



Universidad Complutense

**Doctorado en
Finanzas de Empresa**
(ISSN: 1698-8183)

***Documento de Trabajo
0703***



Universidad Autónoma

**VALORACIÓN Y COBERTURA CON FUNCIONES
GENERALES DE RIESGO: APLICACIÓN A MERCADOS
ENERGÉTICOS DERIVADOS**

Autora: Raquel BALBÁS

2007

VALORACIÓN Y COBERTURA CON FUNCIONES GENERALES DE RIESGO: APLICACIÓN A MERCADOS ENERGÉTICOS DERIVADOS

Raquel Balbás Aparicio
Universidad Autónoma de Madrid

Dirigido por:

Manuel Monjas Barroso. Universidad Autónoma de Madrid.
Alejandro Balbás de la Corte. Universidad Carlos III de Madrid.

Memoria presentada para obtener el Diploma de Estudios Avanzados.

Curso 2006-2007

Índice

1. Introducción	4
2. El Mercado Nórdico de Electricidad: Activos Negociables y Sis- temas de Negociación	7
2.1. Introducción	7
2.2. El Nord Pool	8
2.3. Cronología	8
2.4. El Mercado Financiero	10
2.4.1. Contratos de Futuro sobre Electricidad	11
2.4.2. Contratos Forward sobre Electricidad	12
2.4.3. Contratos por Diferencias sobre Electricidad	13
2.4.4. Opciones sobre Electricidad	15
2.4.5. Certificados de Electricidad (<i>Electricity Green Certificates</i>)	17
2.4.6. Contratos Forward sobre Permisos de Emisión	17
2.4.7. Permisos de Emisión	18
2.5. Sistema de Negociación del Nord Pool	18
2.6. Conclusiones	20
2.7. Referencias	21
3. Estimación de los Niveles de Riesgo en los Mercados Eléctricos	22
3.1. Introducción	22
3.2. Características Particulares de los Precios de la Electricidad . . .	23
3.3. Métodos de Medición del Riesgo	25
3.4. Simulación Histórica	29
3.5. Backtesting	30
3.6. Teoría del Valor Extremo (<i>Extreme Value Theory</i>)	30
3.7. Conclusiones	31
3.8. Referencias	31
4. Selección de Carteras y Cobertura Óptima con Medidas Gene- rales de Riesgo: Un Algoritmo Tipo Simplex	32
4.1. Introducción	32
4.2. Preliminares	34
4.3. Minimización de Riesgos por Optimización en Espacios de Banach	36
4.4. Programas Semi-infinitos	41
4.5. El Algoritmo Tipo Simplex	42
4.6. Ejemplos de Funciones de Riesgo Importantes	50
4.7. Ejemplo Numérico	53
4.8. Conclusiones	56
4.9. Apéndice I: datos para el ejemplo práctico de la sección 4	57
4.10. Referencias	62

5. Modelos Tipo APT y CAPM con Medidas Generales de Riesgo	64
5.1. Introducción	64
5.2. Distorsión de las Probabilidades e Índices y Factores Generalizados	65
5.3. Índices con Colas Ligeras	72
5.4. Estrategias de Cola Ligera	75
5.5. Comparación de Índices	78
5.6. Conclusiones	79
5.7. Referencias	80
6. Sobre la Aplicabilidad de las Medidas Generales de Riesgo en los Mercados Eléctricos	82
6.1. Planteamientos generales	82
6.2. Problemas abiertos en mercados eléctricos derivados	83
6.3. Conclusiones	86
6.4. Referencias	86
7. Referencias Generales de la Memoria	87

1. Introducción

Los mercados energéticos derivados se convierten poco a poco en una auténtica alternativa para que compañías energéticas y otros agentes económicos implicados puedan gestionar adecuadamente el riesgo de evolución de precios. El desarrollo que han tenido estos mercados ha sido muy notable, y hoy en día son bastantes los inversores que en ellos operan y la gama de activos negociables. Además, se trata de mercados que dan al sector financiero la posibilidad de entrar en el mundo de la energía como una mera inversión financiera, ampliando considerablemente las posibilidades de diversificación de riesgos y las posibilidades de búsqueda de activos de baja correlación con otros más tradicionales.

En nuestra opinión, mención especial puede merecer el *Nord Pool*, por ser el primer mercado europeo (por volumen de negocio y por diversidad de activos) en la negociación de derivados de electricidad (además de otros activos). Se trata de un mercado que puede cubrir muchas necesidades del sector eléctrico, tanto de productores, como de distribuidores, de todo tipo de comercializadores y, por supuesto, de consumidores cualificados, pero al que también pueden acceder otros inversores que desean ampliar el abanico de activos a incorporar en cartera. Hoy en día es el mercado más desarrollado, pero no es el único, y la creciente liberalización del sector invita a pensar que más mercados y, sobre todo, de mucho mayor tamaño, van a aparecer en el futuro dentro del espacio europeo.

