

Cóputas

Alfonso Novales
Departamento de Economía Cuantitativa
Universidad Complutense

Diciembre 2017
Versión preliminar
No citar sin permiso del autor
©Copyright 2016

Contents

1	Cóputas	2
1.1	Definiciones	3
1.2	Cotas superior e inferior de dependencia	7
1.3	Ejemplos de copulas	8
1.3.1	Cóputa Gaussiana	8
1.3.2	Copulas t-Student	10
1.3.3	Copulas de mixturas Normales	11
1.3.4	Copulas Arquimedianas	12
2	Cóputas condicionales y curvas de cuantiles	15
3	Meta-distribuciones	18
3.1	Simulación de cóputas elípticas y meta-distribuciones	19
3.1.1	de cóputas elípticas con marginales uniformes	19
3.1.2	Simulaciones con meta-distribuciones	21
3.1.3	Simulación de copulas arquimedianas	23
4	Calibración de cóputas	25
4.1	Coefficientes de correlación de rangos	25
4.2	Correspondencia entre copulas y coeficientes de correlación de rangos	26
4.3	Estimación por máxima verosimilitud	27
4.4	Estimación de una cóputa t-Student	28
4.5	Selección de copulas	29
4.6	Regresión cuantílica	30
4.7	Regresión cuantílica de cóputas	32

5	Aplicaciones	34
5.1	Gestión de carteras: ratio de Sharpe	34
5.2	Cálculo del Valor en Riesgo	36
5.3	Distribución de la suma de variables aleatorias	37
5.4	Cobertura de carteras bajo regresiones cuantílicas de cópula	39

1 Cópulas

Muy a menudo, las distribuciones marginales de las rentabilidades de los activos que componen una cartera son diferentes. Adicionalmente, la dependencia entre ellos es no lineal, y posiblemente asimétrica, con distinta correlación entre rentabilidades positivas de dos activos que entre rentabilidades negativas, que pueden estar más correlacionadas. Frecuentemente, sucede todo ello simultáneamente. En estas situaciones, el coeficiente de correlación lineal carece de sentido, pues es aplicable únicamente cuando las variables aleatorias siguen una distribución multivariante elíptica.¹ Una alternativa es modelizar las relaciones entre rentabilidades mediante cópulas, que permiten construir una distribución de probabilidad conjunta que representa la dependencia entre rentabilidades mejor que una distribución elíptica.

Comencemos con algunos principios estadísticos básicos:

Recordemos que la distribución $U(0, 1)$ se caracteriza por tener una función de distribución lineal: $P(U < u) = u$. Ello nos permite probar otra propiedad importante:

$$P(F(X) < u) = P(X < F^{-1}(u)) = F(F^{-1}(u)) = u$$

que muestra que para cualquier variable aleatoria X , su función de distribución define otra variable aleatoria, $F(X)$, con distribución $U(0, 1)$.

También tenemos:

$$P(F^{-1}(U) < x) = P(U < F(x)) = F(x)$$

Por tanto, podemos generar simulaciones de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X , aplicando la inversa de su función de distribución $F(x)$ a una variable aleatoria uniforme $U(0, 1)$, obteniendo: $x = F^{-1}(u)$. La función de distribución de la muestra de x así obtenida será precisamente $F(x)$.

Por ejemplo, la función cuantílica (es decir, la función inversa) de una distribución exponencial estándar es:² $G^{-1}(y) = -\ln(1 - y)$, que nos proporciona el punto de la recta real $G^{-1}(y)$ en el que la distribución exponencial estándar

¹Estas son las distribuciones con contornos (líneas de equiprobabilidad) elípticos, como la Normal o la t-Student multivariantes.

²La distribución exponencial tiene función de distribución: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, $\lambda > 0$, y función de densidad: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$. Su esperanza matemática es $1/\lambda$ y su varianza $1/\lambda^2$. La distribución exponencial estándar se tiene para $\lambda = 1$: $F(x) = 1 - e^{-x}$, $x \geq 0$, $f(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$. con esperanza y varianza igual a 1.

La función cuantílica es la función $a = G^{-1}(q)$ que satisface: $P(y \leq a) = q$.

acumula una probabilidad igual a y . Por tanto, si partimos de una serie temporal independiente extraída de $y \sim U(0, 1)$ y aplicamos esta función $G^{-1}(y)$, obtendremos una serie temporal con una distribución exponencial estándar.

Otra importante aplicación es la siguiente: consideremos una variable Y Normal estándar, de modo que $\Phi(y)$ es $U(0, 1)$. Entonces la variable transformada: Z , definida mediante: $Z = -\ln(1 - \Phi(y))$ tiene una distribución exponencial estándar. De este modo, podemos transformar una muestra de una distribución Normal en otra muestra de una distribución exponencial estándar. Evidentemente, lo mismo se puede hacer con otras dos distribuciones de probabilidad, siempre que conozcamos la función cuantílica de la segunda. Cuando se simulan varias variables aleatorias, el ejercicio es similar, solo que hay que imponer la dependencia conjunta que exista entre ellas.

1.1 Definiciones

Aunque nos vamos a referir a cópulas bivariantes, todos los conceptos que vamos a examinar pueden extenderse de modo natural al caso multivariante.

Una cópula es una función de distribución bivalente definida sobre el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ con distribuciones marginales que son Uniformes: $U(0, 1)$. Más concretamente, una cópula bivalente es una función con propiedades:

- $C : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$
- $C(u_1, 1) = u_1$; $C(1, u_2) = u_2$
- $C(u_1, 0) = C(0, u_2) = 0$
- para todo u_1, u_2, v_1, v_2 en $[0, 1]$ con $u_1 \leq v_1, u_2 \leq v_2$, se tiene: $C(v_1, v_2) - C(u_1, v_2) \geq C(v_1, u_2) - C(u_1, u_2)$

La primera condición permite utilizar una cópula sobre los valores tomados por funciones de distribución. La segunda condición es el requisito de tener distribuciones marginales Uniformes. Las otras dos condiciones son propias de toda función de distribución bivalente.

Teorema de Sklar (versión bivalente): Dada una función de distribución bivalente $F(x_1, x_2)$ con distribuciones marginales F_1, F_2 , existe una cópula $C : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ tal que $\forall x_1, x_2$ en \mathbb{R}^2 se tiene:

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \quad (1)$$

Es decir, existe una cópula que toma sobre \mathbb{R}^2 los mismos valores numéricos que la función de distribución $F(x_1, x_2)$. Decimos que C es la cópula de la distribución F . Notemos que $u_1 = F_1(x_1)$ y $u_2 = F_2(x_2)$ serán variables $U(0, 1)$. Si las distribuciones marginales son continuas, dicha cópula es única.

Recíprocamente, si C es una cópula y $F_1(x_1), F_2(x_2)$ son funciones de distribución univariantes, entonces (1) define una función de distribución bivalente con distribuciones marginales $F_1(x_1), F_2(x_2)$.

Implicaciones del teorema de Sklar: Dada una función de distribución bivariable F , el teorema de Sklar define una *cópula implícita*:

$$C(u_1, u_2) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)) \quad (2)$$

por lo que hay una cópula implícita en toda función de distribución multivariante, cuando F_1 y F_2 son las distribuciones marginales que se derivan de F . De hecho, dada una distribución de probabilidad multivariante F con distribuciones marginales F_1, F_2, \dots, F_n , se dice que la función de distribución del vector $(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ es la cópula asociada a la distribución F . Más adelante veremos las cópulas implícitas Gaussiana y t -Student, asociadas a las distribuciones multivariantes Normal y t -Student.

Podemos ver que sus distribuciones marginales son uniformes estándar: en efecto, sea x_2^∞ (posiblemente igual a infinito) el extremo superior del rango de valores de una variable aleatoria X_2 , es decir, $P(X_2 < x_2^\infty) = 1$. Entonces, si $u_1 = F_1(x_1)$, tenemos: $C(u_1, 1) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(1)) = F(x_1, x_2^\infty) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2^\infty) = P(X_1 \leq x_1) = F_1(x_1) = u_1$.

Implicaciones del recíproco del Teorema de Sklar: de acuerdo con el recíproco del teorema de Sklar, podemos comprobar que dada una cópula $C(U_1, U_2)$ y funciones de distribución cualesquiera F_1, F_2 , la función $C(F_1(x_1), F_2(x_2))$ es, efectivamente, una función de distribución. Para ello, definamos variables aleatorias: $X_1 \equiv F_1^{-1}(U_1), X_2 \equiv F_2^{-1}(U_2)$, y notemos que, puesto que C es función de distribución:

$$\begin{aligned} C(F_1(x_1), F_2(x_2)) &\equiv C(u_1, u_2) = P(U_1 \leq F_1(x_1), U_2 \leq F_2(x_2)) = \\ &= P(F_1^{-1}(U_1) \leq x_1, F_2^{-1}(U_2) \leq x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \end{aligned}$$

por lo que C es, efectivamente, una función de distribución de probabilidad.

Esta expresión refleja asimismo cómo las cópulas expresan dependencia en una escala cuantílica, puesto que $C(u_1, u_2, \dots, u_n)$ es la probabilidad conjunta de que X_1 esté por debajo de su u_1 -cuantil, X_2 por debajo de su u_2 -cuantil, etc..

También es fácil ver que las marginales de la función de distribución que hemos obtenido son las F_i :

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq \infty, \dots, X_n \leq \infty) = C(F_1(x_1), 1, \dots, 1) = F_1(x_1)$$

por la propiedad 2 de la definición de cópula.

Este resultado es de enorme aplicación práctica, porque ahora no necesitamos que F_1 y F_2 sean las distribuciones marginales que se derivan de F , y nos proporciona un modo de generar nuevas funciones de distribución.

Las expresiones (1) y (2) son fundamentales en el trabajo con cópulas y, por supuesto, son extensibles a más de 2 variables.

- Por una parte, el recíproco del teorema de Sklar nos indica cómo construir distribuciones conjuntas F uniendo distribuciones marginales F_1, F_2 con cópulas C . Si tomamos una partición en el dominio de dos variables aleatorias, obtenemos los valores de sus respectivas funciones de distribución en dicha partición, ambos en $[0, 1]$, y les asociamos el valor numérico de una determinada función de copula $C: C(F_1(x_1), F_2(x_2))$, podemos estar seguros de que habremos generado una función de distribución. Por ejemplo, si tomamos k distribuciones marginales $N(0, 1)$ y una cópula Gaussiana, generamos una distribución $N_k(0_k, I_k)$. Si tomamos una cópula t -Student con ν grados de libertad y dos distribuciones marginales t -Student cada una de ellas asimismo con ν grados de libertad, el resultado es una distribución t -Student con ν grados de libertad. Si los grados de libertad de las distribuciones marginales no son los mismos que los de la cópula, entonces el resultado no es necesariamente una distribución t -Student multivariante.
- La segunda nos dice cómo puede generarse una cópula a partir de una función de distribución bivalente que tiene distribuciones marginales continuas F_1, F_2 . Partimos de dos variables $U(0, 1)$, u_1, u_2 , calculamos sus inversas por las funciones de distribución marginales de $F: F_1^{-1}(u_1)$ y $F_2^{-1}(u_2)$, y a las variables resultantes x_1, x_2 les introducimos la dependencia deseada (habitualmente mediante un factor de Cholesky). A continuación, proyectamos sobre $[0, 1]$ mediante las distribuciones marginales que se derivan de la cópula, tendremos una realización de dicha cópula con marginales uniformes. So hora aplicamos las inversas de las marginales deseadas, tendremos la realización deseada, de series temporales con una determinada dependencia de cópula y marginales arbitrarias. [Es el tipo de ejercicio que se lleva a cabo en Copula_Simulations II.6.7].

Ejemplo (Independencia): Supongamos que X_1 y X_2 son independientes, con distribuciones $F_1(x_1), F_2(x_2)$ continuas. Entonces, $F(x_1, x_2) = F_1(x_1).F_2(x_2)$, por lo que la única cópula a la que se refiere el teorema de Sklar es en este caso:

$$C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = F_1(x_1).F_2(x_2) = F(x_1, x_2)$$

que es fácil ver que satisface todas las propiedades de una cópula.

Otro resultado interesante en la generación de cópulas es el siguiente:

Proposición: Sea (X_1, \dots, X_n) un vector aleatorio con distribuciones marginales continuas y cópula C , y sean T_1, T_2, \dots, T_n funciones estrictamente crecientes. Entonces, $(T_1(X_1), T_2(X_2), \dots, T_n(X_n))$ también tienen dependencia representada mediante la cópula C .

Densidad de cópula

Derivando en (1) con respecto a ambas variables tenemos una sencilla expresión para la función de densidad conjunta en términos de las funciones de densidad marginales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 C(F_1(x_1), F_2(x_2))}{\partial F_1(x_1) \partial F_2(x_2)} \frac{\partial F_1(x_1)}{\partial x_1} \frac{\partial F_2(x_2)}{\partial x_2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(x_1, x_2) = c(F_1(x_1), F_2(x_2)) \cdot f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \end{aligned}$$

donde:

$$c(F_1(x_1), F_2(x_2)) = \frac{\partial^2 C(F_1(x_1), F_2(x_2))}{\partial F_1(x_1) \partial F_2(x_2)}$$

Ahora bien, sabemos que, para cualesquiera funciones de distribución, $F_1, F_2, F_1(x_1)$ y $F_2(x_2)$ siguen una distribución uniforme. Si sustituimos $F_1(x_1)$ y $F_2(x_2)$ por variables u_1, u_2 , con distribución uniforme, tenemos:

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

que es la *función de densidad de la cópula C*.

