$$s \approx Q'(1-R) + \Pr ima$$

[ver hoja de cálculo: "Expected loss from default.xls"] [ver Tabla 19.3 en pág.413 en Hull] Un cálculo más preciso se tiene calculando hoy, para cada periodo de tiempo hasta el vencimiento, el valor libre de riesgo de los flujos de caja que generará el bono en el futuro. La pérdida esperada hoy para cada uno de dichos periodos es igual al producto de la cantidad anterior por $1 - R$ y por la probabilidad de default Q , si la suponemos constante para todos los años. Calculamos el valor presente de cada una de dichas cantidades, multiplicando por el factor descuento apropiado, y agregamos a lo largo de los periodos hasta el vencimiento del bono. En este cálculo, $(1 - R)Q$ es un factor constante. Dicha suma debería ser igual al diferencial de precios (valor presente) entre ambos bonos, de donde podemos despejar la probabilidad Q.

2.3 Características de los spreads de CDS: Estimación de la probabilidad de insolvencia

El spread de un CDS debe ser aproximadamente igual al spread entre las TIR del bono de la empresa y el bono similar libre de riesgo. Supongamos que un inversor compra un bono a 5 años de una empresa que paga un 7% cada año, y simultaneamente contrata un CDS a 5 años para comprar protección contra un posible impago del bono, siendo el spread del CDS de 200 pb.. De este modo, el inversor convierte el bono con riesgo en un bono sin riesgo, que proporciona un 5% hasta el momento en que se produzca insolvencia, o hasta el vencimiento del bono. Si se produce insolvencia, el inversor puede cambiar el bono por su valor nominal, que puede invertir entonces al tipo libre de riesgo por el resto de los 5 años en que habia planeado su inversión.

Si el spread del CDS fuese inferior al spread de las TIR, el inversor podria obtener una rentabilidad superior al tipo libre de riesgo comprando el bono corporativo y comprando protección. Si fuese mayor que el spread entre las TIR, un inversor podría ponerse corto en el bono de la empresa y vender protección mediante un CDS, obteniendo de este modo un préstamo a tipo inferior al tipo libre de riesgo (que podria ceder a otros obteniendo un beneficio). Dada esta relación aproximada, distintos investigadores han deducido el valor del tipo de interés libre de riesgo comparando el spread del CDS con la TIR de los bonos corporativos.

De acuerdo con esta relación aproximada, se define la Base Bono-CDS como la diferencia entre el Spread del CDS y el spread entre las TIRes de ambos bonos:

Base Bono-CDS = Spread CDS - Spread TIRes bonos

El spread de TIRes se calcula restando de la TIR del bono corporativo la TIR del bono sin riesgo. La Base Bono-CDS deberia ser próxima a cero. Sin embargo, hay razones para que no lo sea:

- el bono se vende a un precio distinto de la par (si el precio está sobre la par, la TIR es baja y la base se reduce; si el precio está bajo la par, la base se eleva)

- hay riesgo de insolvencia de la contraparte en el CDS (el spread del CDS se reduce por este riesgo y disminuye la base)
- el contrato de CDS incluye una opcion de bono entregable más barato (la opción de que dispone el comprador del CDS eleva la prima y aumenta la base)
- los pagos por el CDS no incluyen el interés corrido sobre el bono que se entrega (que deberia pagar el comprador del CDS al vendedor al entregar el bono; esto reduce el spread y, con ello, reduce la base)
- la claúsula de reestructuración en el contrato de CDS incluye un pago del asegurador en caso de no insolvencia (aumentan los ingresos del asegurado y, con ello el spread del CDS y la base)
- LIBOR es mayor que la tasa libre de riesgo utilizada por el mercado (aumenta la base)

La probabilidad de insolvencia puede estimarse a partir de spreads de los CDS invirtiendo el ejercicio de valoración de CDS que vimos al comienzo.

También podemos hacer una cálculo aproximado, mucho más breve: Supongamos que el spread de crédito a 5 años de una empresa, ya sea medido por el spread CDS o el spread de TIRes de bonos o por el spread de un asset swap, es de 240 pb, y la recovery esperada en caso de insolvencia es de 40%. El tenedor de un bono de la empresa espera perder 2,40% por año por causa de insolvencia, ya que el spread de crédito puede considerarse como una tasa de pérdida promedio. Esto conduce a una estimación de la probabilidad media de insolvencia por año, sobre el periodo de 5 años, condicional en no insolvencia previa, de: $0,024/(1-0,40) = 3,33\%$.

En general, tenemos la intensidad de insolvencia media entre 0 y T (*hazard rate*):

$$\bar{\lambda} = \frac{s(T)}{1-R}$$

donde $s(T)$ es el spread de crédito (calculando con capitalización continua) a vencimiento T. En el ejercicio de calculo de CDS spreads (ver "Expected loss from defaults in a bond", pestaña "CDS spreads") nos daría: $\bar{\lambda} = 0,0124/0,6 = 2,066\%$, próxima a la hazard rate del 2% de la que se parte en dicho ejercicio.DIcho de otro modo, si partimos de una hazard rate del 2%, como se hace en ese ejercicio, y una $R = 0,40$, obtenemos: $s = (0,02)(0,60) = 0,0120$, muy próximo al CDS spread que se calcula en dicho ejercicio.
En la pestaña "Default" de esa hoja tenemos un spread de TIRes de 2% y una recovery de 0,40. Esto nos proporciona una estimación de la hazard rate de $\bar{\lambda} = 0,02/0,60 = 3,33\%$, muy próxima a la probabilidad de 3,03% que alli se estima.