Gestionar los activos y riesgos energéticos en general, y los eléctricos en particular, no es una tarea fácil. En efecto, la electricidad no es almacenable, tiene una demanda estacional que, además, depende de factores bastante imprevisibles, puede ser producida con tecnologías muy diferentes, y se trata de un sector estratégico en el que confluyen muchos intereses. La variedad de implicaciones de todo ello es múltiple, si bien, desde el punto de vista financiero, todo se traduce en que es complejo valorar, cubrir, gestionar e invertir de acuerdo a enfoques y modelos clásicos de la Economía Financiera. En efecto, los costes de transacción pueden ser muy altos, las posibilidades de rebalances en tiempo continuo pueden ser imposibles por la falta de liquidez, estrategias de arbitraje clásicas no se aplican por la tecnológica incapacidad para almacenar electricidad, los retornos de los activos distan muchísimo de seguir distribuciones normales, presentando los conocidos problemas de cola gruesa con fuerte asimetría, etc. Todo ello implica un interés creciente por parte de investigadores y usuarios (practitioners, en la literatura anglosajona) en métodos alternativos que se adapten a estos nuevos problemas.

Pero problemas de falta de liquidez, de existencia de fuertes fricciones, de asimetrías, etc, no sólo aparecen en los mercados eléctricos derivados. Al contrario, son cada día más habituales en un mundo financiero en el que periodo a periodo se desarrollan nuevos mercados y activos que vienen a cubrir las necesidades de inversores, reguladores y supervisores, cada vez más expertos y más

preocupados en una gestión integral y eficiente. En consecuencia, la propia literatura financiera está elaborando nuevos modelos teóricos que sean capaces de explicar y resolver los problemas de entornos más y más complejos. Ejemplos de activos e inversiones para los que las reflexiones anteriores tienen cabida son, entre otros, los hedge funds, los derivados de volatilidad o varianza, los mercados ligados al mundo del seguro (a índices de daños provocados por catástrofes naturales, por ejemplo), las inversiones en mercados emergentes, numerosos derivados sobre mercancías, etc.

Por eso no es extraño hoy en día ver a un significativo número de investigadores centrando su esfuerzo en los mercados imperfectos o en las modernas funciones de riesgo. Ambos temas siguen presentando un número considerable de problemas abiertos, tanto desde el punto de vista teórico, como desde el de las aplicaciones prácticas.

En esta memoria vamos a abordar el problema de las nuevas funciones de riesgo, con objeto de poder aplicar en un futuro nuestras metodologías y conclusiones a los mercados de derivados energéticos, con especial atención al *Nord Pool* antes citado.

Así, la memoria está dividida en esta introducción más otros cinco capítulos. El primero y el último (es decir, los capítulos II y VI) son de carácter más bien descriptivo, y presentan, respectivamente, el funcionamiento del *Nord Pool* y sus activos, y las posibilidades que la metodología presentada en el resto de capítulos tiene a la hora de aplicarse a este mercado, tanto para valorar, como para cubrir o seleccionar inversiones, los tres grandes temas de la Valoración de Activos.

El capítulo tercero no es descriptivo, sino técnico. Hablaremos de los modelos que reflejan el comportamiento de la electricidad y sus derivados. Veremos los problemas específicos de estos mercados, antes brevemente apuntados, y de cómo la teoría Financiera intenta resolver los problemas. Abordaremos también las posibilidades de la estimación empírica de distribuciones y de los métodos de simulación de Monte Carlo.

Los capítulos IV y V son probablemente los más complejos desde el punto de vista técnico. Versan sobre las recientemente introducidas funciones o medidas de riesgo y todo el contenido desarrollado es completamente original. En particular, en el capítulo IV estudiaremos nuevos métodos de optimización de medidas de riesgo generales, con sus posibles aplicaciones a los problemas de valoración y cobertura óptimas, así como a los problemas de elección de cartera. El capítulo V se dedica a extender todas las fórmulas clásicas de los modelos *APT* y *CAPM* (*Arbitrage Pricing Theory* y *Capital Asset Pricing Model*) de forma que éstas se puedan aplicar cuando se usan medidas de riesgo mucho más complejas que la simple desviación típica. Además, se abordará la importantísima división habitual entre riesgo diversificable y específico en el marco

general en el que vamos a trabajar.

Es importante destacar que en el capítulo III también se ha hablado del riesgo de los mercados energéticos, aunque para simplificar sólo se ha utilizado el popular *VaR* para representarlo. Es por esto que el sexto capítulo habla del resto de funciones de riesgo que tienen cabida en estos mercados, destacando muchas de sus posibilidades, y dejando abierta la cuestión de cuál o cuáles de las funciones de riesgo serían las más adecuadas.

Todos los capítulos están muy relacionados, aunque se ha intentado que cada uno tenga su propia autonomía y pueda ser leído sin necesidad de comprender los demás. En particular, cada capítulo incorpora su introducción y sus propias conclusiones, así como la colección de referencias con él relacionadas. Haciéndolo así acortamos considerablemente el contenido de esta introducción general. Al final incorporamos también una relación global de referencias, obtenida por simple unión de las de cada capítulo.