Por tanto, dada la función de densidad de la cópula y las funciones de densidad marginales, si existen, tenemos la función de densidad conjunta de las variables originales:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \cdot f_1(x_1) \dots f_n(x_n) \quad (3)$$

Esta expresión nos permite obtener probabilidades para las variables (rentabilidades) cuya dependencia está modelizada mediante una copula. Esto es interesante para calcular momentos de funciones de ambas rentabilidades (media, varianza, etc..), como veremos en las aplicaciones empíricas.

En particular, si las variables aleatorias x_1, x_2, \dots, x_n son independientes, es decir: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$, entonces $c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = 1, \forall x_1, x_2, \dots, x_n$.

Con cópulas vamos a hacer dos tipos de ejercicios empíricos: 1) evaluación de densidades de cópula y estimación de momentos de distribuciones multivariantes, y 2) simulación de series temporales de rentabilidades con una determinada dependencia y determinadas distribuciones marginales. El modo de proceder puede resumirse en dos caminos opuestos:

Particionar rango de rentabilidades estandarizadas $\longrightarrow F_{i,\text{marginal}} \longrightarrow U(0, 1) \longrightarrow F_{i,\text{copula}}^{-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n \longrightarrow$
 \longrightarrow utilizamos la densidad de cópula y las densidades marginales para calcular momentos

Simular $U(0, 1) \longrightarrow F_{i,\text{copula}}^{-1} \longrightarrow$ Imponer $\rho \longrightarrow F_{i,\text{copula}} \longrightarrow U(0, 1) \longrightarrow F_{i,\text{marginal}}^{-1} \longrightarrow$ Rentabilidades

1.2 Cotas superior e inferior de dependencia

La cópula consistente con la *independencia* de variables en el caso multivariante, sería:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = u_1 u_2 \dots u_n$$

porque derivando con respecto a u_1, u_2, \dots, u_n obtenemos $c(u_1, u_2, \dots, u_n) = 1$. De este modo, (3) muestra que la función de densidad conjunta será igual al producto de las funciones de densidad marginales.

Toda cópula satisface:³

$$\text{Max} \left(\sum_{i=1}^n u_i - n + 1; 0 \right) \leq C(u) \leq \min(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

La cópula *cota superior (upper bound) de Fréchet* o *co-monotonía* es:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \min(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

Ninguna otra copula puede tomar un valor superior al de esta copula. Cuando las variables aleatorias están relacionadas de acuerdo con la copula *upper bound* de Fréchet, se dice que tienen dependencia positiva perfecta.

La copula *cota inferior (lower bound) de Fréchet* o *contra-monotonía* es:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \text{Max}(u_1 + u_2 + \dots + u_n - n + 1, 0)$$

aunque es una cópula únicamente para $n = 2$. Ninguna otra copula puede tomar un valor inferior a ésta, y corresponde al caso de dependencia perfecta negativa.

Decimos que una copula implica dependencia positiva o negativa si converge a una de las copulas de Fréchet según varía alguno de sus parámetros. Pero, por ejemplo, la copula Gaussiana que definimos más abajo, no tiende a la copula *upper bound* de Fréchet según aumenta su coeficiente de correlación hacia +1, ni tampoco converge a la copula *lower bound* de Fréchet según su coeficiente de correlación tiende a -1. En el caso de variables Normales, la dependencia con *co-monotonía*⁴ corresponde a una correlación perfecta positiva, mientras que la dependencia con *contra-monotonía* corresponde a una correlación perfecta negativa.

³De hecho, toda función de distribución $F(x_1, \dots, x_n)$ con distribuciones marginales F_1, \dots, F_n satisface:

$$\text{Max} \left(\sum_{i=1}^n F_i(x_i) - n + 1; 0 \right) \leq F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \min(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n))$$

⁴Dos variables X, Y presentan *comonotonía* si existe otra variable aleatoria Z tal que tanto X como Y son transformaciones monótonas de Z , ambas crecientes o decrecientes. Presentan *contra-monotonía* cuando una de ellas es una transformación monótona creciente de Z mientras que la otra es una transformación monótona decreciente.

1.3 Ejemplos de copulas

1.3.1 Cópula Gaussiana

La cópula Gaussiana es una cópula implícita: Si $Y \sim N_n(\mu, \Sigma)$ es un vector aleatorio Gaussiano, entonces su cópula se denomina cópula de Gauss. Como vamos a trabajar con distribuciones Normales estandar, hemos de estandarizar las rentabilidades Y con las que vamos a trabajar, obteniendo rentabilidades estandarizadas X . Estandarizar implica llevar a cabo transformaciones monótonas, por lo que la proposición que antes vimos implica que la cópula de Y es exactamente la misma que la cópula de $X \sim N_n(0, \Gamma)$ donde Γ es la matriz de correlaciones de Y . La cópula Gaussiana tiene como parámetros la matriz de correlaciones Γ de las innovaciones de un vector de rentabilidades. Se deriva de (2) a partir de una distribución Normal multivariante estandar⁵ Φ_n para la dependencia, junto con distribuciones marginales Φ asimismo Normales estándar. En efecto, por el teorema de Sklar tenemos:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n; \mathbf{\Gamma}) = P(\Phi(X_1) \leq u_1, \dots, \Phi(X_n) \leq u_n) = \Phi_n(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$$

Esta copula no admite una formula explicita, y solo puede ser representada mediante una integral. En el caso bivariente, $n = 2$:

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2; \rho) &= \Phi_2(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)) = \\ &= \int_0^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_0^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{2(1-\rho^2)}\right) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

Diferenciando en dicha expresión integral tenemos la *densidad de copula Gaussiana* (o Normal):

$$c(u_1, u_2, \dots, u_n; \mathbf{\Gamma}) = |\mathbf{\Gamma}|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}' (\mathbf{\Gamma}^{-1} - I_n) \boldsymbol{\xi}\right) \quad (4)$$

donde $\mathbf{\Gamma}$ denota la matriz de correlaciones (o covarianzas, puesto que las variables tienen varianzas unitarias), y $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)'$, siendo ξ_i el cuantil u_i de la distribución $N(0, 1)$:

$$u_i = P(N(0, 1) < \xi_i), i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow \xi_i = \Phi^{-1}(u_i)$$

La copula Gaussiana (4) debe considerarse una función de u_1, u_2, \dots, u_n a través de $\boldsymbol{\xi} = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$, no una función de $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

En el caso bidimensional la densidad de cópula Gaussiana es un caso particular de (4) para $n = 2$:

$$c(u_1, u_2; \rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{\rho^2 \xi_1^2 - 2\rho \xi_1 \xi_2 + \rho^2 \xi_2^2}{2(1-\rho^2)}\right) \quad (5)$$

⁵ Esperanza matemática 0_k , matriz de covarianzas I_k .

donde $\xi_1 = \Phi^{-1}(u_1)$, $\xi_2 = \Phi^{-1}(u_2)$ son los cuantiles de variables Normales $N(0, 1)$. Es sencillo ver que esta expresión es igual al cociente entre la función de densidad conjunta, $N(0_2, \Gamma)$, con $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$, y las funciones de densidad marginales, ambas $N(0, 1)$. En efecto, si multiplicamos la densidad de cópula Gaussiana por las densidades marginales de una $N(0, 1)$, tenemos:

$$\begin{aligned} c(u_1, u_2; \rho) \cdot f(x_1)f(x_2) &= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{\rho^2 x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + \rho^2 x_2^2}{2(1-\rho^2)}\right) \\ \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2}\right) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + \rho^2 x_2^2}{2(1-\rho^2)}\right) \end{aligned}$$

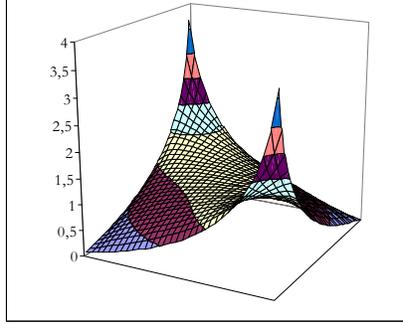
que es la función de densidad $f(x_1, x_2)$ de la distribución $N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Tanto la cópula de independencia (cuando $\Gamma = I_n$) como la cópula de comonotonía (cuando $\Gamma = 1_{n \times n}$) son casos especiales de la cópula de Gauss. La cópula de contra-monotonía es la cópula de Gauss para $n = 2, \rho = -1$. Por tanto, en el caso bidimensional, la cópula de Gauss puede interpretarse como una estructura de dependencia que oscila entre la dependencia perfecta positiva y la dependencia perfecta negativa, indicando el parámetro ρ la fuerza de la dependencia.

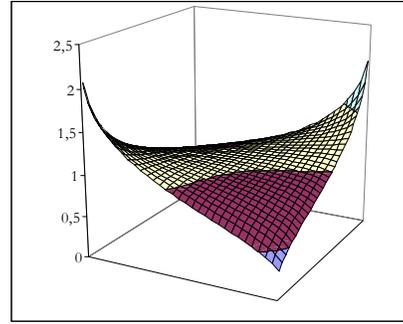
La copula Gaussiana es simétrica: $C(u_1, u_2) = C(u_2, u_1)$. Tiene dependencia en las colas nula o muy baja, a no ser que las dos variables tengan correlación igual a 1, por lo que no es muy apropiada para modelizar la dependencia entre rentabilidades financieras. Además, las rentabilidades financieras parecen estar más correlacionadas cuando son altas y negativas que cuando son altas y positivas, lo que sugiere que la dependencia en las colas es asimétrica.

Los gráficos de las funciones de densidad de cópula Normal que se muestran a continuación (Copula densities II.6.4.xls) se han obtenido partiendo de una rejilla de valores del intervalo $[0,1]$, en cada uno de los dos ejes del plano \mathbb{R}^2 . En el caso Gaussiano, se aplica a la rejilla en cada eje la función Φ^{-1} y a los valores resultantes se aplica la función de densidad de cópula Normal, que es lo que aparece representado en los gráficos. Como vemos, una cópula no tiene el aspecto habitual de las funciones de densidad: es generalmente elevada en las colas, indicando la importancia de la dependencia en las colas, y reducida en el centro del rango de valores de las variables aleatorias.

Copula Normal bivalente con $\rho = 0,5$



Copula Normal bivalente con $\rho = -0,25$



- Comenzamos de una partici3n del intervalo $[0, 1]$
- aplicamos la inversa de la distribuci3n $N(0, 1)$: $\xi_i = \Phi^{-1}(u_i)$, para $i = 1, 2, \dots, n$
- utilizamos la matriz de correlaciones deseada Γ y el vector ξ en la expresi3n de la densidad de c3pula (4).

1.3.2 Copulas t-Student

La c3pula t-Student es otra c3pula impl3cita, que se deriva a partir de una distribuci3n t-Student multivariante $\mathbf{t}_\nu(0, \Gamma)$ (estandarizadas) para la dependencia, junto con distribuciones marginales t_ν asimismo t-Student. Nuevamente, por el teorema de Sklar, tenemos:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n; \Gamma) = \mathbf{t}_\nu(t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_n))$$

Esta c3pula tampoco acepta una expresi3n en forma cerrada.

En el caso $n = 2$, tenemos:

$$c(u_1, u_2; \rho) = K(v) \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \left[1 + \frac{\xi_1^2 - 2\rho\xi_1\xi_2 + \xi_2^2}{\nu(1 - \rho^2)} \right]^{-\frac{\nu+2}{2}} \left[(1 + \nu^{-1}\xi_1^2)(1 + \nu^{-1}\xi_2^2) \right]^{\frac{\nu+1}{2}}$$

donde:

$$K(v) = \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^{-2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + 1\right)$$

En el caso general, la *densidad de la c3pula t-Student* es:

$$c(u_1, u_2, \dots, u_n; \Gamma) = K \frac{1}{|\Gamma|^{1/2}} \left[1 + \nu^{-1} \xi' \Gamma^{-1} \xi \right]^{-\frac{\nu+n}{2}} \prod_{i=1}^n (1 + \nu^{-1} \xi_i^2)^{\frac{\nu+1}{2}} \quad (6)$$

donde:

$$\xi = (T_\nu^{-1}(u_1), \dots, T_\nu^{-1}(u_n))$$

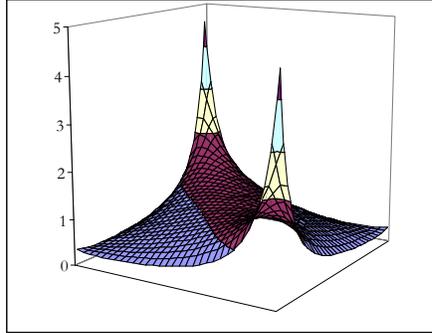
$$K = \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)^{n-1} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^{-n} \Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right)$$

y donde ν es el número de grados de libertad de la cópula.

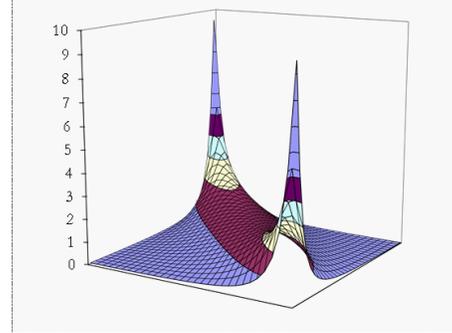
A diferencia del caso Gaussiano, cuando $\Gamma = I_n$ no obtenemos la cópula de independencia (suponiendo $v < \infty$), lo cual es consistente con el hecho de que en la distribución t -multivariante, ausencia de correlación no implica independencia. Cuando $\Gamma = 1_{n \times n}$ obtenemos de nuevo la cópula de co-monotonía.

En el gráfico de las funciones de densidad de cópula t -Student que se muestran a continuación se ha seguido un procedimiento análogo al del caso Normal. Comenzamos de una rejilla de valores del intervalo $[0,1]$, en cada uno de los dos ejes del plano \mathbb{R}^2 . Aplicamos a la rejilla en cada eje la función T_ν^{-1} y a los valores resultantes se aplica la función densidad de cópula t -Student de nuevo con ν grados de libertad.