EXAMPLE 19.3 [Hull, pág. 412]

Suppose that the CDS spreads for 3-, 5-, and 10-year instruments are 50, 60, and 100 basis points and the expected recovery rate is 60%. The average hazard rate over three years is approximately 0.005/(1 - 0.6) = 0.0125. The average hazard rate over five years is approximately 0.006/(1 - 0.6) = 0.015. The average hazard rate over 10 years is approximately 0.01/(1 - 0.6) = 0.025. From this we can estimate that the average hazard rate between year 3 and year 5 is (5 $\times$ 0.015$-$3$\times$ 0.0125)/2 = 0.01875.$The average hazard rate between year 5 and year 10 is (10 \times 0.025 - 5 \times\ 0.015)/5 = 0,035.$

2.4 Asset swaps y tipos de interés libres de riesgo

Tipos de interés libres de riesgo:

Dicho tipo puede ser el de bonos del Tesoro emitidos a igual plazo que la deuda corporativa. Los traders tambien suelen utilizar tipos LIBOR/swap. El tipo de interés libre de riesgo también suele aproximarse por el tipo LIBOR/swap menos 10 pb.. Tal estimación es razonable porque el riesgo de crédito de un swap es aproximadamente igual al que se deriva de un conjunto de préstamos a 6-meses a una contraparte con rating AA, y 10 pb. es una prima razonable para tal préstamo.

Para determinar probabilidades de default a partir de precios de bonos, el spread s es el diferencial entre la TIR del bono corporativo y la TIR de un bono del Tesoro de características similares.

Como hemos visto antes, el tipo de interés libre de riesgo puede también estimarse restando del spread del CDS la TIR de los bonos corporativos.

Asset swaps:

En un asset swap una parte (A) paga a otra (B) el cupón de un bono, con independencia de que dicho bono haga default o no. La contraparte paga LIBOR mas un spread, por ejempllo de 150 puntos. Si el bono se vende por debajo de la par, por ejemplo, a 95, entonces, además de los cupones, A paga a B 5% del nocional fijado al inicio. Si el bono vende por encima de la par, a 105 por ejemplo, entonces, además del LIBOR mas 150 pbs., B paga a A un 5% del nocional acordado al comienzo del asset swap. Esto hace que el valor presente del asset swap spread es igual a la diferencia entre el precio del bono corporativo y el precio de un bono similar libre de riesgo.

Si en vez de observar el precio del bono, solo sabemos que el asset swap spread acordado es de 150 pbs., esto significa que la diferencia entre los precios de ambos bonos debe ser igual al valor presente d eun flujo de 150 pbs. durante 5 años (si ese es el vencimiento del asset swap). Si dividimos tal cantidad por el valor presente de la pérdida esperada, tendremos una estimación de la probabilidad de default anual. Este ejercicio está realizado en azul en la pestaña "Default".

2.5 Comparación de diferentes estimaciones de probabilidades de insolvencia

Las estimaciones de intensidades de insolvencia que se deducen de (1) y las que se deducen de (3) suelen ser bastante diferentes. Para obtener estimaciones a partir de (3) era habitual utilizar yields cotizadas por Merril Lynch, una $R = 40\%$, y un tipo libre de riesgo igual al tipo swap al vencimiento deseado, menos 10 pb.. La tabla 19.5 en Hull (p. 415) muestra estas diferencias, tanto en términos absolutos como relativos. En términos relativos, la diferencia es menor según disminuye el nivel de rating, mientras que en términos relativos, la diferencia tiende a aumentar según disminuye la calidad crediticia.

[ver Tabla 19.6, p. 416 en Hull] Partiendo de los spread medios observados para cada rating respecto de bonos del Tesoro, si descontamos el spread del tipo libre de riesgo respecto de los bonos del Tesoro y el spread correspondiente a los default observados históricamente, tendremos el exceso de rentabilidad esperado para cada nivel de rating. En este cálculo, obtenemos el spread asociado a las insolvencias observadas históricamente multiplicando la intensidad de insolvencia Q estimada a partir de datos de bonos, por $1 - R$. En general, el exceso de rentabilidad esperado tiende a aumentar según se reduce la calidad crediticia. El exceso de rentabilidad varia con el tiempo, y sería interesante analizar sus determinantes.

El exceso de rentabilidad esperado se debe a la diferencia entre utilizar probabilidades riesgo-neutro, las que se derivan de los precios de los bonos, y probabilidades históricas (real-world). La diferencia puede deberse a:

- los bonos corporativos son relativamente iliquidos, por lo que los traders de deuda requieren una compensacion adicional que puede ser de alrededor de 25 pb.. Esto puede explicar gran parte de la rentabilidad en exceso esperada para los rating altos, aunque mucho menos de la rentabilidd esperada para rating bajos,

- La probabilidades subjetivas de insolvencia pueden ser sensiblemente mayores que las proporcionadas por Moody´s lo que puede generar probabilidades de insolvencia mas elevadas para cada año,

- Los bonos no entran en insolvencia independientemente unos de otros. Esto genera un riesgo sistematico, que no puede diversificarse y que requiere una compensación en rentabilidad,

- Las rentabilidades de la deuda suelen ser bastante asimétricas, con poco recorrido al alza. Esto hace que sea más dificil diversificar riesgos en una cartera de deuda que en una cartera de acciones. Para ello, sería necesario disponer de una gran cantidad de bonos diferentes. Para compensar este mayor riesgo sistematico puede ser necesaria de nuevo una cierta rentabilidad en exceso.

En general, deben utilizarse probabilidades riesgo-neutro para valorar derivados, mientras que deben utilizar probabilidades historicas para hacer extrapolaciones mediante simulaciones que permitan calcular pérdidas esperadas. En el uso de probabilidades riesgo-neutro descontamos los flujos de caja mediante el tipo de interés libre de riesgo, mientras que en el cálculo de probabilidades históricas debemos añadir en el descuento una prima de riesgo que, lamentablemente, no es observable.

3 Modelo estructural de insolvencia: el modelo de Merton

Este es un modelo muy conocido que, aunque tiene como mérito principal el propocionar un valor para la deuda emitida por una empresa, se ha utilizado principalmente para la estimación de probabilidades de insolvencia.

El modelo de Merton considera que una empresa quiebra cuando el valor de sus activos, que es aleatorio, cae por debajo de su nivel de deuda. Se supone que: 1) no hay fricciones en la economía: sin impuestos, y con costes de transacción nulos, 2) el proceso estocástico V_t que representa el valor de los activos de la empresa es independiente de cómo se financia la empresa y también del nivel de deuda, D, 3) la dinámica de V_t sige un proceso Browniano geométrico, 4) sólo se puede producir insolvencia en el momento T.