2. El Mercado Nórdico de Electricidad: Activos Negociables y Sistemas de Negociación

Contenido

- Introducción
- El *Nord Pool*
- Cronología
- El Mercado Financiero
- Sistema de Negociación del *Nord Pool*
- Conclusiones
- Referencias

2.1. Introducción

En este primer capítulo de la memoria presentamos una síntesis sobre el mercado del *Nord Pool*, tanto en lo que se refiere a su evolución histórica, como en su funcionamiento, agentes, tipos de activos negociables, liquidez, etc. La elección de este mercado se fundamenta sobre la base de su importancia, ya que, tanto por variedad de activos, como por volumen de negociación, nos encontramos frente al mercado de derivados energéticos más avanzado de Europa y uno de los primeros del mundo.

La existencia del mercado *Nord Pool* nos ofrece dos posibilidades importantes que pasamos a exponer. Por un lado, podemos aplicar los fundamentos de la Economía Financiera de una manera abierta para activos ligados a la energía. En efecto, al considerar un mercado líquido y eficiente podemos trabajar y elaborar conclusiones “sin miedo” a que éstas se vean afectadas por problemas de “manipulación” o creación artificial de precios.¹ Además, o por otro lado, junto a la eficiencia de mercados habrá que tener en cuenta las especificaciones concretas, y muy importantes, que sólo afectan al mercado de electricidad (incapacidad de almacenamiento, estacionalidad de precios, etc.) que serán analizadas en el capítulo siguiente. Por consiguiente, combinamos las características particulares de la energía con las generales de los mercados, lo que sugiere nuevas e importantes posibilidades de investigación, tanto en un nivel teórico como en el práctico.

Presentando este primer capítulo le facilitamos enormemente al lector la comprensión en términos globales de esta memoria y de los objetivos fundamentales que plantea.

¹La manipulación y otros problemas similares pueden generar fuertes e indeseables distorsiones en los mercados financieros. Véase, por ejemplo, Merrick *et al.*(2005)

2.2. El Nord Pool

La desregulación del mercado energético nórdico empezó en Noruega el día 1 de Enero de 1991, cuando el acta del mercado energético entró en vigor con el propósito de reestructurar y liberalizar el mercado de negociación de energía. Además, en 1993 *Nord Pool* (entonces llamado *Statnett Marked AS*) estableció un mercado de *forwards*, usando un sistema de subastas, con entrega física de los contratos sobre energía negociados. Después de un periodo de prueba, orientado hacia las preferencias de los participantes, el mercado de *forwards* se estableció, inicialmente, con tres productos (*base load contracts*, *peak load contracts* y *offpeak load contracts*), horizonte temporal de seis meses y entrega física a vencimiento. Los tres tipos de contratos se negociaban según un único calendario semanal, o en bloques que comprendían cuatro semanas. Según se iba acercando la fecha de vencimiento, los forwards de bloques eran divididos en semanas, de acuerdo a las especificaciones de cada tipo de producto. Esto se muestra en la figura 1.

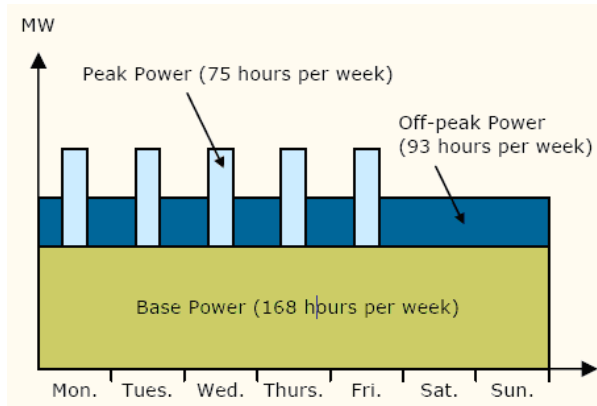


Figura 1: Fuente: El *Nord Pool*

2.3. Cronología

Según se iba desarrollando el mercado nórdico de energía la experiencia mostraba que el concepto de los *forwards* sobre energía necesitaba cambiar para aumentar la liquidez y promover la negociación. De modo, que el *Nord Pool*, tal y como lo conocemos hoy, se formó a partir de los siguientes pasos:

En el periodo de 1993-1994, tanto los *peak load contracts*, como los *off – peak load contracts* fueron eliminados de este mercado, debido a la poca actividad que presentaban y, también, para mejorar la liquidez de los *base load contracts*.

En 1994, el sistema de subastas semanales del mercado financiero fue reemplazado por un sistema de negociación continuo, con las pujas escritas en una tabla blanca en el *trading floor*. Todos los procesos que involucraban a las pujas, las cotizaciones y las propias negociaciones eran llevadas a cabo a través del teléfono entre los participantes del mercado y el *trading floor* del *Nord Pool*.

Para promover la negociación entre los participantes del mercado y estimular un aumento de la liquidez, los contratos financieros se cambiaron de contratos liquidados mediante la entrega física a contratos financieros de electricidad, con liquidación por diferencias a vencimiento. El precio de referencia para todos los contratos financieros era el sistema de precios del mercado de contado del *Nord Pool*. El horizonte temporal de dichos contratos fue aumentado en etapas hasta tres años.