Cópula bivalente t -Student
con $\rho = 0,5$ y $\nu = 4$



Cópula bivalente t -Student
con $\rho = 0,8$ y $\nu = 4$



1.3.3 Copulas de mixturas Normales

Una cópula de mixturas Normales es una mixtura de dos o más cópulas Normales. Los parámetros de la cópula son las matrices de correlaciones (una para cada cópula) y las probabilidades de mezcla. En el caso de dos variables y una mixtura de sólo dos distribuciones, tendríamos:

$$c(u_1, u_2; \pi, \rho_1, \rho_2) = \pi \cdot c_N(u_1, u_2; \rho_1) + (1 - \pi) \cdot c_N(u_1, u_2; \rho_2)$$

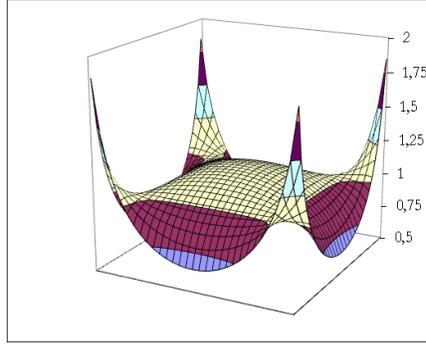
donde c_N denota la cópula bivalente Normal.

$$\begin{aligned} c(u_1, u_2; \pi, \rho_1, \rho_2) &= \pi \frac{1}{\sqrt{1 - \rho_1^2}} \exp\left(-\frac{\rho_1^2 \xi_1^2 - 2\rho_1 \xi_1 \xi_2 + \rho_1^2 \xi_2^2}{2(1 - \rho_1^2)}\right) + \\ &+ (1 - \pi) \frac{1}{\sqrt{1 - \rho_2^2}} \exp\left(-\frac{\rho_2^2 \xi_1^2 - 2\rho_2 \xi_1 \xi_2 + \rho_2^2 \xi_2^2}{2(1 - \rho_2^2)}\right) \end{aligned}$$

De este modo pueden conseguirse pautas de correlación especiales. Por ejemplo, si una de las dos correlaciones es positiva y la otra es negativa, entonces las dos variables tendrán asociación en los 4 vértices.

Cópula Mixtura de Normales

$$\rho_1 = 0,50; \rho_2 = -0,50$$



1.3.4 Copulas Arquimedianas

Las cópulas Gaussiana y t-Student son cópulas implícitas, por lo que hemos obtenido sus densidades utilizando lo que se conoce como *método de inversión*. Un método alternativo se basa en el uso de una función generatriz $\Psi(u) : [0,1] \rightarrow [0, \infty]$, decreciente que satisfaga: $\Psi(u) \rightarrow \infty$ según $u \rightarrow 0$, y $\Psi(1) = 0$. Entonces podemos definir una copula Arquimediana mediante:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \Psi^{-1}(\Psi(u_1) + \Psi(u_2) + \dots + \Psi(u_n))$$

Nótese que en esta expresión, $\Psi(u_1) + \Psi(u_2) + \dots + \Psi(u_n)$ es el argumento escalar de la función Ψ . Su función de densidad es:

$$c(u_1, u_2, \dots, u_n) = \Psi_{(n)}^{-1}(\Psi(u_1) + \Psi(u_2) + \dots + \Psi(u_n)) \prod_{i=1}^n \Psi'(u_i)$$

donde $\Psi_{(n)}^{-1}$ denota la derivada de orden n de la inversa de la función generatriz.

Es inmediato ver que cuando la función generatriz es: $\Psi(u) = -\ln(u)$, tenemos la copula de independencia.

Copula de Clayton Utiliza como función generatriz:

$$\Psi(u) = \alpha^{-1} (u^{-\alpha} - 1), \quad \alpha \neq 0$$

que tiene como inversa (igualar $\Psi(u)$ a x y resolver para u):⁶

$$\Psi^{-1}(x) = (\alpha x + 1)^{-1/\alpha}$$

⁶ $x = \alpha^{-1} (u^{-\alpha} - 1) \Rightarrow 1 + \alpha x = u^{-\alpha} \Rightarrow u = (1 + \alpha x)^{-1/\alpha}$

Como:

$$\Psi(u_1) + \Psi(u_2) + \dots + \Psi(u_n) = \alpha^{-1} \left(\sum_{i=1}^n u_i^{-\alpha} - n \right)$$

la función de distribución de la copula de Clayton resulta:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \left(1 + \alpha \alpha^{-1} \left(\sum_{i=1}^n u_i^{-\alpha} - n \right) \right)^{-1/\alpha} = (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} + \dots + u_n^{-\alpha} - n + 1)^{-1/\alpha}$$

En el caso bivalente:

$$C(u_1, u_2) = (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}$$

y, diferenciando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial u_1} &= \left(-\frac{1}{\alpha} \right) (-\alpha) u_1^{-\alpha-1} (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha-1} = u_1^{-\alpha-1} (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha-1} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u_1 \partial u_2} &= (1 + \alpha) u_1^{-\alpha-1} u_2^{-\alpha-1} (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha-2} \end{aligned}$$

por lo que, en el caso bivalente:

$$c(u_1, u_2) = (\alpha + 1) (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-2-(1/\alpha)} u_1^{-\alpha-1} u_2^{-\alpha-1}$$

En general, con $n > 2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial u_1} &= u_1^{-\alpha-1} (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} + \dots + u_n^{-\alpha} - n + 1)^{-1/\alpha-1} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u_1 \partial u_2} &= (1 + \alpha) u_1^{-\alpha-1} u_2^{-\alpha-1} (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} + \dots + u_n^{-\alpha} - n + 1)^{-1/\alpha-2} \\ \frac{\partial^3 \Psi}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_3} &= (1 + \alpha) (1 + 2\alpha) u_1^{-\alpha-1} u_2^{-\alpha-1} u_3^{-\alpha-1} (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} + \dots + u_n^{-\alpha} - n + 1)^{-1/\alpha-3} \end{aligned}$$

obtenemos la densidad de la copula de Clayton:

$$c(u_1, u_2, \dots, u_n) = \left(1 - n + \sum_{i=1}^n u_i^{-\alpha} \right)^{-n-(1/\alpha)} \prod_{j=1}^n [u_j^{-\alpha-1} (\alpha(j-1) + 1)]$$

Una copula de Clayton tiene *dependencia asimétrica en las colas*. De hecho, cuando $\alpha > 0$, la cópula de Clayton tiene dependencia igual a cero en la cola superior pero dependencia positiva en la cola inferior con un parámetro de dependencia en la cola λ :

$$\begin{aligned}\lambda &= 2^{-1/\alpha} \text{ si } \alpha > 0 \\ &= 0 \text{ si } \alpha \leq 0\end{aligned}$$

lo que hace que al variar α , la copula de Clayton pueda recoger distintos grados de dependencia, con dependencia positiva perfecta según $\alpha \rightarrow \infty$, puesto que converge a la copula *upper bound* de Fréchet. El siguiente gráfico ilustra claramente la alta dependencia en la cola negativa para todo $\alpha > 0$, finito.

Para obtener las densidades de cópula de Gumbel y Clayton, basta aplicar dichas funciones a una rejilla en \mathbb{R}^2 obtenida mediante una partición en el intervalo $[0,1]$.

Copula de Gumbel La copula de Gumbel es una copula Arquimediana con:

$$\Psi(u) = (-\ln u)^\delta, \delta \geq 1$$

con función inversa:⁷

$$\Psi^{-1}(x) = \exp(-x^{1/\delta})$$

Además:

$$\Psi(u_1) + \Psi(u_2) + \dots + \Psi(u_n) = \sum_{i=1}^n (-\ln u_i)^\delta$$

tenemos la distribución de copula de Clayton:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n; \delta) = \exp\left(-\left(\sum_{i=1}^n (-\ln u_i)^\delta\right)^{1/\delta}\right) = \exp(-A(u_1, u_2, \dots, u_n; \delta)),$$

$$\text{donde: } A = \left(\sum_{i=1}^n (-\ln u_i)^\delta\right)^{1/\delta}$$

Diferenciando obtendríamos la densidad de la copula de Gumbel.

En el caso $n = 2$ tenemos:

$$C(u_1, u_2; \delta) = \exp(-A(u_1, u_2; \delta))$$

donde: $A = [(-\ln u_1)^\delta + (-\ln u_2)^\delta]^{1/\delta}$, y diferenciando:

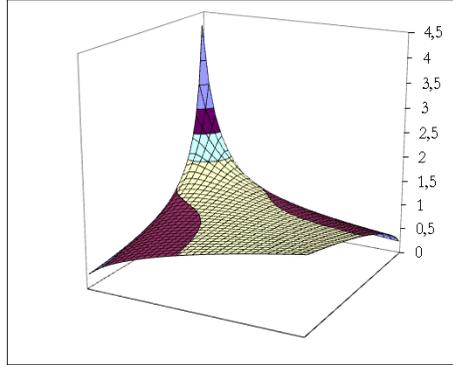
$$c(u_1, u_2; \delta) = (A + \delta - 1)A^{1-2\delta} \exp(-A)(u_1 u_2)^{-1} (-\ln u_1)^{\delta-1} (-\ln u_2)^{\delta-1}$$

La copula de Gumbel tiene dependencia positiva en la cola superior si $\delta > 1$. De hecho, $\lambda^l = 0$ y $\lambda^u = 2 - 2^{1/\delta}$. Según varía el parámetro δ la copula de

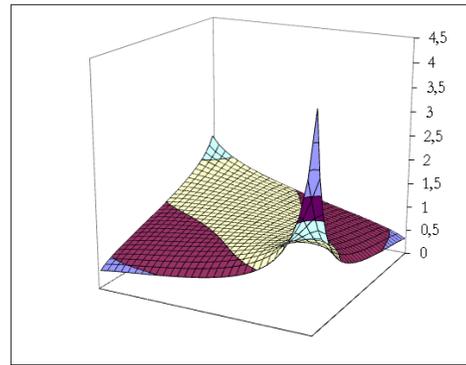
⁷ $x = -(\ln u)^\delta \Rightarrow x^{1/\delta} = -\ln u \Rightarrow \exp(-x^{1/\delta}) = u$

Gumbel recoge un rango de dependencia entre la independencia (para $\delta = 1$) hasta la dependencia perfecta positiva, puesto que según $\delta \rightarrow \infty$, la copula de Gumbel converge a la copula *upper bound* de Fréchet.

Cópula de Clayton con $\alpha = 0,50$



Cópula de Gumbel: $\delta = 1,25$



2 Cópulas condicionales y curvas de cuantiles

Sobre una cópula bivalente pueden definirse las funciones de distribución de dos cópulas condicionales:

$$C_{1|2}(u_1 | u_2) = P(U_1 < u_1 | U_2 = u_2)$$

$$C_{2|1}(u_2 | u_1) = P(U_2 < u_2 | U_1 = u_1)$$

que pueden obtenerse mediante derivación [ver Joe, Harry (1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts*. London, New York: Chapman & Hall/CRC]:

$$C_{1|2}(u_1 | u_2) = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_2}; C_{2|1}(u_2 | u_1) = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1}$$

Una copula condicional puede caracterizarse a través de sus cuantiles asociados. Para un nivel de probabilidad q , una cópula condicional está definida por:

$$C_{2|1}(u_2 | u_1) = q$$

de la que podemos obtener la *curva q-cuantil*:

$$u_2 = g_q(u_1)$$

que proporciona el valor numérico de u_2 en función de q y u_1 , si bien puede no ser posible expresarla del modo que hemos hecho como una función explícita. Eso es lo que sucede con la cópula de Gumbel, como veremos. Si las llevamos

al plano de rentabilidades (ξ_1, ξ_2) , la curva cuantil mide las probabilidades condicionales:

$$P(X_2 \leq \xi_2 \mid X_1 = \xi_1)$$

Los gráficos de curvas q -cuantiles para distintos valores de q constituyen un buen modo de visualizar el tipo de correlación generado por una cópula. Como veremos mas adelante, las curvas q -cuantil generan modelos de regresión no lineales cuando las variables involucradas se correlacionan mediante una determinada cópula.

En el caso de una Normal bivalente Φ_2 estándar, con $\mu = 0_2$ y varianzas unitarias, sabemos que la distribución de probabilidad de una de las dos variables, Y , condicional en $X = x$, es Normal univariante, con:

$$E(Y \mid X = x) = \rho x; \text{Var}(Y \mid X = x) = 1 - \rho^2$$

por lo que, condicional en x , la variable aleatoria:

$$Z = \frac{Y - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}}$$

sigue una distribución $N(0, 1)$. Por tanto: $P(Y \leq y_0) = P\left(\frac{Y - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}} \leq \frac{y_0 - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) = \Phi\left(\frac{y_0 - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right)$.