El valor de los activos de la empresa en cada momento es igual al valor de los bonos emitidos, con un nominal D, más el valor de las acciones: $V_t = B_t + E_t$. En caso de quiebra de la empresa, tienen preferencia en el cobro los bonistas, recibiendo los accionistas el valor residual que pudiera quedar tras hacer los pagos a los propietarios de deuda. Por tanto, el valor de las acciones de la empresa al vencimiento del bono puede interpretarse como el precio de una opción call (proporcional al número de acciones) sobre los activos de la empresa con el nivel de deuda como precio de ejercicio.

$$E_T = \max(V_T - D, 0)$$

de modo que si $V_T < D$ entonces los accionistas no reciben nada, mientras que cuando $V_T > D$, se paga el bono y los accionistas reciben $V_T - D$. La opción se ejercerá si la empresa no hace default, pues en ese caso da derecho a reclamar los activos de la empresa V_T a precio D.

Por tanto, el valor a vencimiento de los bonos, es decir, de la deuda es:

$$B_T = D - \max(D - V_T, 0) \equiv \min(V_T, D)$$

pero $\max(D - V_T, 0)$ no es sino el valor de una opción put sobre el valor de los activos de la empresa, V_T, con vencimiento en T, y precio de ejercicio D. Esta put se ejercería si la empresa hace default, pues permitiría ofrecer los activos V_T a precio $D > V_T$. Por tanto, la deuda con riesgo puede interpretarse como una cartera compuesta por una posición larga en un bono sin riesgo de nominal D, el mismo que tiene la deuda con riesgo, junto con una posición corta en la opción put mencionada.

3.1 Valoración de acciones y bonos

Supongamos que el valor de los activos de la empresa siguen un proceso browniano geometrico:

$$dV_t = \mu_V V_t dt + \sigma_V V_t dW_t \tag{5}$$

que implica:

$$\ln(V_t/V_0) \sim N\left(\left(\mu_V - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)t;\ \sigma_V^2 t\right) \Rightarrow V_t = V_0 \exp\left(\left(\mu_V - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)t + \sigma_V W_t\right)$$

Precio de las acciones:

De acuerdo con el argumento anterior, y suponiendo que no hay dividendos, el precio de las acciones en $t \leq T$ es igual al valor de una opción call con precio de ejercicio D. Como es sabido, para valorar derivados bajo la medida riesgo-neutro en el caso del proceso Browniano geométrico, hemos de sustituir la tasa media de crecimiento del proceso por el tipo de interés libre de riesgo. De este modo, utilizando las expresiones de Back-Scholes, tenemos:[3]

$$E_0 = V_0.N(d_1) - De^{-rT}.N(d_2),\ con\ d_1 = \frac{\ln(V_0/D) + \left(r + \sigma_V^2/2\right)T}{\sigma_V\sqrt{T}}, d_2 = d_1 - \sigma_V\sqrt{T} \tag{6}$$

$N(d_2)$ es la probabilidad riesgo-neutro de que la opción call se ejerza a vencimiento, es decir, la probabilidad de que no se produzca insolvencia, ya que la opción call se ejerce cuando el precio de ejercicio D sea inferior al precio del subyacente, V_0, cuando la empresa no hace default.

Si utilizamos la representación de la deuda con riesgo como una cartera formada por un bono sin riesgo y una opción put, obtenemos que su precio en $t \leq T$ es:

[3] Recordemos que si el precio S_t del activo subyacente sigue un proceso browniano geométrico con drift μ y volatilidad σ, el precio de una opción call con precio de ejercicio K y tiempo a vencimiento T es:

$$c = S.N(d_1) - Ke^{-rT}.N(d_2)$$

donde $d_1 = \frac{\ln(S/Ke^{-rT}) + \left(r+\sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$; $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$
siendo r el tipo de interés libre de riesgo y siendo la probabilidad riesgo-neutro de ejercicio de la opción igual a $N(d_2)$.

El precio de una opción put con igual precio de ejercicio sería:

$$p = S\left(N(d_1) - 1\right) - Ke^{-rT}\left(N(d_2) - 1\right)$$

$$B_0 = V_0 - E_0 = De^{-rT} - p(V_0, D, T)$$

Esta expresión no es sino la conocida paridad put-call,[4] puesto que, como hemos visto, E_0 es el precio de una opción con el mismo subyacente V_0 y precio de ejercicio, D, que la put.

Despejando en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} p(V_0, D, T) &= De^{-rT} - V_0 + E_0 = De^{-rT} - V_0 + \left[V_0 N(d_1) - De^{-rT} N(d_2)\right] \quad (7) \\ &= -V_0 N(-d_1) + De^{-rT} N(-d_2) \quad (8) \end{aligned}$$

y puede comprobarse facilmente que es la misma expresión que habriamos obtenido aplicando el modelo de Black y Scholes. Ahora podemos deducir el precio del bono de la empresa:

Precio del bono:

$$\begin{aligned} B_0 &= De^{-rT} - p(V_0, D, T) = De^{-rT} + V_0 N(-d_1) - De^{-rT} N(-d_2) = \quad (9) \\ &= De^{-rT} \underbrace{N(d_2)}_{1-PD} + V_0 \frac{N(-d_1)}{N(-d_2)} \underbrace{N(-d_2)}_{PD} \quad (10) \end{aligned}$$

3.2 Recuperación en caso de insolvencia

Utilizamos (8) para escribir el precio de la put con subyacente V_T y precio de ejercicio D como un precio esperado con probabilidades riesgo-neutro:

$$p = e^{-rT} N(-d_2) \left[-V_0 e^{rT} N(-d_1)/N(-d_2) + D\right] + e^{-rT} N(d_2).0$$

Si no hay default, a vencimiento dicha put tiene un valor cero. Vemos en esta expresión que los dos primeros factores son el factor descuento y la probabilidad de insolvencia, por lo que el factor dentro del corchete debe ser el *valor esperado de la put en caso de insolvencia*,

$$E\left(put \;/\; \text{Insolvencia}\right) = -V_0 e^{rT} N(-d_1)/N(-d_2) + D$$

Si se produce una insolvencia, $V_T < D$, por lo que el valor de la put es: $p = \max(D - V_T, 0) = D - V_T$. Por tanto, el valor de los activos de la empresa a vencimiento en el caso de insolvencia es: $V_T = D - p$, y el precio de los bonos será:

[4] La paridad put-call establece la relación entre los precios de opciones put y call, p, c, con igual vencimiento T, subyacente y precio de ejercicio X:

$$S - c = Xe^{-rT} - p$$

$$\text{Insolvencia} \Rightarrow \text{Cantidad recuperada} = B_T = \min(V_T, D) = V_T = D - p$$

por lo que el nominal que esperamos recuperar es:

$$E\left(\text{Cantidad recuperada / Insolvencia}\right) = D - E\left(put \text{ / Insolvencia}\right) =$$

$$= D - \left[-V_0 e^{rT} N(-d_1)/N(-d_2) + D\right] = V_0 e^{rT} N(-d_1)/N(-d_2)$$

y, en términos porcentuales, la *Recovery rate* es:

$$R = \frac{E\left(\text{Cantidad recuperada / Insolvencia}\right)}{D} = \frac{V_0 e^{rT}}{D} \frac{N(-d_1)}{N(-d_2)} \tag{11}$$

3.2.1 Reinterpretando el precio del bono

La expresión anterior nos permite reinterpretar el precio (9) del bono corporativo como un precio esperado, riesgo-neutro. En efecto, en la expresión de B_0 el primer sumando es el producto del precio del bono libre de riesgo, multiplicado por la probabilidad de no default $N(d_2)$. El segundo sumando multiplica la probabilidad de default por la recuperacion esperada en caso de insolvencia $E\left(\text{Cantidad recuperada / Insolvencia}\right)$ que acabamos de obtener, descontada. Esto implica que podemos escribir:

$$\begin{aligned} B_0 &= B_f(1-PD) + PD.R.De^{-rT} = B_f(1-PD) + B_f.PD.R \\ &\Rightarrow B_f - B_0 = B_f PD(1-R) = B_f PD.LGD \end{aligned} \tag{12}$$

recuperando asi una expresion similar a la que obtuvimos en la seccion (2.2) .

Para calcular la Tasa de Recuperación en caso de insolvencia, que en el modelo de Merton es endógena, podemos utilizar el hecho de que que el diferencial de precios del bono privado respecto del bono sin riesgo debe ser igual al Valor presente de la pérdida esperada condicional en insolvencia (default), es decir, el valor de los bonos a vencimiento, multiplicado por la probabilidad de insolvencia y por la LGD:

$$B_f - B_0 = B_f.LGD.PD,$$

donde PD denota la Probabilidad de insolvencia, y estimariamos R mediante: $R = 1 - LGD$.

El precio del bono corporativo también puede escribirse:

$$B_0 = B_f + B_f PD.LGD = e^{-rT}\left\{D - \underbrace{[1-N(d_2)]}_{PD}\left[D - V_0 e^{rT}\frac{1-N(d_1)}{1-N(d_2)}\right]\right\}$$

que es el valor presente de la cantidad que esperamos recibir a vencimiento (T) : con probabilidad $N(d_2)$ recibimos D, y con probabilidad $1 - N(d_2)$ recibimos $V_0 e^{rT} \frac{1-N(d_1)}{1-N(d_2)}$. También es el valor presente de la diferencia entre el nominal del bono y la cantidad que esperamos perder que, a su vez, es la diferencia entre el valor nominal del bono, D, y la cuantia esperada de recuperación si hay default, que antes obtuvimos, es decir: $D - V_0 e^{rT} \frac{1-N(d_1)}{1-N(d_2)}$.

3.3 Utilización empírica

Para trabajar con estas expresiones, necesitamos calcular el valor numérico de $N(d_2)$, y para ello, necesitamos conocer V_0 y σ_V, que no son directamente observables. Si la empresa cotiza en bolsa, conocemos E_0, y también podríamos estimar la volatilidad σ_E. Por tanto, (6) proporciona una ecuación para estimar V_0 y σ_V.

Por otra parte, por el lema de Ito:[5]

$$\sigma_E E_0 = \frac{\partial E}{\partial V} \sigma_V V_0$$

es decir,

$$\sigma_E E_0 = N(d_1) \sigma_V V_0$$

que nos da una segunda ecuación para estimar dichos parámetros.

Ejemplo: Supongamos conocidas la capitalización bursatil de una empresa E_0 y la volatilidad de sus acciones, σ_E. La empresa ha emitido un bono con determinado nominal D,y plazo de vencimiento T. Utilizando el tipo de interés sin riesgo, lo primero que podemos hacer es calcular el precio del bono sin riesgo de igual nominal, D. Luego, resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones para obtener V_0, σ_V. A partir de ahí, la Probabilidad de insolvencia es $N(-d_2)$. Podemos calcular el precio del bono corporativo (con riesgo) mediante: $B_0 = V_0 - E_0$ y su TIR, despejando y de la expresión: $De^{-yT} = B_0$, asi como el spread respecto del tipo de interés libre de riesgo. Por ultimo, utilizamos la relación: Diferencial de precio del bono privado respecto del bono sin riesgo = valor presente de la pérdida esperada condicional en insolvencia (default): $B_f - B_0 = B_f.LGD.P(insolvencia)$, expresión de la que podemos obtener la tasa de Recuperación (Recovery rate), mediante: $R = 1 - LGD$.

Hull propone el siguiente ejercicio: supongamos una empresa con un valor de su equity de \$3 millones y una volatilidad del 80%, y debe pagar una deuda de \$10 millones dentro de un año. El tipo de interés libre de riesgo es 5%. Las dos ecuaciones descritas en el texto nos proporcionan: $V_0 = 12,40$ y

[5] El lema de Ito afirma que dado el proceso: $dx_t = a(x,t)dt + b(x,t)dW_t$, y una función $E(x,t)$ tenemos: $dE(V,t) = \left(\frac{\partial E}{\partial V} a + \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial V^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial E}{\partial V} b(x,t) dW_t$

de modo que si el valor de los activos sigue el browniano: $dV_t = \mu_V V_t dt + \sigma_V V_t dW_t$

y consideramos la función: $E = V.N(d_1) - De^{-rT}.N(d_2) = c(V_t, D, \sigma_V, r, T, t)$

tendremos: $dE_t = (...) \, dt + \frac{\partial E}{\partial V} \sigma_V V_t dW_t$, por lo que el valor de las acciones sigue asimismo un proceso Browniano geométrico con volatilidad: $\sigma_E = \frac{\partial E}{\partial V} \sigma_V \frac{V}{E}$