El 1 de Enero de 1996 Suecia se unió a los mercados organizados por el *Nord Pool* y, como consecuencia, se formó así el primer mercado multinacional de negociación de energía eléctrica. Además, el otoño de este mismo año se reemplazó el sistema manual de negociación por el sistema de negociación electrónico *PowerCLICK*.

En 1997, el *Nord Pool* introdujo la negociación de contratos *forwards* sobre energía, y los estandarizó para que se ajustaran a los del mercado OTC. En este mismo año Finlandia se unió al mercado nórdico de negociación de energía, y *EL – EX* se convierte en la sede representante del *Nord Pool* en Helsinki.

En 1999 se observó que la negociación de opciones energéticas era un mercado potencial muy importante, de modo que se estandarizaron estos contratos y comenzaron a negociarse.

En el año 2000, después de que se unificaran los 4 países nórdicos vecinos en un único mercado común de electricidad, se introdujeron los contratos por diferencias como un nuevo tipo de contrato *forward*. Estos nuevos productos fueron introducidos para dar a los participantes del mercado la posibilidad de cubrirse frente a posibles diferenciales de precios entre el sistema *Elspot* y los precios de área individuales.

En el año 2003, se fue introduciendo gradualmente una nueva estructura de productos, reemplazando los bloques con meses, y las estaciones con trimestres, haciendo que los contratos de *Nord Pool* fueran más compatibles con los estándares internacionales.

En 2004 el *Nord Pool* lanzó su primer producto relacionado con la producción de energías renovables. Este nuevo producto es lo que actualmente se conoce como *Elcertificates*. El *Nord Pool* fue el primer mercado europeo de *commodities* en lanzar un producto como éste. El objetivo de esta nueva propuesta era el de crear incentivos para la inversión en la producción de energías

renovables.

Finalmente, en 2005 el *Nord Pool* lanzó contratos *forward* sobre permisos de emisión para la Unión Europea (*EUAs*), para poder hacerse cargo de las emisiones de dióxido de carbono y otros gases que provocan el efecto invernadero, y contrarrestar la amenaza del cambio climático. En principio, este mercado introdujo tres contratos *forward* con entrega física en Diciembre de los años 2005, 2006 y 2007. *Nord Pool* ha sido el primer mercado que ha lanzado un producto de este tipo.

2.4. El Mercado Financiero

En el momento actual, *Nord Pool* permite negociar contratos de futuro, *forwards*, opciones, contratos por diferencias, certificados eléctricos (energías renovables) y permisos de emisión (*EUAs*). El precio de referencia para estos contratos es el sistema de precios del mercado energético nórdico total. El horizonte temporal máximo es actualmente 4 años. No hay entrega física para los contratos derivados del mercado eléctrico.

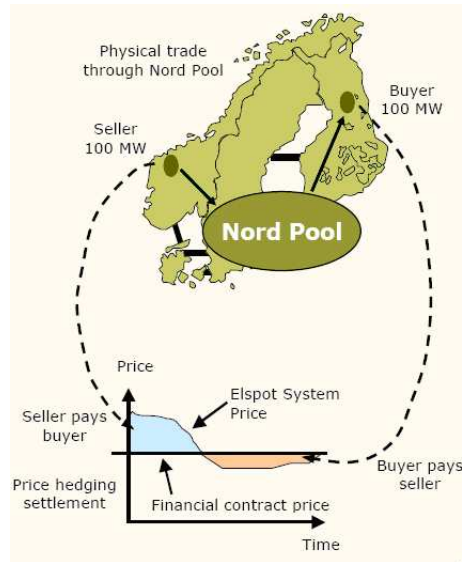


Figura 2: Fuente: El *Nord Pool*

El grupo *Nord Pool* está constituido por el *Nord Pool ASA*, que se encarga del funcionamiento del mercado financiero, el *Nord Pool Spot AS*, que se encarga de la entrega física de los mercados de contado, y el *Nord Pool Clearing ASA*, encargado de llevar a cabo todas las operaciones de liquidación de los contratos eléctricos.

Los contratos financieros han entrado en este mercado y han experimentado un fuerte crecimiento debido a la ausencia de restricciones técnicas, como la saturación de la red de suministro, imposibilidad de almacenamiento de la electricidad, etc.

Debido a que los mercados de energía están cada vez más integrados las estrategias de negociación pueden ser cada vez más difíciles de llevar a cabo. Tal nivel de complejidad en la actividad de negociación de los contratos tradicionales necesita un control bastante más complejo, por medio de un gran número de contratos más específicos. A continuación exponemos todas las variedades de productos que se negocian en el *Nord Pool* con sus especificaciones concretas.

2.4.1. Contratos de Futuro sobre Electricidad

Todos los contratos de futuro que se negocian sobre electricidad se liquidan por diferencias y, además, tienen liquidación diaria y final. Por lo tanto, no existe entrega física.