Esto sugiere la distribución condicional de la cópula Normal bivalente, que se obtiene derivando:

$$C_{1|2}(u_1 \mid u_2) = \frac{\partial}{\partial u_2} \Phi_2(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(u_2) - \rho\Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) \in [0, 1] \quad (7)$$

La curva q -cuantil de la cópula Normal con marginales $N(0, 1)$ puede escribirse explícitamente, fijando la cópula condicional $C_{1|2}(u_1 \mid u_2)$ en (7) en un determinado valor numérico $q \in [0, 1]$,

$$\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(u_2) - \rho\Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) = q,$$

y despejando, obtenemos:

$$u_2 = \Phi\left(\rho\Phi^{-1}(u_1) + \sqrt{1 - \rho^2}\Phi^{-1}(q)\right)$$

Utilizando las densidades marginales de la cópula, podemos expresar la curva q -cuantil en términos de las "rentabilidades" (ξ_1, ξ_2) :

$$\xi_2 = \rho\xi_1 + \sqrt{1 - \rho^2}\Phi^{-1}(q)$$

que en este caso es una línea recta con pendiente ρ y constante $\sqrt{1-\rho^2}\Phi^{-1}(q)$. Si las marginales fuesen Normales no estándar, tendríamos:

$$\frac{\xi_2}{\sigma_2} = \rho \frac{\xi_1}{\sigma_1} + \frac{\mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{\mu_1}{\sigma_1} + \sqrt{1-\rho^2}\Phi^{-1}(q)$$

y si las marginales fuesen distribuciones F_1, F_2 cualesquiera, tendríamos una curva q -cuantil no lineal:

$$\xi_2 = F_2^{-1} \left[\Phi \left(\rho \Phi^{-1}(F_1(\xi_1)) + \sqrt{1-\rho^2}\Phi^{-1}(q) \right) \right]$$

Si (Y, X) siguen una distribución t-Student bivalente con ν grados de libertad, entonces, condicional en x , la variable aleatoria:⁸

$$\sqrt{\frac{\nu+1}{\nu+x^2}} \frac{Y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

sigue una distribución t-Student con $\nu+1$ grados de libertad. Por tanto, tenemos la distribución condicional de la cópula t-Student bivalente con marginales t-Student:

$$C_{1|2}(u_1 | u_2) = T_{\nu+1} \left(\sqrt{\frac{\nu+1}{\nu+(t_\nu^{-1}(u_1))^2}} \frac{T_\nu^{-1}(u_2) - \rho T_\nu^{-1}(u_1)}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) = q$$

donde t_ν denota la función de distribución t-Student con ν grados de libertad. Despejando, obtenemos la curva q -cuantil de la cópula t-Student:

$$u_2 = T_\nu \left(\rho T_\nu^{-1}(u_1) + \sqrt{(1-\rho^2) \frac{\nu + (T_\nu^{-1}(u_1))^2}{\nu+1}} T_{\nu+1}^{-1}(q) \right)$$

que, a diferencia del caso Normal, no es una línea recta.

Utilizando $\xi_1 = T_\nu^{-1}(u_1), \xi_2 = T_\nu^{-1}(u_2)$, podemos escribir la expresión de la curva q -cuantil:

$$\xi_2 = \rho \cdot \xi_1 + \sqrt{(1-\rho^2) \frac{\nu + \xi_1^2}{\nu+1}} T_{\nu+1}^{-1}(q)$$

Bajo marginales arbitrarias, utilizando $u_i = F_i(\xi_i), i = 1, 2$, tenemos la expresión de la curva q -cuantil en coordenadas (ξ_1, ξ_2) :

$$\xi_2 = F_2^{-1} \left[T_\nu \left(\rho T_\nu^{-1}(F_1(\xi_1)) + \sqrt{(1-\rho^2) \frac{\nu + T_\nu^{-1}(F_1(\xi_1))^2}{\nu+1}} T_{\nu+1}^{-1}(q) \right) \right]$$

⁸Cherubini, U., Luciano, E., Vecchiato, W., (2004) Copula Methods in Finance, John Wiley and Sons.

En el caso de una cópula de mixtura de Normales, no podemos obtener una expresión explícita para la curva q -cuantil, y hemos de utilizar la ecuación:

$$q = \pi \cdot \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(u_2) - \rho_1 \cdot \Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{1 - \rho_1^2}} \right) + (1 - \pi) \cdot \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(u_2) - \rho_2 \cdot \Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{1 - \rho_2^2}} \right)$$

para obtener el valor numérico de u_2 para cada u_1 y cada q .

En la cópula de Clayton, la cópula condicional está dada por:

$$C_{2|1}(u_2 | u_1; \alpha) = \frac{\partial}{\partial u_1} (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha} = u_1^{-(1+\alpha)} (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-(1+\alpha)/\alpha}$$

por lo que igualando a q y despejando, obtenemos la ecuación de la curva q -cuantil:

$$u_2 = C_{2|1}(v | u_1; \alpha) = \left(1 + u_1^{-\alpha} \left(q^{-\alpha/(1+\alpha)} - 1 \right) \right)^{-1/\alpha}$$

y en términos de las variables/rentabilidades (ξ_1, ξ_2) :

$$\xi_2 = F_2^{-1} \left[\left(1 + F_1(\xi_1)^{-\alpha} \left(q^{-\alpha/(1+\alpha)} - 1 \right) \right)^{-1/\alpha} \right]$$

Como veremos más adelante, la cópula condicional inversa de Clayton se utiliza para simular rentabilidades con marginales uniformes que tienen dependencia definida por la cópula de Clayton. Sobre estas uniformes podemos aplicar la inversa de las funciones de distribución marginales deseadas, para obtener rentabilidades con dichas distribuciones y densidad de cópula de Clayton.

La distribución condicional de la cópula bivalente de Gumbel es:

$$C_{2|1}(u_2 | u_1; \alpha) = \frac{\partial}{\partial u_1} \exp \left(- \left[(-\ln u_1)^\delta + (-\ln u_2)^\delta \right]^{1/\delta} \right) = \frac{1}{u_1} (-\ln u_1)^{\delta-1} A^{1-\delta} e^{-A}$$

$$A = \left[(-\ln u_1)^\delta + (-\ln u_2)^\delta \right]^{1/\delta}$$

que no admite una representación analítica explícita. Lo que hay que hacer es igualar esta expresión a q y resolver el valor numérico de $u_2(u_1, q; \delta)$.

3 Meta-distribuciones

Como vimos, el recíproco del teorema de Sklar nos proporciona un método muy útil para obtener distribuciones de probabilidad multivariantes a partir de cualesquiera distribuciones marginales y utilizando una cópula, mediante $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n))$. De este modo definimos una

función de distribución multivariante F con cópula C y marginales F_1, \dots, F_n .
O, en términos de funciones de densidad:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$$

Por ejemplo, podemos utilizar una cópula Gaussiana con distribuciones marginales cualesquiera. Este tipo de construcciones se conocen como *meta-distribuciones*.

Con el uso de meta-distribuciones, queremos poder responder a dos tipos de cuestiones: a) Si queremos estimar probabilidades y calcular momentos ¿cómo aplicamos la densidad de cópula cuando las rentabilidades no tienen la distribución marginal que se deriva de la cópula?, y b), ¿cómo podemos generar realizaciones de series temporales (pseudo-rentabilidades) con distribuciones marginales diferentes de las que se derivan de la cópula?

3.1 Simulación de cópulas elípticas y meta-distribuciones

3.1.1 de cópulas elípticas con marginales uniformes

Nos basamos en el teorema de Sklar, que muestra que si un vector X^* tiene distribución F , podemos utilizar las distribuciones marginales F_1, \dots, F_n que de ella se derivan para obtener un vector $(u_1^*, \dots, u_n^*) = (F_1(x_1^*), \dots, F_n(x_n^*))$ con distribución de cópula C , la cópula asociada a F .

Supongamos una cópula elíptica (cópula Gaussiana o cópula t-Student), con marginales F_1, F_2, \dots, F_n . En ambos casos, utilizaremos el factor Cholesky de la matriz de correlaciones/covarianzas para generar un conjunto de rentabilidades con distribución Normal multivariante o t-Student multivariante.

Simulaciones de cópula Gaussiana (pestaña "Normal"):

1. simulamos series temporales para cada una de las n variables (u_1, u_2, \dots, u_n) a partir de distribuciones uniformes independientes,
2. obtenemos $x_i = \Phi^{-1}(u_i)$ y aplicamos el factor de Cholesky de la matriz deseada de covarianzas/correlaciones a (x_1, x_2, \dots, x_n) para obtener una simulación $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$
3. Si, a continuación, aplicamos $u_i^* = \Phi(x_i^*)$ obtendremos una simulación $(u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$ de la cópula Gaussiana, con marginales uniformes (columnas I,J en Excel).

Esto es lo que se hace en la hoja de cálculo Copula Simulations II.6.7.xls (descripción): Comenzamos simulando dos variables uniformes, $U(0, 1)$ independientes, u_1, u_2 . Aplicamos la inversa de la función de distribución Φ para obtener dos variables Normales $N(0,1)$ independientes, x_1, x_2 , las cuales transformamos mediante el factor Cholesky de la matriz de covarianzas deseada. Puesto que queremos $\Gamma_{x^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{pmatrix}$, el factor Cholesky adecuado es: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.700 & 0.714 \end{pmatrix}$,

ya que $PP' = \Gamma_{x^*}$. Por tanto, puesto que $\Gamma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, tendremos: $X^* = XP'$, lo cual implica: $Var(X^*) = P\Gamma_x P' = PP' = \Gamma_{x^*}$, como queríamos.

La Figura 1 muestra una simulación de las dos variables Normales (x_1^*, x_2^*) , con correlación 0,7 y *marginales Normales* [Punto 2]:⁹

$$\begin{aligned} u_1 &\longrightarrow x_1 = \Phi^{-1}(u_1) \longrightarrow x_1^* = Cholesky(x_1, x_2) \longrightarrow Figura1 \\ u_2 &\longrightarrow x_2 = \Phi^{-1}(u_2) \longrightarrow x_2^* = Cholesky(x_1, x_2) \longrightarrow Figura1 \end{aligned}$$

Rentabilidades: la Figura 2 muestra una simulacion de dos rentabilidades cuya dependencia está modelizada mediante una cópula Gaussiana bivalente con marginales $U(0, 1)$ [Punto 3]:

$$\begin{aligned} u_1 &\longrightarrow x_1 = \Phi^{-1}(u_1) \longrightarrow x_1^* = Cholesky(x_1, x_2) \longrightarrow Figura1 \longrightarrow u_1^* = \Phi_c(x_1^*) \longrightarrow Figura2 \\ u_2 &\longrightarrow x_2 = \Phi^{-1}(u_2) \longrightarrow x_2^* = Cholesky(x_1, x_2) \longrightarrow Figura1 \longrightarrow u_2^* = \Phi_c(x_2^*) \longrightarrow Figura2 \end{aligned}$$

Figura 1: Distribución Normal bivalente

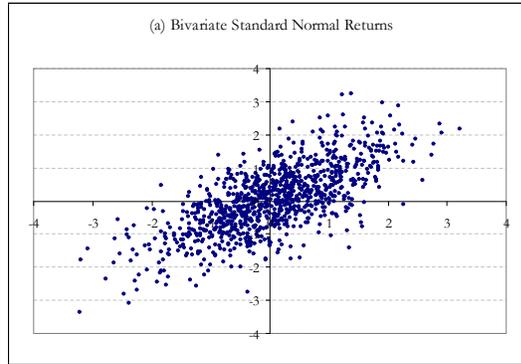
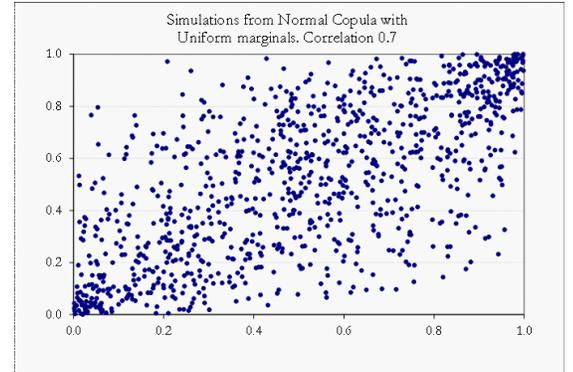


Figura 2 (Cópula Gaussiana)



Simulaciones de cópula t-Student con ν grados de libertad (pestaña "t-Student")

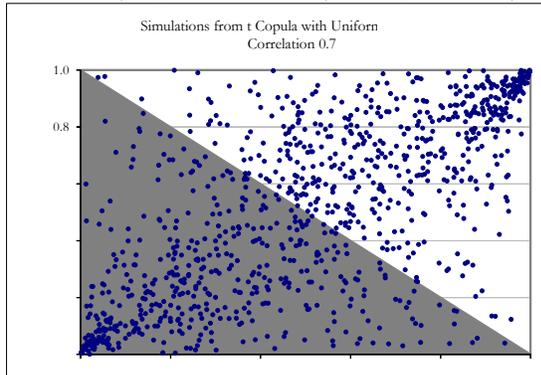
1. simulamos (u_1, u_2, \dots, u_n) a partir de distribuciones uniformes independientes
2. obtenemos $x_i = T_\nu^{-1}(u_i)$ y aplicamos el factor de Cholesky de la matriz deseada de covarianzas/correlaciones a (x_1, x_2, \dots, x_n) para obtener una simulación $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$
3. calculamos $u_i^* = T_\nu(x_i^*)$ para obtener una simulación $(u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$ de la cópula, con marginales uniformes. Recordemos que las simulaciones de una cópula toman valores en $[0, 1]$

⁹Que no es sino una realización de una distribución Normal bivalente con $\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{pmatrix}$.

La Figura 3 representan una simulacion de una c3pula bivalente (puntos en $[0, 1] \times [0, 1]$) t -Student con marginales $U(0, 1)$ [Punto 3]:

$$\begin{aligned} u_1 &\longrightarrow x_1 = T_{\nu_c}^{-1}(u_1) \longrightarrow x_1^* = Cholesky(x_1, x_2) \longrightarrow u_1^* = T_{\nu_c}(x_1^*) \longrightarrow Figura3 \\ u_2 &\longrightarrow x_2 = T_{\nu_c}^{-1}(u_2) \longrightarrow x_2^* = Cholesky(x_1, x_2) \longrightarrow u_2^* = T_{\nu_c}(x_2^*) \longrightarrow Figura3 \end{aligned}$$

Figura 3 (C3pula t -Student), marginales $U(0, 1)$



3.1.2 Simulaciones con meta-distribuciones

Para estimar una c3pula, veremos que es habitual estimar primero las distribuciones marginales y luego estimar la dependencia entre las variables. En simulaci3n suele procederse al rev3s: simulando primero la dependencia y despu3s las marginales. Precisamente la virtud de las copulas es que las distribuciones marginales pueden ser totalmente diferentes de la distribuci3n utilizada para modelizar la dependencia.