$\sigma_V = 0,2123$. Esto implica $d_2 = 1,1408$, por lo que la probabilidad de insolvencia es $N(d_2) = 0,127$, o 12,7%. El valor de mercado actual de la deuda es: $B_0 = V_0 - E_0 = 12,40 - 3 = 9,40$. El valor presente del nominal de la deuda es $B_f = 10e^{-0,05\text{x}1} = 9,51$. Por tanto, la pérdida esperada sobre la deuda es: $(B_f - B_0)/B_f = (9,51 - 9,42)/9,51 = 1,2\%$ del valor que tiene la deuda en caso de no insolvencia. Finalmente, si comparamos esta cantidad con la probabilidad de insolvencia, obtenemos la recovery esperada en caso de insolvencia: $(B_f - B_0)/B_f = (1-R)(12,7) \Rightarrow R = 1 - (12,7)^{-1}(B_f - B_0)/B_f = (12,7 - 1,2)/12,7$, aproximadamente 91%.

Ejemplo: Supongamos conocidos el valor de mercado de los activos de la empresa, V_0, asi como las volatilidad de los activos, σ_V, el tipo libre de riesgo y el nivel de deuda, D, emitida a un plazo T. Calculariamos el precio del bono libre de riesgo, B_f, asi como las cantidades: $\ln(V_0/B_f), \sigma_V\sqrt{T}, N(d_1), N(d_2)$. Entonces: $E_0 = V_0N(d_1) - De^{-rT}N(d_2)$. El precio del bono corporativo puede calcularse de dos modos equivalentes: $B_0 = V_0 - E_0$, ó: $B_0 = De^{-rT} - p$. Podremos calcular la TIR y el spread sobre el bono sin riesgo, igual que en el ejemplo anterior. Finalmente, conocido $N(d_2)$, la Probabilidad de insolvencia $1 - N(d_2)$, podemos calcular la Pérdida esperada en caso de insolvencia (LGD) y la tasa de Recuperación, R, de dos modos distintos: *a*) despejando en $B_f - B_0 = B_f.LGD.P(insolvencia)$, o *b*) evaluando numéricamente la expresión de la LGD: $V_0e^{-rT}N(-d_1)/N(-d_2)$ y dividiendola por el nominal D.

3.4 Riesgo de crédito y Spread(prima) de crédito

A vencimiento, el riesgo de crédito es la diferencia entre el precio de mercado del bono de la empresa y de un bono sin riesgo con una estructura de pagos similar al bono corporativo:

$$CL = B_f - B_0$$

que por (12) vemos que será igual a

$$CL = B_f PD.LGD$$

donde el primer factor es la Probabilidad de default y $V_0\frac{N(-d_1)}{N(-d_2)}$ es el valor presente de la Recovery cuando se produce el default, por lo que el término en el corchete es el valor presente de la pérdida esperada en caso de quiebra: Loss given Default (LGD). Por tanto, CL es el valor esperado y descontado de la pérdida sobre el crédito en caso de default:

Calculamos ahora el spread de crédito que se deriva del modelo de Merton. Dicho spread es la diferencia entre las TIRes (con capitalización continua) a vencimiento del bono sin riesgo y el bono con riesgo.[6] Por tanto:

[6] Recordemos que en un bono cupón cero con precio P y TIR i y vencimiento en T periodos tendriamos: $P = e^{-iT}$, de modo que: $i = -\frac{1}{T}\ln P$, que seria la TIR con capitalización continua en función del precio del bono.

$$
\begin{aligned}
s(\sigma_V, T, r) &= -\frac{1}{T}(\ln B_0 - \ln B_f) = -\frac{1}{T}\ln\frac{B_0}{B_f} = -\frac{1}{T}\ln\left(\frac{De^{-rT}N(d_2)+V_0N(-d_1)}{De^{-rT}}\right) = \\
&= -\frac{1}{T}\ln\left(N(d_2)+\frac{V_0}{De^{-rT}}N(-d_1)\right)
\end{aligned}
$$

y como d_1 puede escribirse:

$$d_1 = \frac{-\ln(De^{-rT}/V_0) + \frac{1}{2}\sigma_V^2 T}{\sigma_V\sqrt{T}}$$

vemos que el spread de crédito depende unicamente de la volatilidad del valor de los activos, σ_V, y del ratio De^{-rT}/V_0, que es el valor presente de la deuda de la empresa en relación con el valor de sus activos y es, por tanto, una medida del grado de apalancamiento de la empresa. Puede probarse que la dependencia respecto de ambos factores es positiva en ambos casos.

3.5 El modelo KMV de Moody's

El modelo Credit Monitor KMV de Moody's tambien utiliza el enfoque estructural para deducir probabilidades de insolvencia. Su objetivo fundamental es permitir una estructura de deuda más rica que la del modelo de Merton, que considera unicamente un bono cupón cero. Sin embargo, para deducir dichas probabilidades utilizando datos de equity, hay que conocer la estructura de deuda de la empresa. Asimismo, Moody's utiliza un procedimiento propio, no publicado, para estimar la volatilidad del valor de los activos.

Para calcular el nivel de endeudamiento que conduciría a insolvencia, considera que se trata de un nivel de deuda situado entre la deuda a corto plazo y el nivel total de endeudamiento. Para Moody's, la empresa quebrará si el valor de sus activos cae por debajo de este umbral de referencia. Las reglas prácticas generalmente utilizadas (sin mucha justificación teórica) son:

$$
\begin{aligned}
D &= ST + 0,5.LT \; si \; LT/ST < 1,5 \\
D &= ST + (0,7.LT - 0,3.ST) \text{ en caso contrario}
\end{aligned}
$$

donde ST denota la deuda a corto y LT la deuda a largo plazo.