Tenemos dos tipos:

- **ENOxxxx-xx:** Son contratos de futuro diarios. La primera parte del nombre (ENO), indica que son contratos sobre electricidad en el Área Nórdica. Las 4 primeras x son 4 dígitos que indican el día en el que comienza el periodo de entrega, que en este caso sería de un día, y por último, las dos últimas x, situadas a continuación del guión, indican el año.
- **ENOxx-xx:** Son contratos semanales. Al igual que en el caso anterior, la primera parte del nombre (ENO) indica que se trata de contratos sobre electricidad en el Área Nórdica. Las dos primeras x son dos dígitos que muestran la semana en la que empieza el periodo de entrega, y las dos últimas el año.

El activo subyacente de estos contratos es un MW/h cada hora del periodo de entrega, la moneda en que se negocian es el Euro, y ninguno de ellos se puede subdividir en otros más pequeños.

La liquidación diaria de los contratos de futuro se realiza contra el mercado financiero. Sin embargo, hay también una liquidación frente al mercado de contado, que se realiza durante el periodo de entrega.

A continuación se muestra un ejemplo numérico para comprender mejor el funcionamiento de estos contratos.

En la figura 3 un miembro del mercado ha comprado un futuro por 30 euros MW/h. Durante el periodo de negociación, desde el día en el que fue comprado el contrato, hasta el vencimiento, el contrato de futuros subió hasta los 55 euros.

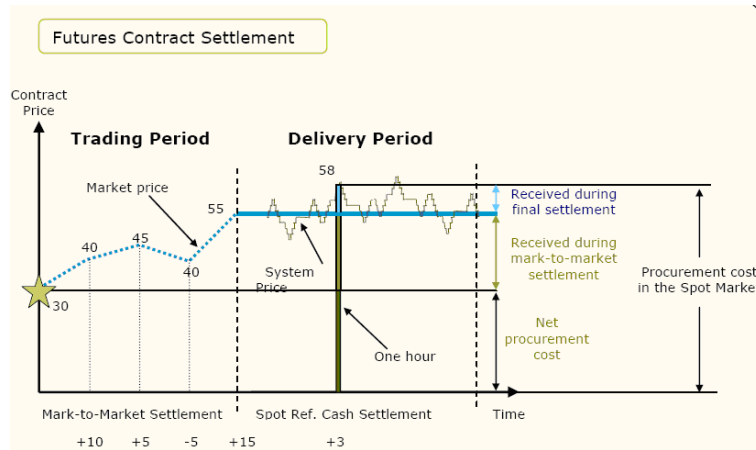


Figura 3: Fuente: El Nord Pool

55 euros es el precio final de cierre antes de la entrega. De modo, que este miembro, a través de la liquidación diaria de pérdidas y ganancias, obtuvo una ganancia de $55-30=25$ euros. Si el miembro del mercado hubiera vendido el contrato en ese momento, habría ganado 25 euros. Pero si lo hubiera mantenido durante el periodo de entrega, se habría hecho una liquidación de pérdidas y ganancias frente al precio de la electricidad en el mercado de contado. Esto es precisamente lo que muestra la figura. Durante la primera hora del periodo de entrega la electricidad en el mercado spot sube a 58 euros, de modo que el miembro habría obtenido una ganancia adicional de 3 euros. Si en la siguiente hora bajara a 49 tendría que entregar 6 euros. Si en ese momento el miembro decidiera comprar la electricidad, debería ir al mercado de contado y abonar los 49 euros por MW/h, pero como ha obtenido 19 euros de beneficio en el contrato de futuro, en realidad él sólo habría pagado 30 euros netos, que es lo que le costó el contrato. Obsérvese que la liquidación $55-30$, previa al periodo de entrega, hay que multiplicarla por el número de MW/h que habría que entregar en caso de que el contrato no quedara abierto hasta el periodo de entrega.

2.4.2. Contratos Forward sobre Electricidad

Estos contratos, al igual que los futuros, se negocian en euros, el subyacente de cada contrato es el MW/h, y la liquidación se hace por diferencias. De nuevo no existe entrega física.

Hay tres tipos de contratos *forward*:

- **ENOMmmm-yy**: Son contratos forward cuyo periodo de entrega es mensual, y donde las tres "m" indican el mes y las dos "y" el año. Estos contratos no se subdividen en otros más pequeños.

- **ENOQx-yy:** Son contratos cuyo periodo de entrega dura tres meses, y que se pueden subdividir en contratos mensuales. Coincidiendo con los cuatro trimestres del año, tenemos 4 contratos:
 - ENOQ1-yy: 1 Enero - 31 Marzo.
 - ENOQ2-yy: 1 Abril - 30 Junio.
 - ENOQ3-yy: 1 Julio - 30 Septiembre.
 - ENOQ4-yy: 1 Octubre - 31 Diciembre.
- **ENOYR-yy:** Son contratos cuyo periodo de entrega dura un año, y que se pueden subdividir en contratos trimestrales.

Al contrario que en los contratos de futuro, los *forwards*, en el periodo de negociación que llega hasta antes del periodo de entrega no tienen liquidación diaria, sino que las pérdidas o ganancias se acumulan hasta el día que empieza el mismo. Una vez que estamos en el periodo de entrega existe una liquidación frente al mercado *spot*, al igual que en los futuros.