Meta-distribuci3n Gaussiana con marginales arbitrarias:

Procedemos en dos etapas: primero generamos realizaciones de variables uniformes con la correlaci3n deseada, como hicimos en el apartado anterior; posteriormente, transformamos dichas realizaciones uniformes mediante las inversas de las distribuciones marginales deseadas, $F_1^{-1}, \dots, F_n^{-1}$ para obtener pseudo-rentabilidades: $\xi_1 = F_1^{-1}(x_1), \xi_2 = F_2^{-1}(x_2), \dots, \xi_n = F_n^{-1}(x_n)$.

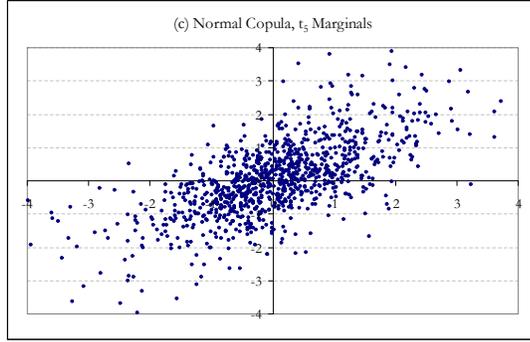
Ejemplo: *Rentabilidades con dependencia seg3n una c3pula Gaussiana con marginales t -Student:* En la pesta3a "Normal" vemos c3mo simular una muestra de dos rentabilidades con meta-distribuci3n Gaussiana y con una correlaci3n de 0.7 entre ambas. En el primer caso, teniendo distribuciones marginales uniformes (columnas I,J); en el segundo caso, con distribuciones marginales t -Student (columnas K,L).¹⁰ En este segundo caso, a partir de la realizaci3n de la c3pula Normal (Figura 2) con marginales uniformes, aplicando las inversas de distribuciones t_{ν_1} -Student, t_{ν_2} -Student obtenemos una realizaci3n de variables

¹⁰Si quisieramos distribuciones marginales Normales, aplicar3amos a estas uniformes la inversa Φ^{-1} , obteniendo de nuevo la distribuci3n Normal bivalente del Punto 2.

aleatorias con estas distribuciones marginales t -Student, y relacionadas mediante una cópula Normal. En este caso, se han utilizado 5 y 8 grados de libertad para cada una de las dos marginales t -Student (Figura 4).

$$\begin{aligned} u_1 &\longrightarrow x_1 = \Phi^{-1}(u_1) \longrightarrow x_1^* = Cholesky(x_1, x_2) \longrightarrow u_1^* = \Phi_c(x_1^*) \longrightarrow Figura2 \longrightarrow T_{\nu_1}^{-1}(u_1^*) \longrightarrow Figura4 \\ u_2 &\longrightarrow x_2 = \Phi^{-1}(u_2) \longrightarrow x_2^* = Cholesky(x_1, x_2) \longrightarrow u_2^* = \Phi_c(x_2^*) \longrightarrow Figura2 \longrightarrow T_{\nu_2}^{-1}(u_2^*) \longrightarrow Figura4 \end{aligned}$$

Figura 4 (Rentabilidades)
Cópula Gaussiana, marginales t -Student



Meta-distribución t -Student con ν grados de libertad

Procedemos de nuevo en dos etapas: primero generamos realizaciones de variables uniformes con la correlación deseada, como hicimos en el apartado anterior, con dependencia según una cópula t -Student; posteriormente, transformamos dichas realizaciones uniformes mediante las inversas de las distribuciones marginales deseadas, $F_1^{-1}, \dots, F_n^{-1}$ para obtener pseudo-rentabilidades: $\xi_1 = F_1^{-1}(x_1), \xi_2 = F_2^{-1}(x_2), \dots, \xi_n = F_n^{-1}(x_n)$.

Ejemplo: *Rentabilidades con dependencia según una cópula t -Student con marginales Normales o t -Student*: si a la realización de la cópula t_{ν_c} -Student (Figura 3) aplicamos alternativamente, la inversa de una función de distribución Normal(0,1), o las inversas de funciones de distribución t -Student, con grados de libertad no necesariamente iguales a ν_c , obtenemos realizaciones de dos variables relacionadas mediante una cópula t -Student, con marginales Normal (Figura 5) o t -Student (Figura 6), respectivamente:

$$\begin{aligned} u_1 &\longrightarrow x_1 = T_{\nu_c}^{-1}(u_1) \longrightarrow x_1^* = Cholesky(x_1, x_2) \longrightarrow u_1^* = T_{\nu_c}(x_1^*) \longrightarrow Figura3 \longrightarrow \Phi^{-1}(u_1^*) \longrightarrow Figura5 \\ u_2 &\longrightarrow x_2 = T_{\nu_c}^{-1}(u_2) \longrightarrow x_2^* = Cholesky(x_1, x_2) \longrightarrow u_2^* = T_{\nu_c}(x_2^*) \longrightarrow Figura3 \longrightarrow \Phi^{-1}(u_2^*) \longrightarrow Figura5 \end{aligned}$$

Figura 5 (Rentabilidades)
Cópula t-Student, marginales Normales

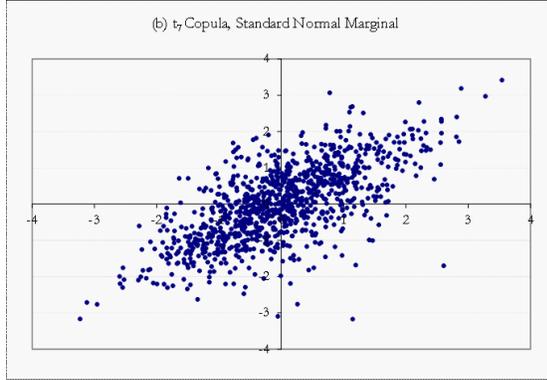
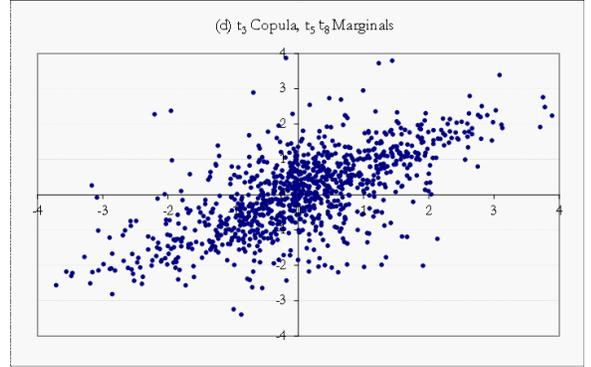


Figura 6 (Rentabilidades)
Cópula t-Student, t_6 , marginales t_5, t_8



$$\begin{aligned}
 u_1 &\longrightarrow x_1 = T_{\nu_c}^{-1}(u_1) \longrightarrow x_1^* = Cholesky(x_1, x_2) \longrightarrow u_1^* = T_{\nu_c}(x_1^*) \longrightarrow \text{Figura3} \longrightarrow T_{\nu_1}^{-1}(u_1^*) \longrightarrow \text{Figura6} \\
 u_2 &\longrightarrow x_2 = T_{\nu_c}^{-1}(u_2) \longrightarrow x_2^* = Cholesky(x_1, x_2) \longrightarrow u_2^* = T_{\nu_c}(x_2^*) \longrightarrow \text{Figura3} \longrightarrow T_{\nu_2}^{-1}(u_2^*) \longrightarrow \text{Figura6}
 \end{aligned}$$

3.1.3 Simulación de copulas arquimedianas

Para simular copulas arquimedianas utilizamos copulas condicionales:

1. simulamos (u_1, u_2, \dots, u_n) de distribuciones uniformes independientes
2. fijamos $u_1^* = u_1$ y aplicamos la inversa de la cópula condicional $C_{2|1}^{-1}$ para transformar u_2 en $u_2^* : u_2^* = C_{2|1}^{-1}(u_2 | u_1^*)$,
3. fijamos u_1^* y u_2^* , y aplicamos la inversa de la cópula condicional $C_{3|1,2}^{-1}$ para transformar u_3 en $u_3^* : u_3^* = C_{3|1,2}^{-1}(u_3 | u_1^*, u_2^*)$
4. repitiendo para $i = 3, 4, \dots, n$ obtenemos simulaciones $(u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$ obtenidas de la cópula especificada, con marginales uniformes. Hasta aqui, hemos introducido la dependencia de cópula en las realizaciones uniformes $(u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$.
5. aplicar a los valores uniformes $(u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$ las inversas de las distribuciones marginales deseadas $(F_1^{-1}(u_1^*), F_2^{-1}(u_2^*), \dots, F_n^{-1}(u_n^*))$ para obtener una realización de las variables aleatorias buscadas.

Como puede verse, este algoritmo separa el trabajo con la copula (pasos 2 a 4) del trabajo con las marginales (paso 5), por lo que puede utilizarse facilmente para simular cualquier cópula de dependencia con cualquier tipo de marginales. Sin embargo, según aumenta el numero de variables, el algoritmo se hace bastante ineficiente.

Cópulas de Clayton y de Gumbel: Este algoritmo está especialmente indicado para simular copulas Arquimedianas. Para ello necesitaremos las inversas de las

distribuciones condicionales, que en el caso de la copula de Clayton bivalente es:

$$u_2 = C_{2/1}^{-1}(q | u_1) = \left[1 + u_1^{-\alpha}(q^{-\alpha/(1+\alpha)} - 1)\right]^{-1/\alpha}$$

Consideremos una c3pula bivalente. Partiendo de numeros aleatorios uniformes independientes (u_1, q) obtenemos u_2 del modo que indica la 3ltima ecuaci3n. El par (u_1, u_2) es una simulaci3n de la c3pula de Clayton con marginales uniformes. Para obtener simulaciones de las pseudo-rentabilidades, utilizamos las inversas de las distribuciones marginales deseadas $(\xi_1, \xi_2) = (F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2))$.

En una c3pula de Clayton n -variante, tendr3amos:

$$u_2 = C_{2/1}^{-1}(q | u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) = \left[1 + (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} + \dots + u_{n-1}^{-\alpha} - n + 2)(q^{-\frac{\alpha}{\alpha(n-1)+1}} - 1)\right]^{-1/\alpha}$$

En el caso de la copula de Gumbel no hay formulaci3n expl3cita para la inversa de la distribuci3n condicional de copula. En su lugar, debemos utilizar:

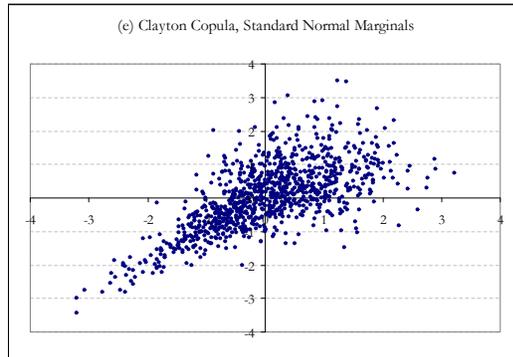
$$q = C_{2/1}(u_2 | u_1) = u_1^{-1}(-\ln u_1)^{\delta-1} A^{(1-\delta)} e^{-A}$$

donde: $A = [(-\ln u_1)^\delta + (-\ln u_2)^\delta]^{1/\delta}$. Esta es una relaci3n impl3cita, de la que debemos obtener el valor num3rico de u_2 a partir de las dos uniformes independientes (u_1, q) .

Ejemplo: *Rentabilidades con dependencia seg3n una c3pula de Clayton con marginales Normales:*

$$\begin{aligned} u_1 &\longrightarrow u_1^* = u_1 \longrightarrow \Phi^{-1}(u_1^*) \longrightarrow \text{Figura 7} \\ u_2 &\longrightarrow u_2^* = C_{2/1}(v/u_1^*) \equiv \text{Clayton condicional} \longrightarrow \Phi^{-1}(u_2^*) \longrightarrow \text{Figura 7} \end{aligned}$$

Figura 7 (Rentabilidades)
C3pula Clayton, marginales Normales



La c3pula de Gumbel se simular3a de modo similar.

4 Calibración de cópulas

4.1 Coeficientes de correlación de rangos

Recordemos los coeficientes de correlación de rangos. Se trata de medidas no paramétricas de dependencia basadas en datos de rangos. Para ello, si tenemos una determinada muestra, asignamos a cada observación el número de orden que ocupa en la muestra cuando se ordena de menor a mayor valor. Una vez hecha esta asignación de etiquetas numéricas, prescindimos de los valores observados en la muestra, y nos quedamos únicamente con los rangos que hemos construido.

Coeficiente de correlación de Spearman: Se aplica a dos conjuntos de datos de igual tamaño, que guarden una cierta ordenación, de modo que pueda hablarse de pares (x_i, y_i) . Esta asociación es natural cuando se dispone de dos series temporales que cubren un mismo período, pero no sería posible en una muestra en la que las observaciones no guardan ninguna ordenación. Cuando tenemos los pares (x_i, y_i) , con rangos (d_{x_i}, d_{y_i}) calculamos las diferencias de rangos: $d_i = d_{y_i} - d_{x_i}$ y la suma de sus cuadrados:

$$D = \sum_{i=1}^n d_i^2$$

El coeficiente de correlación de Spearman es:¹¹

$$\rho_S = 1 - \frac{6D}{n(n^2 - 1)}$$

[ver Example II.6.1, Example II.6.2, Example II.6.4.a]

Coeficiente de correlación de Kendall: Consideremos dos pares de observaciones (x_1, y_1) , (x_2, y_2) . Decimos que ambos pares son concordantes si $x_1 - x_2$ tiene el mismo signo que $y_1 - y_2$, y son discordantes en caso contrario.¹² Es decir, los dos pares son concordantes si $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$, y son discordantes si $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0$.