En comparación con el modelo de Merton, el modelo KMV estima:

$$
\begin{aligned}
Merton &: \; PD_i = \Phi\left(-\frac{\ln(V_0)-\ln(D)+\left(r-\sigma_V^2/2\right)T}{\sigma_V\sqrt{T}}\right) \\
KMV &: \; EDF = \Xi\left(-\frac{\ln(V_0)-\ln(D)+\left(r-\sigma_V^2/2\right)T}{\sigma_V\sqrt{T}}\right)
\end{aligned}
$$

donde Ξ denota una regla interna de Moody's que asocia a cada empresa una probabilidad de insolvencia, denominada Expected Default Frequency (EDF). El argumento de ambas funciones se conoce como Distancia a Default (DD), ya que es el número de desviaciones tipicas en el que debe cambiar el precio del activo para que se produzca insolvencia en T años [ver Chamizo y Novales (2017)]. Según disminuye la DD, se hace más probable que la empresa haga default. En el ejemplo anterior, la DD de la empresa es 1,14 desviaciones típicas.

El modelo KMV se desvía del uso de la distribución Normal, que implica generalmente probabilidades muy reducidas ($N(-DD)$ sería muy reducido) debido a ser una distribución de colas finas. A cambio, KMV calibra sus EDF para ajustar las frecuencias de insolvencia observadas en el pasado. Así, si se ha observado históricamente que 2 empresas de cada 1000 con una DD de 3 han hecho insolvencia en le horizonte de 1 año, entonces a las empresas con una $DD = 3$ se les asigna una $EDF = 0,002$. Por tanto, las empresas se agrupan en clases o grupos de acuerdo con su DD y se les asigna una EDF.

Una vez estimadas las EDF, se puede establecer una asociación de modo que se asigne a cada empresa un determinado nivel de rating.

EDFs y niveles de rating correspondientes			
EDF	S&P	EDF	S&P
0,02-0,04%	AAA	0,72-1,01%	BB/BB-
0,04-0,10%	AA/A	1,01-1,43%	BB-/B+
0,10-0,19%	A/BBB+	1,43-2,02%	B+/B
0,19-0,40%	BBB+/BBB-	2,02-3,45%	B/B-
0,40-0,72%	BBB-/BB		

Aunque tal asociación es muy popular entre traders, tiene un problema, pues las EDF son estimaciones del riesgo de crédito hechas en un determinado momento de tiempo sobre horizontes de 1 año, mientras que los rating son estimaciones a lo largo de un ciclo y, por tanto, sobre períodos de tiempo más largos.

4 Correlaciones en default

Este modelo trata de representar las correlaciones entre los tiempos a default de las empresas. Sean t_1, t_2 los tiempos a default de las empresas 1 y 2, sobre los que no podemos suponer Normalidadpor su naturaleza, al ser variables discretas y positivas.

Transformamos ambos mediante:

$$x_1 = N^{-1}\left[Q_1(t_1)\right];\ x_2 = N^{-1}\left[Q_2(t_2)\right]$$

donde Q_1, Q_2 son las distribuciones de probabilidad de los tiempos a default. Puede utilizarse con probabilidades de default riesgo neutro, que pueden obtenerse a partir de los precios de los bonos así como delos spread de los CDS como ya se ha indicado, o con probabilidades de default reales (real world). Por construcción, x_1 y x_2 siguen una distribución N(0,1), y supondremos que su relacion esta representada por una cópula Gaussiana. El parametro de cópula suele estimarse a partir de la correlación entre las rentabilidades de las acciones de ambas empresas.

4.1 Modelo de cópula Gaussiana para el tiempo a default (Vasicek)

[Sec. 11.5 en Hull, Risk Management and Financial Institutions, 4 edicion]

Para evitar tener que definir una correlación diferente entre x_i y x_j para cada par de empresas en el modelo de cópula Gaussiana, suele utilizarse un sencillo modelo unifactorial:

$$x_i = a_i F + \sqrt{1 - a_i^2} Z_i$$

donde F representa un factor común, que posiblemente recoja la situación general de la economía y que puede estar representado por variables macroeconómicas como la tasa de paro, el crecimiento de la producción industrial, etc.. Dicho factor afecta al default de todas las empresas, y Z_i es un factor especifico que afecta unicamente al default de la empresa i. Suponemos que tanto F como Z_i se distribuyen $N(0, 1)$, lo que significa que los datos de serie temporal para el factor F deberían estandarizarse. Las variables Z_i son independientes entre sí e independientes del factor F. Las parámetros a_i son constantes entre -1 y +1. El modelo implica que la correlación entre x_i y x_j es $a_i a_j$.[7] Es un modelo de cópula Gaussiana porque las x_i siguen una distribución multivariante Normal y tienen todas ellas distribución Normal. Otros modelos de cópula factorial pueden obtenerse utilizando otras distribuciones con esperanza cero y varianza 1, como por ejemplo, una t-Student estandarizada.

Si la probabilidad de que la empresa i haga default antes de T es $Q_i(T)$, entonces bajo la cópula Gaussiana, la empresa i hará default antes de T , es decir: $t_i < T$, si $N(x_i) < Q_i(T)$, o, lo que es lo mismo, si: $x_i < N^{-1}\left[Q_i(T)\right]$.

Pero, utilizando el modelo factorial tenemos que, condicional en el valor numérico del factor común F :

$$\begin{aligned} Q_i(T \quad | \quad F) &= P\left(t_i < T \mid F\right) = P\left[x_i = a_i F + \sqrt{1 - a_i^2} Z_i < N^{-1} Q_i(T) \mid F\right] = \\ &= P\left(Z_i < \frac{N^{-1}\left[Q_i(T)\right] - a_i F}{\sqrt{1 - a_i^2}} \mid F\right) = N\left(\frac{N^{-1}(Q_i(T) - a_i F}{\sqrt{1 - a_i^2}}\right) \end{aligned}$$

Para estimar $Q_i(T)$ tendríamos que integrar utilizando la distribución de probabilidad del factor común F. Consideraríamos entonces valores alternativos

[7] La extensión multivariante seria:
$x_i = a_{i1} F_1 + a_{i1} F_2 + ... + a_{iM} F_M + \sqrt{1 - a_{i1}^2 - ... - a_{iM}^2} Z_i$
estando los factores incorrelacionados entre si y con distribución $N(0, 1)$. La correlación entre x_i y x_j seria: $\sum_{m=1}^{M} a_{im} a_{jm}$.

de F con sus respectivas probabilidades asociadas, calcularíamos $Q_i(T \mid F)$ yluego obtendríamos $Q_i(T)$ mediante $Q_i(T) = \sum_{j=1}^{n} Q_i(T \mid F_j)$.