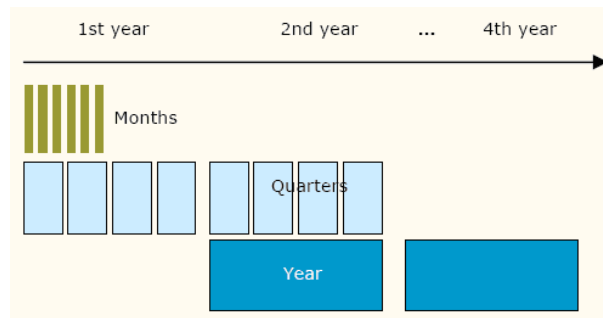


Figura 4: Fuente: El Nord Pool

2.4.3. Contratos por Diferencias sobre Electricidad

El precio de referencia de los contratos de futuro es el Sistema de Precios del *Nord Pool Spot AS*. Hemos dicho antes, que tanto los contratos de futuro, como los *forwards* se liquidan por diferencias, y por lo tanto, no existía entrega física. Así, los costes de compra derivados de la entrega física vienen determinados por los precios de contado de cada área. Los precios de contado de electricidad de cada área pueden diferir del precio del Sistema del *Nord Pool*, cuando existen restricciones en el sistema de transmisión de la electricidad. Por tanto, esto puede suponer un riesgo para los miembros que negocian derivados sobre electricidad en el *Nord Pool* y que luego tienen que comprar el subyacente en áreas diferentes. Para solucionar este problema se crearon contratos por diferencias, que nos permiten cubrirnos contra el riesgo de los precios de cada área.

Una cobertura perfecta, con futuros o *forwards*, únicamente es posible cuando no existe diferencia entre los precios de la electricidad en el área que la estamos comprando y el Sistema de precios del *Nord Pool*. Se ha comprobado que en el año 2004 estos precios solamente coincidían un 25,3% de las veces. Este hecho puso de relieve la necesidad de introducir un nuevo derivado que cubriera este riesgo. En principio se pensó sobre la introducción de otros tipos de *forwards* para gestionarlo, pero, más adelante, se llegó a la conclusión de que estos nuevos *forwards* podían competir con los ya existentes, y eso podía hacer perder liquidez al mercado inicial. Por esa razón, finalmente se crearon estos contratos por diferencias.

Para hacer una cobertura perfecta que incluya el riesgo de base, cuando los precios de las diferentes áreas difieren del precio del sistema, hay que llevar a cabo 3 pasos:

1. Cubrir el volumen requerido usando contratos *forwards*.
2. Cubrir las diferencias de precios, para el mismo periodo y volumen, usando contratos por diferencias.
3. Asegurar la obtención de la electricidad, negociando en el mercado de contado del área del miembro en cuestión.

El *Nord Pool ASA* permite la negociación de los *CfDs* para los siguientes diferenciales de precios de área.

Área de referencia	Definición
Noruega (SYARH)	AP = Precio de Oslo menos el precio del sistema
Suecia (SYHEL)	AP = Precio de Estocolmo menos el precio del sistema
Finlandia (SYOSL)	AP= Precio de Helsinki menos el precio del sistema
Oeste de Dinamarca (SYSTO)	AP= Precio de Aarhus menos el precio del sistema
Este de Dinamarca (SYCPH)	AP= Precio de Copenhague menos el precio del sistema
SYGER	AP= Precio de Phelix Alemania menos el precio del sistema

El precio de mercado del los *CfDs* puede ser positivo, negativo, o cero. Será positivo cuando el mercado espere que el precio de un área determinada sea superior al precio del sistema. Será negativo cuando el mercado espere que el precio de área sea menor que el del sistema. Por último, será 0 cuando no se esperen diferencias entre ambos precios.

Los *CfD* se liquidan por diferencias en euros, y siguiendo el mismo procedimiento que los *forwards*, y como ellos, pueden ser de periodo de entrega anual,

que se pueden subdividir en trimestrales, de periodo de entrega trimestral, que se puede dividir en mensuales, y por último, de periodo de entrega mensual, que no se puede subdividir. El volumen mínimo es 1 MW/h por contrato.

A continuación se muestra un ejemplo numérico de *CfD* para comprender mejor su funcionamiento.