Si denotamos por N_C y por N_D , respectivamente, a la suma de los números de pares concordantes y discordantes a lo largo de todas las observaciones muestrales,¹³ el coeficiente de correlación de Kendall es:

$$\tau = \frac{N_C - N_D}{\frac{1}{2}n(n - 1)}$$

donde las sumas N_C, N_D están divididas por 2, para no contar doblemente las comparaciones entre pares de observaciones. Si hay datos repetidos, se les asigna el rango promedio, no el mayor ni el menor rango. Por ejemplo, si los

¹¹Que también puede calcularse utilizando el coeficiente de correlación de Pearson a los datos de ambas variables ordenados de acuerdo con los datos ordenados de acuerdo con sus rangos, no con el período de observación.

¹²El par de observaciones (x, x) no es ni concordante ni discordante con otros pares de observaciones muestrales.

¹³Sin contar las propias observaciones cuyo número de concordancias y discordancias estamos calculando.

datos ordenados crecientemente son: 1, 2, 2, 2, 5, ..., los rangos serán: 1, 3, 3, 3, 5, Como comprobación, la suma de rangos debe ser siempre igual a $n(n+1)/2$.

4.2 Correspondencia entre copulas y coeficientes de correlación de rangos

Puede probarse que el coeficiente de correlación de rangos τ de Kendall guarda una relación directa con una copula bivalente mediante:

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1$$

de modo que en copulas dependientes de un solo parametro, esta ecuación proporciona un modo de calibrar dicho parámetro utilizando una estimación muestral de τ . Por ejemplo, en el caso de una copula Gaussiana, con ϱ como único parámetro, tenemos:

$$\varrho = \text{seno} \left(\frac{\pi}{2} \tau \right)$$

Este mismo resultado es válido para una copula t -Student, y para cualquier cópula elíptica.

Para la copula Normal (Gaussiana) existe asimismo una relación con el coeficiente de correlación de rangos de Spearman, ρ :

$$\rho_S = 12 \int_0^1 \int_0^1 u_1 u_2 dC(u_1, u_2) - 3$$

lo que conduce a:

$$\varrho = 2 \cdot \text{seno} \left(\frac{\pi}{6} \rho_S \right)$$

Este enfoque se puede utilizar con meta-distribuciones t -Student, aunque el método de la τ de Kendall es más fiable en ese caso.

Para copulas Arquimedianas, tenemos:

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\Psi(x)}{\Psi'(x)} dx$$

por lo que para la copula de Gumbel tenemos:

$$\tau = 1 - \delta^{-1} \Rightarrow \delta = \frac{1}{1 - \tau}$$

mientras que para la copula de Clayton:

$$\tau = \frac{\alpha}{\alpha + 2} \Rightarrow \alpha = 2 \frac{\tau}{1 - \tau}$$

Ejercicio (E.II.6.3) Supongamos que en una muestra de dos rentabilidades obtenemos una tau de Kendall de 0,20. ¿Qué parámetro deberíamos utilizar en

una cópula Normal? ¿Y en una cópula Gumbel? ¿Y en una cópula Clayton?
R: 0,309; 1,25; 0,5.

4.3 Estimación por máxima verosimilitud

En la estimación por máxima verosimilitud de los parámetros de una cópula pueden seguirse dos estrategias: a) estimar primero los parámetros de las distribuciones marginales para estimar luego los parámetros de la copula, lo que se conoce como *Inferencia en el margen*, o b) Estimar todos los parámetros, de las distribuciones marginales y de la distribución de la cópula conjuntamente mediante *Máxima Verosimilitud*. El segundo método es, naturalmente, más eficiente estadísticamente, pero también es más complejo computacionalmente.

Supongamos que tenemos una cópula multivariante:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}) = c(F_1(x_1; \alpha_1), F_2(x_2; \alpha_2), \dots, F_n(x_n; \alpha_n); \boldsymbol{\theta}) \prod_{i=1}^n f_i(x_i; \alpha_i)$$

donde, solo por simplicidad, hemos supuesto que cada distribución marginal depende de un solo parámetro, $\boldsymbol{\alpha}$ es el vector de parámetros de todas las distribuciones marginales, y $\boldsymbol{\theta}$ es el vector de parámetros de la distribución de la cópula. Tomando logaritmos, tenemos:

$$\ln L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_T) = \sum_{t=1}^T \left(\ln c(F_1(x_{1t}; \alpha_1), F_2(x_{2t}; \alpha_2), \dots, F_n(x_{nt}; \alpha_n); \boldsymbol{\theta}) + \sum_{i=1}^n \ln f_i(x_{it}; \alpha_i) \right)$$

donde $\mathbf{x}_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})$ es el vector de observaciones de las n variables en el periodo t .

Por tanto, tenemos:

$$\ln L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_T) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_{1t}; \alpha_1), F_2(x_{2t}; \alpha_2), \dots, F_n(x_{nt}; \alpha_n); \boldsymbol{\theta}) + \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \ln f_i(x_{it}; \alpha_i)$$

que muestra que es posible maximizar el logaritmo de la función de verosimilitud en dos etapas:

- calibrar los parámetros para cada densidad marginal, individualmente, utilizando máxima verosimilitud del modo habitual:

$$\text{Max}_{\alpha_i} \sum_{t=1}^T \ln f_i(x_{it}; \alpha_i), \text{ para } i = 1, 2, \dots, n$$

- calibrar los parámetros de la cópula resolviendo el problema de optimización, condicionado en las estimaciones de los parámetros α_i :

$$Max_{\theta} \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_{1t}; \hat{\alpha}_1), F_2(x_{2t}; \hat{\alpha}_2), \dots, F_n(x_{nt}; \hat{\alpha}_n); \theta)$$

4.4 Estimación de una cópula t-Student

Como ilustración de los métodos, vamos a considerar cópulas bivariantes, aunque los razonamientos se extienden sin dificultad a cópulas multivariantes.

[EII.6.4] Consideremos un inversor que tiene una posición en FTSE, y desea reducir su riesgo tomando asimismo una posición en el índice de volatilidad Vftse. Durante el periodo muestral de que dispone, las rentabilidades anualizadas promedio del FTSE y Vftse fueron, respectivamente, 10,52% y -4,11%, con volatilidades promedio de 10,52% y 83,10%. A pesar de su elevada volatilidad y su menor rentabilidad, el Vftse puede proporcionar cierta cobertura porque, aunque las posiciones en volatilidad ofrezcan a menudo rentabilidades negativas, las posiciones en volatilidad tienen habitualmente una correlación negativa y elevada con las posiciones en acciones.

En el ejercicio [EII.6.4] se calibra una cópula t-Student y una cópula Clayton, en ambos casos con marginales t-Student. Comenzamos en [EII.6.4.a] calculando las rentabilidades *estandarizadas* de los dos activos considerados, ξ_1, ξ_2 , y ajustando a cada una de ellas una distribución t-Student estandarizada. La estimación por máxima verosimilitud del número de grados de libertad ν_1, ν_2 de cada distribución de probabilidad marginal resulta en 6,18 grados de libertad para el FTSE y 5,02 para el Vftse [EII.6.4].

A continuación se estiman el número de grados de libertad y la correlación de cópula maximizando la función de verosimilitud de la cópula t-Student:

$$c(u_1, u_2; \rho) = K \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[1 + \frac{\xi_1^2 - 2\rho\xi_1\xi_2 + \xi_2^2}{\nu(1-\rho^2)} \right]^{-\frac{\nu+2}{2}} [(1 + \nu^{-1}\xi_1^2)(1 + \nu^{-1}\xi_2^2)]^{\frac{\nu+1}{2}}$$

donde:

$$K = \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)^{n-1} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^{-n} \Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right)$$

Podemos hacer la calibración de la t-Student de dos modos diferentes: uno, menos eficiente estadísticamente, pero mas simple computacionalmente, que calibra primero el parámetro de correlación ρ y luego utiliza maxima verosimilitud para estimar el número de grados de libertad ν , o estimar por maxima verosimilitud simultáneamente ambos parametros. El primer metodo proporciona un coeficiente de correlación de Spearman de -0,689, por lo que: $\rho = -0,706$, y unos grados de libertad $\nu = 6,68$, con logaritmo de la función de verosimilitud 538,91. El segundo método conduce a: $\rho = 0,795$, $\nu = 6,66$, con *loglik* = 555,31, lógicamente mas elevado.

En la hoja de cálculo EII.6.4(b) se estima la cópula de Clayton. Para calibrar dicha cópula se toma $T_{\nu_1}(\xi_1), T_{\nu_2}(\xi_2)$, siendo $\xi_i, i = 1, 2$, las rentabilidades

estandarizadas de ambos activos, y se formula el logaritmo de la densidad de cópula: $c(u_1, u_2) = (\alpha + 1) (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-2-(1/\alpha)} u_1^{-\alpha-1} u_2^{-\alpha-1}$, que se agrega en el tiempo y se maximiza sobre α .

También es posible calibrar una copula sin especificar las distribuciones marginales aunque, lógicamente, este procedimiento nos deja sin información acerca de las distribuciones marginales. Lo que hacemos es transformar las rentabilidades observadas en variables uniformes mediante la distribución marginal *empírica* de cada rentabilidad, y luego aplicamos máxima verosimilitud a la función de densidad de la cópula para estimar sus parámetros. Este es el procedimiento de *máxima verosimilitud canónica*. Para aplicarlo, comenzaríamos calculando $\hat{F}(x_1), \dots, \hat{F}(x_n)$, siendo n el tamaño muestral y luego obtendríamos $\xi = (T_\nu^{-1}(u_1), \dots, T_\nu^{-1}(u_n))$, que llevamos a la densidad de cópula *t-Student* para maximizarla y estimar el número de grados de libertad y el parámetro de correlación.

4.5 Selección de copulas

Un modo natural de comparar copulas estimadas con una determinada muestra es comparar los valores máximos de la función de verosimilitud alcanzados con cada una de dichas copulas. Como habremos de tener en cuenta el número de parámetros de cada copula, una posibilidad es utilizar el criterio de información de Akaike (AIC) o el criterio Bayesiano de información (BIC):

$$\begin{aligned} AIC &= 2k - 2 \ln L \\ BIC &= T^{-1}(k \ln T - 2 \ln L) \end{aligned}$$

siendo preferible la copula que proporcione un valor menor de dichos criterios.

Alternativamente, podemos comparar el ajuste entre la copula teórica estimada y la copula empírica. La cópula empírica se calcula del siguiente modo: Dados pares de observaciones muestrales $(x_t, y_t), t = 1, 2, \dots, T$, ordenamos crecientemente las observaciones de una y otra variable, por separado, y denotamos por $x^{(i)}, i = 1, 2, \dots, T; y^{(j)}, j = 1, 2, \dots, T$ los estadísticos de orden resultantes.¹⁴

La función de distribución empírica de la copula se define:

$$\hat{C} \left(\frac{i}{T}, \frac{j}{T} \right) = T^{-1} n_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, T$$

siendo: $n_{ij} =$ número de pares (x, y) tales que $x \leq x^{(i)}$ e $y \leq y^{(j)}$

Cuando hay empates, puede ser más sencillo calcular la distribución de la cópula *acumulando bidimensionalmente* los valores de la densidad empírica de copula, que se define:

¹⁴ $x^{(1)} = \min \{x_1, x_2, \dots, x_T\}$, $x^{(2)}$ es el segundo menor valor observado de X , y así sucesivamente.

$$\begin{aligned}\hat{c}\left(\frac{i}{T}, \frac{j}{T}\right) &= T^{-1} \text{ si } \left(x^{(i)}, y^{(j)}\right) \text{ es un elemento de la muestra} \\ &= 0 \text{ en caso contrario, } i, j = 1, 2, \dots, T\end{aligned}$$

(ver Tabla II.6.5 en Excel Examples EII.6)

Para seleccionar una copula en base a la bondad de ajuste, puede utilizarse la raíz del error cuadrático medio, es decir, la raíz cuadrada de las diferencias al cuadrado entre copula estimada y copula empírica. Sería, sin embargo, preferible utilizar un criterio que enfatice la bondad de ajuste de la copula estimada en las colas de la distribución de frecuencias observadas.

4.6 Regresión cuantílica

Dado un cuantil q de la variable Y , la regresión cuantílica resuelve el problema:

$$\min_{(\alpha, \beta)} \sum_{t=1}^T (q - 1_{y_t \leq \alpha + \beta x_t}) (y_t - (\alpha + \beta x_t))$$

o, equivalentemente:

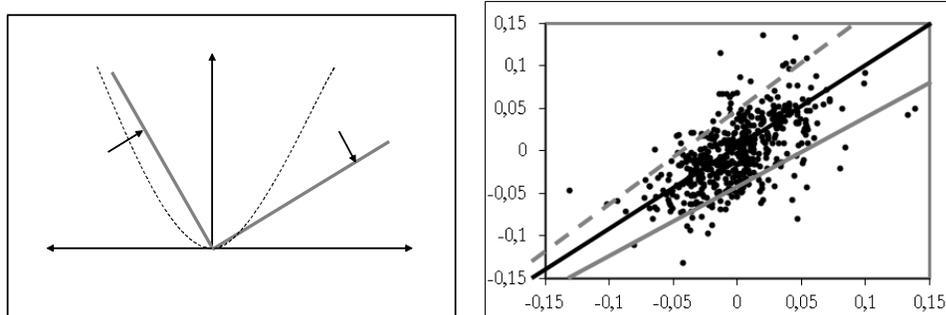
$$\min_{(\alpha, \beta)} \left[q \sum_{y_t \geq \alpha + \beta x_t} (y_t - (\alpha + \beta x_t)) - (1 - q) \sum_{y_t \leq \alpha + \beta x_t} (y_t - (\alpha + \beta x_t)) \right]$$

Nótese que la primera suma recoge residuos positivos, mientras que la segunda suma recoge los residuos negativos, de modo que ambas sumas entran positivamente en la función objetivo. Esta función generaliza el problema conocido como Mean Absolute Regression:

$$\min_{(\alpha, \beta)} \sum_{t=1}^T |y_t - (\alpha + \beta x_t)|$$

que utiliza como función de pérdida las dos bisectrices en los cuadrantes que aparecen en el gráfico izquierdo, junto con la función de pérdida cuadrática del estimador MCO. Vemos cómo para valores $q < 0.5$ se asigna una mayor ponderación¹⁵ a los residuos negativos que a los residuos positivos, sucediendo lo contrario cuando $q > 0.5$. En Finanzas, dado que habitualmente queremos cubrir el riesgo a la baja, este modelo suele utilizarse con valores de q reducidos.