Si Q_i y a_i son iguales para todos los emisores, tendremos que $\rho = a_i^2$ por lo que tendriamos una tasa de insolvencia:

$$P\left(t_i < T \mid F\right) = N\left(\frac{N^{-1}(Q(T) - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

4.2 Estimación de la tasa de insolvencia (Default Rate)

Si tenemos una cartera de N empresas, cada una de ellas con una probabilidad $Q(T)$ de insolvencia antes de T, la probabilidad de tener exactamente k defaults antes de T, condicional en el valor numérico de F, es, de acuerdo con el modelo de Merton:

$$\frac{N!}{(N-k)!k!} Q(T \mid F)^k \left[1 - Q(T \mid F)\right]^{N-k}$$

ya que, condicional en el valor numérico del factor F, los tiempos a default son independientes.

En carteras grandes, esta expresión puede interpretarse como el porcentaje de defaults antes de T, es decir, como una default rate en el horizonte T. La *Default Rate* puede interpretarse como la probabilidad de insolvencia de una empresa, o como el porcentaje de empresas que pueden caer en insolvencia, y nos preguntamos hasta donde puede elevarse en una situación desfavorable.

Si $a_i > 0$, un descenso en el factor F implicaría un aumento en $Q_i(T \mid F)$ y, por tanto, un aumento en la Default Rate, y lo que queremos saber es en cuanto pueden deteriorarse las perspectivas de la cartera de crédito.

Como $F \sim N(0,1)$, $N(F) \sim U(0,1)$, tenemos:

$$P\left[F < N^{-1}(Y)\right] = Y$$

es decir, aplicando a ambos lados de la desigualdad anterior la transformación $g(x) = N\left(\frac{N^{-1}(Q_i(T) - \sqrt{\rho}x}{\sqrt{1-\rho}}\right)$que tiene derivada negativa, tenemos:

$$P\left[N\left(\frac{N^{-1}(Q_i(T) - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}\right) > N\left(\frac{N^{-1}(Q_i(T) - \sqrt{\rho}N^{-1}(Y)}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right] = Y$$

y el término de la izquieerda es la Default Rate, de modo que tenemos:

$$Y = P\left[Default\ rate > N\left(\frac{N^{-1}(Q_i(T) - \sqrt{\rho}N^{-1}(Y)}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right]$$

donde $Q_i(T)$ es la probabilidad de insolvencia antes de T de la empresa i.

Denotemos por $WCDR(T, X)$ la "worst case default rate", la peor tasa de insolvencia que podemos tener antes del instante T con probabilidad X. Es decir, con una probabilidad de $X\%$, confiamos que la Default rate será inferior a $WCDR(T,X)$, un nivel que queremos encontrar. Sustituyendo en la expresion anterior $Y = 1 - X$, y teniendo en cuenta que: $1 - X = P(DR > A) \Rightarrow X = P(DR < A)$, obtenemos:

$$WCDR(T,X) = N\left(\frac{N^{-1}(Q_i(T)) + \sqrt{\rho}N^{-1}(X)}{\sqrt{1-\rho}}\right) = N\left(\frac{N^{-1}(PD) + \sqrt{\rho}N^{-1}(X)}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

donde tambien hemos utiilzado que $N(-x) = 1 - N(x)$.

De este modo caracterizamos una distribución de probabilidad sobre la tasa de default, DR. Si multiplicamos estas probabilidades por la LGD media y por la Exposición al riesgo promedio por crédito concedido, tendremos la pérdida esperada en el peor escenario.

Notese que si en la expresion anterior la correlación entre los tiempos a default de los distintos créditos fuese igual a cero, $\rho = 0$, tendriamos: $WCDR = PD$. Según aumenta ρ también aumenta $WCDR$.

Ejemplo: Supongamos que un banco presta 100 millones de euros a clientes. La probabilidad de default a 1 año de cada crédito es 2%, y la Recovery media es 60%. El parámetro ρ es 0,1. Tendremos:

$$WCDR(1;\ 0,999) = N\left(\frac{N^{-1}(0,02) + \sqrt{0,1}N^{-1}(0,999)}{\sqrt{1-0,1}}\right) = 0,128$$

por lo que la Perdida esperada en el peor escenario (Worst case expected loss), definida como el percentil 0,1% es:

$$WCEL = 100(0,128)(1 - 0,60) = 5,13 \text{ millones de euros}$$

Es decir, con una probabilidad del 99,9% la Default Rate sera inferior a 12,8% y las perdidas no serían superiores a 5,13 millones de euros.

4.3 Estimación del modelo

Para estimar el modelo, si DR es la default rate y $G(DR)$ su funcion de distribucion, tenemos para la Default rate observada:

$$WCDR = N\left(\frac{N^{-1}(PD_T) + \sqrt{\rho}N^{-1}(G(WCDR))}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

donde hemos sustituido el umbral de probabilidad deseado por su equivalente, $G(WCDR)$.

Pero esta ecuación es válida para cualquier umbral de probabilidad, no solo para los cuantiles extremos ppues para obtenerla no hemos hecho ningun supuesto en ese sentido. De modo que podemos aplicarla a cualquier nivel de probabilidad y la PD asociada. Despejando, tenemos:

$$G(DR) = N\left(\frac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}(DR) - N^{-1}(PD_T)}{\sqrt{\rho}}\right)$$

siendo PD_T la probabilidad de Default antes de T.

Diferenciando, tenemos la función de densidad de la Default Rate,

$$g(DR) = \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} \exp\left\{ \frac{1}{2} \left[\left(N^{-1}(DR)\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}(DR) - N^{-1}(PD)}{\sqrt{\rho}} \right)^2 \right] \right\}$$

Para obtener esta función de densidad hemos tenido en cuenta que: $\frac{dN^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{dN(x)/dx}$ y también que: $\frac{dN(x)}{dx} = \phi(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-x^2/2}$. Por otra parte: $\frac{dN(u(x))}{dx} = \phi(u(x))\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\pi}e^{-(u(x))^2/2}\frac{du}{dx}$. En el caso de la función $u(x) = \frac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}(x)-N^{-1}(PD_T)}{\sqrt{\rho}}$ tenemos: $\frac{dN(u(x))}{dx} = \frac{1}{2\pi}\exp\left[\left(\frac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}(x)-N^{-1}(PD_T)}{\sqrt{\rho}}\right)^2/2\right]\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}$.