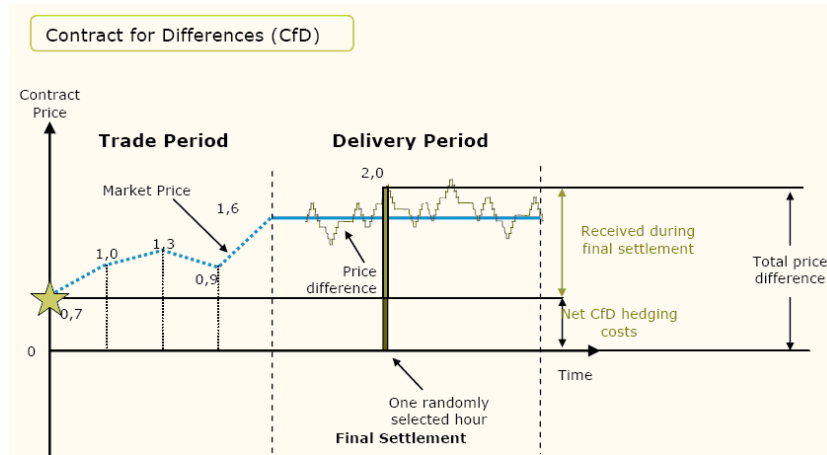


Figura 5: Fuente: El Nord Pool

En la figura 5 se muestra como un miembro del mercado ha comprado un *CfD* por el precio de 0,7 euros el MW/h. Durante el periodo de negociación el precio de contrato *CfD* subió hasta los 1,6 euros el MW/h. Además, en el periodo de entrega, para la hora seleccionada que muestra el gráfico, el miembro va a recibir $2 - 0,7$, lo que supone una ganancia de 1,3 euros por MW/h. El coste de compra en el mercado de contado del área del miembro es de 2 euros el MW/h, pero para este miembro el precio de esta cobertura le ha costado únicamente 0,7 euros MW/h.

2.4.4. Opciones sobre Electricidad

Las opciones son, para el comprador (vendedor), derechos (obligaciones) a comprar o vender el activo subyacente, en este caso contratos *forwards* con periodo de entrega anual y trimestral, a un precio predeterminado, el precio de ejercicio, en un momento de tiempo futuro prefijado. Las opciones combinadas con los *forwards* ofrecen estrategias de cobertura de riesgo muy valiosas en el mercado energético.

Todas las opciones negociadas en *Nord Pool* son de tipo europeo y por tanto, sólo pueden ejercerse en la fecha de vencimiento.

El vencimiento de las opciones está establecido como el tercer jueves en el mes antes de que empiece el periodo de entrega del contrato subyacente. En cuanto al precio de ejercicio, el mercado ha establecido 5 posibles precios de ejercicio, que están basados en los precios de cierre de los *forwards* subyacentes.

Por otro lado, la prima de la opción viene dada en euros por MW/h. La prima de las opciones se paga el día después de que la opción haya sido negociada. El tamaño de un contrato de opción se calcula multiplicando el número de MW por el número de horas del contrato subyacente.

A continuación se muestra una tabla con los 4 tipos posibles de opciones negociadas en *Nord Pool*:

Tipo de Opción	Nombre	Horas de entrega	Contrato subyacente
Call	ENOCXXQx-yy	2.159	ENOQx-yy
Put	ENOPXXQx-yy	2.159	ENOQx-yy
Call	ENOCXXYR-yy	8.760	ENOYR-yy
Put	ENOPXXYR-yy	8.760	ENOYR-yy

La C indica que se trata de opciones de compra, *calls*, y la P, de venta, *puts*. Las XX siguientes son los dígitos que corresponden al precio de ejercicio. Qx hace referencia a opciones sobre *forwards* con periodo de entrega trimestral, donde la x indica el trimestre, e YR hace referencia a opciones sobre *forwards* con periodo de entrega anual. Las yy indican el año.

La figura 6 muestra los pagos de las opciones según sean de compra, o de venta, y según la posición que se tenga, compradora o vendedora.

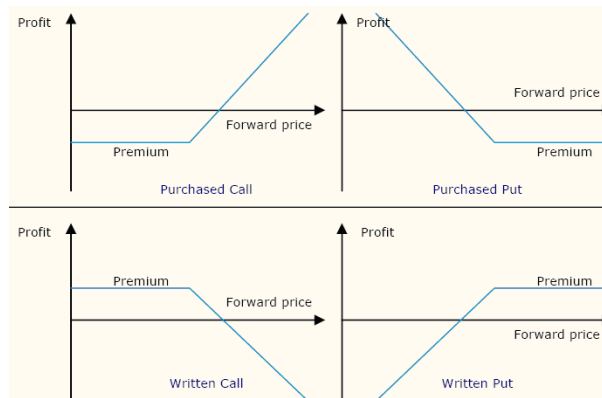


Figura 6: Fuente: El *Nord Pool*

2.4.5. Certificados de Electricidad (*Electricity Green Certificates*)

El 3 de marzo de 2004, *Nord Pool* lanzó un contrato *spot* integrado con otros productos financieros. Su negociación se hace directamente de forma electrónica, o indirectamente por teléfono sobre *PowerCLICK*. La liquidación de este producto se lleva a cabo mediante la entrega física 3 días después del día de negociación. Las negociaciones se llevan a cabo en coronas suecas (*SEK*), y el volumen mínimo por contrato es de 100 certificados (*Elcerts*). El mercado permanece abierto cinco días a la semana entre las 10:00 a.m. y las 2:00 p.m.

Buyers Payment Day	T+2
Delivery Date	T+3
Sellers payment Date	T+4

La figura 7 muestra la evolución de este producto desde el día que empezó a negociarse, hasta hoy (17-03-07).