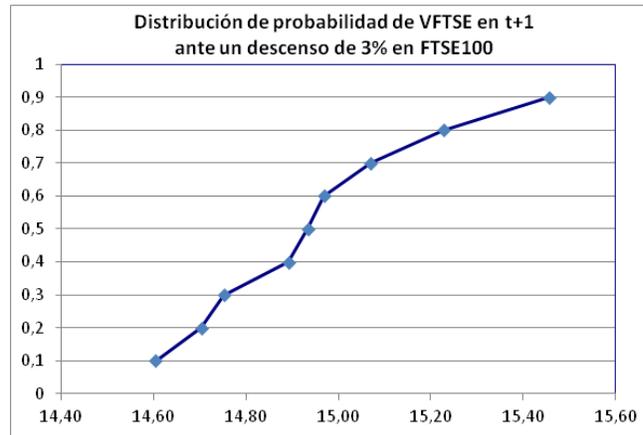
¹⁵ Por ejemplo, si $q = 0.25$, los residuos negativos reciben una ponderación 3 veces superior a la que reciben los residuos positivos.



En el gráfico de la derecha se muestra el resultado de la regresión cuantílica para varios valores del cuantil q de Y . La línea punteada corresponde a $q = 0.9$, la línea continua gris corresponde a $q = 0.1$, y la línea central se corresponde con la mediana, es decir, con la Mean Absolute Regression, que resuelve el problema de minimizar la suma de los valores absolutos de los residuos. Es conocido que la recta de regresión mínimo cuadrática pasa por el punto (\bar{y}, \bar{x}) . En cambio, la regresión cuantílica pasa por un cuantil de la nube de puntos. Si q es pequeño, por ejemplo, $q = 0.1$, entonces la mayoría de los puntos de la muestra quedará por encima de la recta de regresión correspondiente al q -cuantil. Esto se debe a que con $q = 0.1$ los residuos negativos tienen asociado un peso muy importante en la función objetivo, por lo que los coeficientes estimados tenderán a generar pocos residuos negativos (puntos con un valor de Y inferior al esperado de acuerdo con la recta de regresión) y muchos puntos positivos (puntos con un valor de Y superior al esperado de acuerdo con la recta de regresión).

En el Case Study II.7.3.1 se analiza la relación entre la rentabilidad del índice FTSE100 y la rentabilidad del índice de volatilidad asociado, VFTSE. La regresión cuantílica arroja el resultado que se muestra en las primeras filas de la tabla. En la tabla se muestra asimismo el impacto estimado sobre la volatilidad de una caída del 3% en el índice FTSE100:

q	Linear Quantile Regressions								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
alpha (Solver)	-0,039	-0,025	-0,016	-0,006	0,001	0,008	0,016	0,027	0,045
T-stat alpha	-21,815	-15,661	-9,716	-4,278	0,681	5,920	10,366	14,952	16,957
beta (Solver)	-6,010	-5,784	-5,609	-5,653	-5,525	-5,381	-5,388	-5,434	-5,403
T-stat beta	-22,465	-24,525	-23,263	-26,729	-27,687	-26,475	-23,975	-20,592	-13,622
VFTSE Rtn	14,10%	14,88%	15,26%	16,34%	16,67%	16,95%	17,74%	18,97%	20,76%
New VFTSE	14,60	14,70	14,75	14,89	14,93	14,97	15,07	15,23	15,46



La interpretación es que con probabilidad del 60%, el ascenso porcentual en el índice de volatilidad VFTSE sería superior al 16,34%, elevándose la volatilidad (a partir de un nivel de 12,8) en un nivel por encima del 14,89. El gráfico muestra la distribución de probabilidad de $VFTSE(t + 1)$, a partir de su nivel actual $VFTSE(t) = 12,8$ en el supuesto de que FTSE100 cayera un 3% en $t + 1$.

Aunque hemos extendido la regresión habitual en el sentido de permitir que los parámetros estimados cambien entre distintas submuestras, todavía estamos imponiendo una relación lineal entre ambos índices. Sin embargo, cuando las variables X e Y se relacionan a través de una distribución distinta de la Normal, la relación entre ambas será no lineal.

4.7 Regresión cuantílica de cópulas

Para ello, nos apoyamos en la teoría de cópulas. Si ambas variables tienen distribución Normal y se relacionan mediante una cópula Normal, la curva cuantil es:

$$Y = \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} \Phi^{-1}(q)$$

que es, efectivamente, lineal.

Sin embargo, si suponemos que las variables X, Y siguen distribuciones marginales F_1, F_2 , que previamente hemos especificado y estimado por Máxima Verosimilitud, la curva cuantil de una cópula Normal es:

$$Y = F_2^{-1} \left[\Phi \left(\rho \Phi^{-1}(F_1(X)) + \sqrt{1 - \rho^2} \Phi^{-1}(q) \right) \right]$$

mientras que la de una cópula t-Student es:

$$Y = F_2^{-1} \left[T_v \left(\rho \cdot T_v^{-1}(F_1(X)) + \sqrt{(1 - \rho^2) \frac{v + T_v^{-1}(F_1(\xi_1))^2}{v + 1}} T_{v+1}^{-1}(q) \right) \right]$$

mientras que si se relacionan a través de una cópula Clayton, la curva cuantil es:

$$Y = F_2^{-1} \left[\left(1 + F_1(X)^{-\alpha} \left(q^{-\alpha/(1+\alpha)} - 1 \right) \right)^{-1/\alpha} \right]$$

y hay muchas otras cópulas para las que existe una expresión analítica como las anteriores para la curva cuantílica.

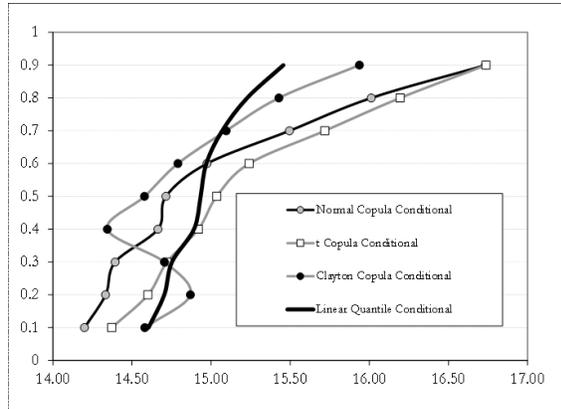
La *regresión cuantílica de cópula* es la solución al problema:

$$\min_{\theta} \sum_{t=1}^T (q - 1_{y_t \leq Q_q(x_t, q; \theta)}) (y_t - (Q_q(x_t, q; \theta)))$$

Estadísticamente, es más eficiente si en vez de calibrar las distribuciones marginales por separado de la cópula, estimamos todo simultáneamente, resolviendo el problema:

$$\min_{\alpha, \theta} \sum_{t=1}^T (q - 1_{y_t \leq Q_q(x_t, q; \alpha, \theta)}) (y_t - (Q_q(x_t, q; \alpha, \theta)))$$

Para estimar una cópula para representar la relación entre VFTSE y FTSE100 suponiendo que siguen distribuciones marginales tipo t-Student, comenzaríamos estandarizando los datos y estimando los grados de libertad de sus distribuciones marginales estandarizadas, lo que se hace en EII.6.4. A continuación, en Case Study II.7.1 se estima una regresión cuantílica para una cópula Normal, así como para una cópula t-Student y una cópula de Clayton. Las distribuciones condicionales de VFTSE(t+1) bajo el supuesto de que FTSE caiga un 1% en t+1 se muestran en el gráfico:



donde podemos ver que tendríamos una confianza del 90% de que la volatilidad de FT100 (VFTSE) no excedería de 16,74 bajo la regresión de cópula t-Student, o de 16,62 bajo la cópula Normal o de 15,59 bajo la cópula Clayton, o de 15,46 bajo la regresión cuantílica lineal.

5 Aplicaciones

5.1 Gestión de carteras: ratio de Sharpe

Para calcular las características de los resultados proporcionados por una cartera podemos seguir varias opciones. Una posibilidad sería construir hacia el pasado una serie temporal de rentabilidades de la cartera utilizando las ponderaciones actuales. Pero esto puede ser complicado si hay valores que no han cotizado mucho tiempo. Alternativamente, podríamos utilizar la matriz de correlaciones de las rentabilidades de los activos de la cartera para, suponiendo algún tipo de distribución conjunta, como la Normal multivariante, calcular algunos estadísticos, como el VaR. Pero supuestos como el de Normalidad pueden resultar bastante contrarios a la evidencia empírica. En este aspecto las cópulas pueden ayudar, al permitir recoger asimetrías en la correlación, así como la posibilidad de fuertes dependencias en las colas de la distribución.

Cálculo de momentos de una cartera (Example EII.6.8)

Continuando con el ejercicio EII.6.4, que vimos en la sección de estimación de cópulas t-Student, vamos a caracterizar la cartera que, invirtiendo en ambos índices, FTSE y VFTSE, maximiza el ratio de Sharpe. Para ello, vamos a utilizar la cópula Gaussiana, con las marginales t-Student que hemos estimado en el ejercicio anterior. El ejercicio puede repetirse sin ninguna dificultad con una copula t-Student.

Para describir el objetivo del ejercicio, supongamos que la dependencia entre las rentabilidades de los dos activos que forman una cartera (también podría tratarse de los dos factores de riesgo de un conjunto de activos) está

bien representada por una cópula Normal, con marginales t -Student previamente estimadas con diferentes grados de libertad. Establecemos una partición fina (x) en la recta real representando las posibles rentabilidades *estandarizadas* de cada uno de los dos activos o factores, que se acotan en un cierto rango, como $[-5,+5]$. De este modo formamos una rejilla en el cuadrado \mathbb{R}^2 . En cada elemento de dichas particiones calculamos el valor de la distribución t -Student marginal, $T_{\nu_1}(x_{1i})$ ó $T_{\nu_2}(x_{2j})$, correspondiente a cada activo, obteniendo dos variables con distribución uniforme en $[0,1]$. A continuación, aplicamos la inversa de la distribución $N(0,1)$, para obtener $\xi_{1i} = \Phi^{-1}(u_{1i})$, $\xi_{2j} = \Phi^{-1}(u_{2j})$, y calculamos el valor de la densidad de cópula Gaussiana $c(u_{1i}, u_{2j}; \rho) \equiv c(\Phi^{-1}(u_{1i}), \Phi^{-1}(u_{2j}); \rho)$ de acuerdo con (5), y tomando en cuenta la correlación ρ deseada para los pares de rentabilidades estandarizadas (ξ_1, ξ_2) , correlación que deberíamos haber estimado previamente.

Ahora tenemos, para cada punto de la rejilla, los valores numéricos de la densidad de copula y de las dos densidades marginales t -Student, por lo que podemos calcular el valor numérico de la densidad conjunta:¹⁶

$$\begin{aligned} f(x_{1i}, x_{2j}) &= c(\Phi^{-1}(u_{1i}), \Phi^{-1}(u_{2j}); \rho) \cdot t_{\nu_1}(x_{1i}) \cdot t_{\nu_2}(x_{2j}) = \\ &= c(\Phi^{-1}(T_{\nu_1}(x_{1i})), \Phi^{-1}(T_{\nu_1}(x_{2j})); \rho) \cdot t_{\nu_1}(x_{1i}) \cdot t_{\nu_2}(x_{2j}) \end{aligned}$$

Esta misma distribución de probabilidad que acabamos de caracterizar, la asociamos a continuación a las rentabilidades no estandarizadas. Para ello, reconstruimos las rentabilidades no estandarizadas de cada activo, sumando a cada uno de los elementos de la rejilla que establecimos en $[0,1]$ la rentabilidad media μ_i , y multiplicando por su desviación típica σ_i , $i = 1, 2$, para obtener (r_i, r_j) , las posibles rentabilidades en R^2 . Con estas rentabilidades, y tomando ponderaciones dadas para cada activo, podemos calcular la rentabilidad esperada de la cartera:

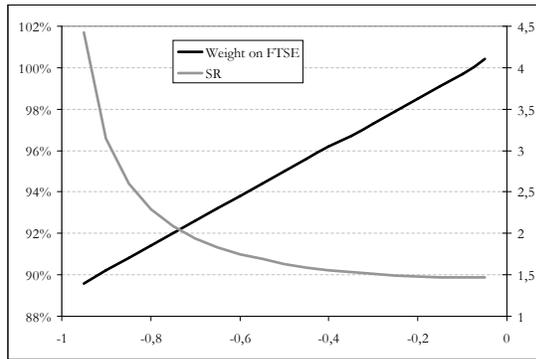
$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (wr_i + (1-w)r_j) \cdot \Phi_c(\underbrace{\Phi^{-1}(T_{\nu_1}(r_i))}_{\xi_1}, \underbrace{\Phi^{-1}(T_{\nu_2}(r_j))}_{\xi_2}) \cdot t_{\nu_1}(r_i) t_{\nu_2}(r_j) \quad (8)$$

Análogamente calculamos la esperanza matemática de las rentabilidades de la cartera al cuadrado: $E(r^2) = \sum_i \sum_j (wr_i + (1-w)r_j)^2 \cdot f(x_{1i}, x_{2j})$, su desviación típica: $\sigma_c = \sqrt{Var(r_c)} = \sqrt{E(r^2) - [E(r)]^2}$, y el ratio de Sharpe: $\frac{250 \cdot E(r) - 0,05}{\sqrt{250} \cdot \sigma_c}$, que maximizamos con respecto a ω .