Para estimar por Maxima Verosimilitud:

1. escogemos valores iniciales para PD y ρ
2. calculamos el logaritmo de la funcion de densidad para cada observacion de DR
3. utilizamos Solver o un optimizador para buscar sobre PD y ρ

Con los datos que siguen, de Hull (Risk Management and Financial Institutions), 4 edicion, las estimaciones son: $\rho = 0,108, PD = 1,41\%$. Estos valores numéricos generan una WCDR al 99,9% de confianza: $WCDR(0,999) = 10,6\%$ por año.

TABLE 11.4 Annual Percentage Default Rate for All Rated Companies, 1970–2013

Year	DRate	Year	DRate	Year	DRate
1970	2.621	1985	0.960	2000	2.852
1971	0.285	1986	1.875	2001	4.345
1972	0.451	1987	1.588	2002	3.319
1973	0.453	1988	1.372	2003	2.018
1974	0.274	1989	2.386	2004	0.939
1975	0.359	1990	3.750	2005	0.760
1976	0.175	1991	3.091	2006	0.721
1977	0.352	1992	1.500	2007	0.401
1978	0.352	1993	0.890	2008	2.252
1979	0.088	1994	0.663	2009	6.002
1980	0.342	1995	1.031	2010	1.408
1981	0.162	1996	0.588	2011	0.890
1982	1.032	1997	0.765	2012	1.381
1983	0.964	1998	1.317	2013	1.381
1984	0.934	1999	2.409		

Se pueden obtener otros modelos de cópula factorial más realistas utilizando distribuciones para F o para Z_i con colas mas gruesas que la Normal, si bien habria que estandarizarlas para que tuviesen esperanza cero y varianza igual a uno. En ese caso, tendriamos:

$$WCDR(T,X) = \digamma\left(\frac{\Psi^{-1}(PD) + \sqrt{\rho}\Theta^{-1}(X)}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

siendo $\digamma, \Psi, \Theta$ las funciones de distribución elegidas para Z_i, F, x_i , y recordando que $X = P(DR < WCDR) \equiv G(WCDR)$, tenemos:

$$G(DR) = \Theta\left(\frac{\sqrt{1-\rho}\digamma^{-1}(DR) - \Psi^{-1}(PD)}{\sqrt{\rho}}\right)$$

5 CVA y DVA (cap.20 en Hull)

- Exposición al crédito en derivados
- CVA
- El impacto de una nueva transacción
- Riesgo-CVA
- Wrong-way risk
- DVA
- Ejemplos

6 VaR de una cartera de crédito (Credit VaR, cap. 21 en Hull)

- Modelo de Vasicek: El modelo unifactorial de Vasicek con cópula Gaussiana que acabamos de ver nos permite estimar el VaR de una cartera de crédito. Hemos visto como estimar el umbral $WCDR(T,X)$ por debajo del cual estará el porcentaje de insolvencias con una probabilidad $X\%$. Si lo multiplicamos por la exposición media por préstamo y por la LGD media, tendremos el VaR a horizonte T años para la cartera de crédito a un nivel de confianza $X\%$. Basilea recomienda $X = 99,9\%$.
- Credit Risk Plus
- CreditMetrics. Matrices de transición de rating. El ajuste por CVA a lo largo de las transiciones de rating. Simulación de transiciones de rating correlacionadas entre sí.
- Credit-sensitive instruments in the Trading book [si es necesario, ver antes Fundamental Review of Trading Book (Capítulo 17)]. Incremental risk charge: introducido para evitar que las exposiciones en el trading book

estén sujetas a menores requisitos de capital que las que se incluyen en el banking book. El capital requerido para un bono incluido en el trading book es un múltiplo del VaR 99,9% a 10 dias (sec. 15.6). Si dicho bono se incluye en el baking book, tratado entonces como un préstamo, el capital requerido se basará en el VaR 99,9% a 1 año (sec. 15.8), y la primera de estas estimaciones será generalmente mucho menor, por lo que los bancos tienden a incluir los instrumentos de crédito, siempre que sea posible, en el trading book. Inicialmente, Basilea II introdujo en 2005 un incremental default risk charge (IDRC) que se calcularia sobre el VaR al 99,9% a 1 año para instrumentos de crédito del trading book que estuvieran expuestos a posibles insolvencias. Posteriormente, la crisis mostró que muchas de las pérdidades de los bancos se produjeron no tanto por insolvencias, como por cambios en rating, aumentos de spreads, pérdida de liquidez, etc., lo que condujo a una modificación del cálculo de esta correción, que se transformó en el incremental risk charge (IRC). La IRC requiere que los bancos calculen el VaR al 99,9% a horizonte un año teniendo en cuenta posibles insolvencias y posibles cambios en los rating de crédito. Al igual que con la IDRC, la idea es fijar el nivel de capital la máximo de las cantidades que surgen a partir de calculos de trading book y de cálculos de banking book. Como los instrumentos sujetos a IRC están en el trading book, se pide a los bancos que estimen el periodo necesario para la venta de cada uno de dichos instrumentos, o para la cobertura del mismo en un mercado estresado. El horizonte minimo admisible es de 3 meses. Si un banco fija dicho horizonte para un determinado activo en 3 meses, por ejemplo, entonces en el cálculo del VaR a 1 año, el banco debe suponer que si se ha producido un deteiroro de rating en el bono, o si se ha producido una insolvencia en el mismo, se habrá sustituido en la cartera por otro bono similar pero con el mismo rating que tenia el bono original al inicio del periodo. Lo mismo sucede al finalizar los períodos de 6 y de 9 meses. Esto se conoce como el *supuesto de un nivel de riesgo constante*. El impacto de este supuesto es, generalmente, de reducir el VaR 99,9% a 1 año. EL IRC proporciona una medida de los riesgos de insolvencia y de migración de rating en productos de crédito a horizonte de 1 año y con nivel de confianza de 99,9%, teniendo en cuenta los horizontes de liquidez de posiciones individuales o de conjuntos de posiciones.