Con el nivel de correlación previamente estimado, $\rho = -0,795$, la cartera óptima se obtiene invirtiendo 91,4% del capital en FTSE y el restante 8,6% en Vftse.

¹⁶La suma de estos valores no es 1, sino que dependerá del número de puntos que haya en la rejilla. La suma sería igual a 1 si multiplicamos el área de cada celda por el valor medio que toma en ella la función de densidad, y sumamos para todo el rango de valores de las variables.

Es interesante ver como cambia la composición de la cartera óptima en función del nivel de correlación, lo que se ilustra en el siguiente gráfico:



5.2 Cálculo del Valor en Riesgo

[Copula_simulations II.6.7.xls] Al estudiar los modelos factoriales, ya vimos cómo podría estimarse el VaR mediante simulación Monte Carlo. Para ello, simulamos un largo número de sendas de rentabilidades (o de P&L) de cada uno de los factores de riesgo de la cartera sobre el horizonte de riesgo. Aplicamos la proyección sobre los factores a cada senda simulada, y obtenemos la rentabilidad (o P&L) de la cartera en dicha senda. Finalmente, estimamos el VaR como el percentil inferior de la distribución simulada de rentabilidades (o de la distribución de P&L).

Vamos a hacer ahora un ejercicio similar para cópulas bivariantes. Las copulas de Clayton y Gumbel, entre otras, permiten modelizar dependencia asimétrica en ambas colas de una distribución bivalente, lo que es sin duda interesante en el análisis financiero. Si tenemos una cartera con dos activos, o si podemos representar el riesgo de nuestra cartera mediante el uso de dos factores, podemos utilizar cópulas para representar la dependencia entre ambos factores, y calcular el VaR mediante simulación Monte Carlo.

Para ello, tendremos que especificar las distribuciones marginales, así como la distribución de cópula (por ejemplo, copula *t*-Student con marginales Normales). Una vez estimada dicha copula, simulamos la copula estimada con las marginales especificadas, aplicamos los pesos de la cartera a los pares de valores simulados, nos aseguramos de transformarlos de modo que tengan las volatilidades de los activos o factores utilizados, y estimamos el cuantil deseado de la distribución bivalente simulada.

Ejemplo 1: Supongamos que la dependencia entre los dos activos (o factores de riesgo) está bien descrita mediante una cópula *Gaussiana* o una cópula *t*-Student. Para calcular el VaR:

- simulamos series temporales con dicha dependencia de cópula y marginales uniformes y aplicar a dichas series las inversas de las distribuciones

marginales, como hicimos en la sección (3.1.1). Así obtendremos pseudo-rentabilidades con media cero y varianza unitaria.

- multiplicamos cada serie temporal de rentabilidades por la desviación típica estimada en la muestra para dicho activo
- aplicamos las ponderaciones para obtener una serie temporal de rentabilidades de la cartera
- calculamos el percentil correspondiente al VaR en la serie temporal de rentabilidades de la cartera

Ejemplo 2: supongamos que los dos factores tienen distribución marginal Normal, y que modelizamos su dependencia mediante una copula Clayton. Supuestamente, habremos estimado un valor numérico de α que genere una correlación en las simulaciones similar a la correlación que hemos impuesto en las copulas anteriores, Normal o t -Student. En su simulación utilizaremos las densidades de copula condicionales. Una vez estimadas las marginales y la copula, para el cálculo del VaR:

- simulamos variables uniformes independientes: u_1, v (las mismas de los ejemplos previos)
- utilizamos la densidad condicional: $u_2 = C_{2/1}^{-1}(v | u_1) = [1 + u_1^{-\alpha}(v^{-\alpha/(1+\alpha)} - 1)]^{-1/\alpha}$ para generar observaciones sobre u_2 . Así tenemos una realización de una copula de Clayton con marginales uniformes.
- aplicamos las inversas de las funciones de distribución marginales para convertirlas en $N(0, 1)$ dependientes: $(x_1, x_2) = (\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2))$. Estas dos variables no tendrán una distribución conjunta Normal bivariante, puesto que la dependencia en la cola inferior será elevada.
- multiplicamos cada serie temporal de rentabilidades por la desviación típica estimada en la muestra para dicho activo
- aplicamos las ponderaciones para obtener una serie temporal de rentabilidades de la cartera
- calculamos el percentil correspondiente al VaR en la serie temporal de rentabilidades de la cartera

5.3 Distribución de la suma de variables aleatorias

En la evaluación del riesgo de una institución financiera, es natural que surja la necesidad de calcular el riesgo agregado de posiciones en varios activos o carteras. Para ello, será necesario caracterizar la distribución de probabilidad de la suma de rentabilidades, conociendo la distribución de cada una de ellas por separado. Matemáticamente, la operación se conoce como *convolución*.

Si dos variables X_1, X_2 tienen distribución conjunta $f(x_1, x_2)$, entonces, denotando por Y su suma, tenemos la densidad:

$$h(y) = \int_{x_1} f(x_1, y - x_1) dx_1 = \int_{x_2} f(y - x_2, x_2) dx_2 \quad (9)$$

lo cual se puede generalizar a 3 o 4 variables:

$$\begin{aligned} h(y) &= \int_{x_1} \int_{x_2} f(x_1, x_2, y - x_1) dx_1 dx_2 \\ h(y) &= \int_{x_1} \int_{x_2} \int_{x_3} f(x_1, x_2, x_3, y - x_1) dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

expresiones que nos proporcionan la función de densidad de $Y = X_1 + X_2 + X_3$ o de $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$. Por ejemplo, si:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \exp(-(x_1 + x_2 + x_3)), x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0,$$

entonces:

$$h(y) = \int_0^y \int_0^{y-x_3} e^{-y} dx_2 dx_3 = \frac{1}{2} y^2 e^{-y}, y > 0$$

En el ejercicio siguiente, calculamos numericamente la convolución (9) lo que nos permite generar la distribución de probabilidad de la suma de variables aleatorias. En el caso de que la suma en cuestión se refiera a la contribución de cada activo a la rentabilidad de una cartera, el ejercicio es relativamente similar al que desarrollamos al caracterizar la cartera que maximiza el ratio de Sharpe. La diferencia es que en esta caso podemos caracterizar la distribución de probabilidad de la suma, no solo sus momentos.¹⁷

Ejemplo [EII.6.6] Consideremos dos variables aleatorias con distribución Gamma(8; 1) y Gamma(10; 0,6) respectivamente. La hoja de cálculo describe como obtener la función de densidad de su suma, modelizando la correlación entre ellas por medio de una cópula Normal y suponiendo que dicha correlación es a) 0,5, b) -0,5.

Para ello, hemos de aplicar la densidad de cópula Normal a dos variables obtenidas después de aplicar Φ^{-1} a dos uniformes previamente generadas con la dependencia deseada. En este caso, son independientes (aunque no se dice nada al respecto en el enunciado). Comenzamos aplicando las funciones de distribución¹⁸ marginales $G_1(8, 1), G_2(10, 0.6)$, al rango relevante de valores en la recta real, obteniendo variables uniformes u_1, u_2 en $(0,1)$. Aplicamos Φ^{-1}

¹⁷Bien es cierto que lo hacemos porque en este caso las dos distribuciones marginales son discretas. Pero siempre podemos discretizar con distribuciones continuas en intervalos de valores numéricos.

¹⁸En Excel, la instrucción `DISTR.GAMMA(celda;alfa;beta;opcion)` requiere introducir los valores numéricos de los parámetros alfa y beta de la distribución de probabilidad GAMMA. Si la "opción" es 1, proporciona la función de distribución. Si es igual a 0, proporciona el valor numérico de la función de densidad.

a ambas variables uniformes, obteniendo ξ_1, ξ_2 , a los que aplicamos la cópula Gaussiana. De este modo, obtenemos la densidad de cópula, $c(\xi_1, \xi_2)$.

Aplicamos a continuación las densidades marginales Gamma g_1, g_2 a lo largo de la recta real y multiplicamos por la densidad de cópula: $c(\xi_1, \xi_2)g_1(\xi_1)g_2(\xi_2)$, obteniendo la función de densidad bivariate. Finalmente, acumulamos las probabilidades (valores numéricos de la densidad), siguiendo las indicaciones de la integral de convolución.

Posteriormente, se propone el mismo ejercicio, esta vez utilizando una cópula de mixtura de Normales para modelizar la correlación entre X_1 y X_2 . Las dos distribuciones Normales son las dos anteriores, con $\rho = 0,5$ y $\rho = -0,5$. En la hoja de cálculo se prueba que hay dos modos de proceder:

- generando la densidad de la cópula de mixtura mediante combinación lineal de las dos densidades anteriores $c(\xi_1, \xi_2) = \pi \cdot c_1(\xi_1, \xi_2) + (1 - \pi) \cdot c_2(\xi_1, \xi_2)$. Seguidamente, tomamos la recta real, calculamos las densidades marginales g_1, g_2 , y multiplicamos por la densidad de cópula antes calculada: $c(\xi_1, \xi_2) \cdot g_1(\xi_1) \cdot g_2(\xi_2)$, cuyos valores numéricos agregamos adecuadamente para obtener la densidad de la suma de ambas variables,
- agregando directamente las funciones de densidad de la suma $X_1 + X_2$ obtenida bajo ambos valores de ρ utilizando la probabilidad de mezcla de ambas distribuciones.

5.4 Cobertura de carteras bajo regresiones cuantílicas de cópula

La cobertura de carteras es precisamente una de las situaciones en que un gestor de riesgos puede estar interesado en minimizar el riesgo a la baja específicamente, lo que sugiere el uso de regresiones cuantílicas en preferencia a la cobertura de Mínimos Cuadrados. El Case Study II.7.3.2 analiza la cobertura de una cartera equiponderada de Vodafone, British Petroleum y HSBC. Después de construir una serie temporal de cotizaciones de dicha cartera, generamos la rentabilidad de la cartera y del índice FTSE100 y estimamos el ratio de cobertura de Mínimos Cuadrados es 0,547. Si utilizamos una regresión cuantílica con $q = 0,5$ obtenemos un ratio de cobertura de 0,496, inferior al de mínimos cuadrados. Pero ninguno de estos dos modelos está diseñado para dar una consideración especial al riesgo a la baja. Para ello, hacemos $q = 2$, obteniendo un ratio de cobertura todavía inferior: 0,482. Una menor posición corta en el activo de cobertura proporciona en este caso una mejor protección frente a riesgo a la baja.

Para permitir relaciones no lineales entre las rentabilidades de la cartera y el índice, estimamos: a) una regresión de cópula Normal con $q = 0,20$, con marginales t-Student, b) una regresión de cópula t-Student para $q = 0,20$, con marginales t-Student. Para ello, comenzamos estandarizando ambas rentabilidades. Estimamos el número de grados de libertad en 9,99 para FTSE y 10,16

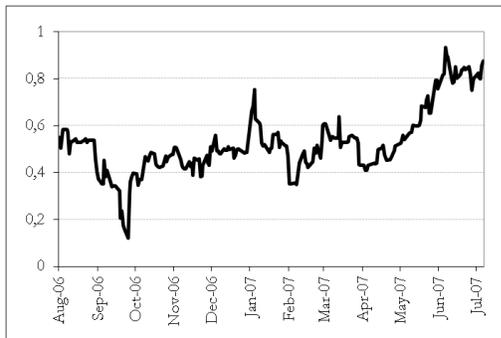
para la cartera equiponderada. Obtenemos un ratio de 0,557 para la cópula Normal y de 0,555 para la cópula t-Student, ambos significativamente superiores al ratio de la regresión cuantílica lineal, que era 0,482.

Por último, podríamos estimar un ratio permitiendo variación temporal. Hay varios procedimientos que podemos aplicar. El método EWMA (exponential moving average model) genera un ratio de cobertura:

$$\beta_t = \frac{Cov_\lambda(R_{ct}, I_t)}{Var_\lambda(I_t)}$$

siendo R_{ct}, I_t las rentabilidades de la cartera y el índice que utilizamos como cobertura, FTSE100, en el instante t .

Ratio cobertura EWMA



Una cobertura cambiante en el tiempo puede estimarse mediante modelos GARCH bivariantes sobre las rentabilidades del contado y del activo de cobertura. De este modo, el ratio de cobertura se va adaptando a las situaciones de mercado en función de cambios en las volatilidades relativas de ambos activos y de su correlación, que pueden variar muy significativamente. [ver Lafuente y Novales (2003), Andani, Lafuente y Novales (2009), y Novales y Urtubia (2014) para coberturas cruzadas].

Este ejercicio muestra que hay un riesgo de modelo bastante significativo al decidir coberturas óptimas. En este caso, el ratio de cobertura debe ser algo más reducido que el de mínimos cuadrados si queremos que trate adecuadamente el riesgo a la baja, pero ligeramente más elevado si va a tener en cuenta la dependencia no lineal entre rentabilidades que no siguen una distribución conjunta Normal. Además, los ratios de cobertura que reflejan mejor las condiciones de mercado son considerablemente más altos que los que se estiman utilizando promedios muestrales. Sin embargo, no hay una regla general a este respecto.