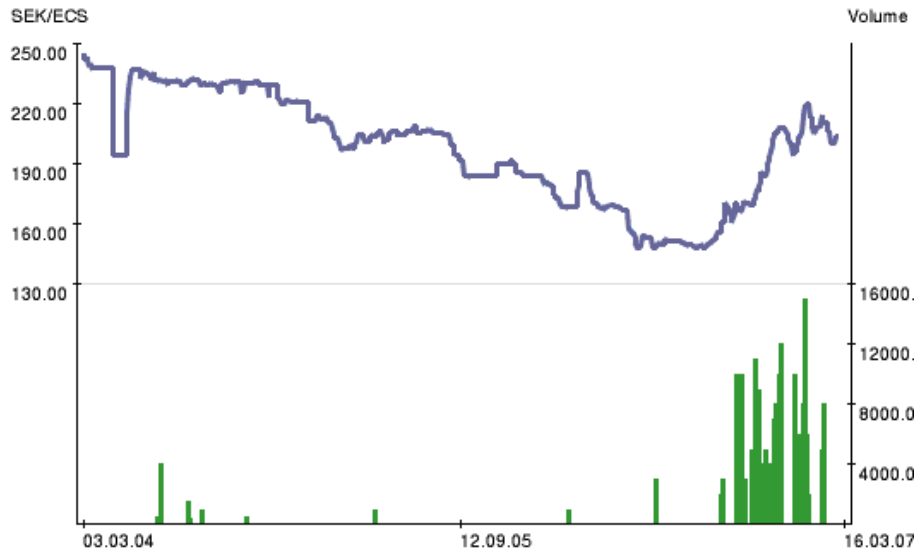


Figura 7: Fuente: El *Nord Pool*

2.4.6. Contratos Forward sobre Permisos de Emisión

En Febrero de 2005 el *Nord Pool* lanzó al mercado los contratos *forwards* sobre permisos de emisión (*EUAs*) de gases que producen el efecto invernadero. Actualmente el *Nord Pool* ofrece productos desde el año 2006 hasta el año 2012, cubriendo, así, todo el periodo del Protocolo de Kyoto.

Son contratos anuales negociados en euros, cuyo volumen mínimo es de 1.000 toneladas de CO_2 por contrato.

El último día de negociación es el primer día laborable del periodo de entrega, para los contratos de Diciembre, y el último Lunes del mes del contrato, para los contratos de Marzo. Por otro lado, el vencimiento de estos contratos es tres días laborables después del último día de negociación (T+3).

A continuación se muestran todos los contratos existentes de este tipo en el mercado hasta el momento, para comprender mejor el funcionamiento de este producto.

Nombre	Primer día de negociación	Último día de negociación	Día de entrega
EUAMAR-07	22.11.2006	26.03.2007	29.03.2007
EUADDEC-07	11.02.2005	03.12.2007	06.12.2007
EUADDEC-08	02.12.2005	01.12.2008	04.12.2008
EUADDEC-09	02.01.2006	01.12.2009	04.12.2009
EUADDEC-10	02.01.2006	01.12.2010	06.12.2010
EUADDEC-11	02.01.2006	01.12.2011	06.12.2011
EUADDEC-12	02.01.2006	03.12.2012	06.12.2012

2.4.7. Permisos de Emisión

El *Nord Pool* además negocia permisos de emisión en el mercado *spot*, que empezó en Octubre del año 2005. Este producto se negocia en euros, y tiene entrega física antes de las 16:00 horas del mismo día. Por su parte, el que compra el contrato debe pagar al vendedor en un plazo máximo de tres días (T+3) después del día de negociación (T). El volumen mínimo negociado en cada permiso es, de nuevo, 1.000 toneladas de CO_2 .

A continuación se muestra una tabla con 4 ejemplos de este producto negociados actualmente en *Nord Pool*, para comprender mejor este tipo de producto.

Nombre	Primer día de negociación	Último día de negociación	Día de entrega
EUAD0201-07	02.01.2007	02.01.2007	05.01.2007
EUAD0301-07	03.01.2007	03.01.2007	08.01.2007
EUAD0401-07	04.01.2007	04.01.2007	09.01.2007
EUAD0501-07	05.01.2007	05.01.2007	10.01.2007

2.5. Sistema de Negociación del Nord Pool

Los futuros, y *forwards* sobre electricidad, las opciones sobre electricidad, los *CfDs* sobre electricidad y los *EUs* son negociados continuamente, como en cualquier mercado avanzado de mercancías. *Nord Pool* opera con un sistema de

negociación electrónico llamado *PowerCLICK Exchange*, donde los miembros del mercado pueden negociar a través de dos posibles vías:

- Electrónicamente, usando la aplicación *PowerCLICK*, a la que se puede acceder, bien vía líneas de telecomunicación fijas, bien vía el canal seguro *VPN* de Internet. La plataforma *PowerCLICK* permite más de 1.000 acuerdos y 10.000 órdenes por minuto. Además, permite a los generadores, distribuidores, consumidores y negociadores de electricidad con conexión electrónica, participar directamente en la negociación.
- Telefónicamente, llamando al *Nord Pool*, donde las órdenes se sitúan en el sistema de negociación de parte del miembro.

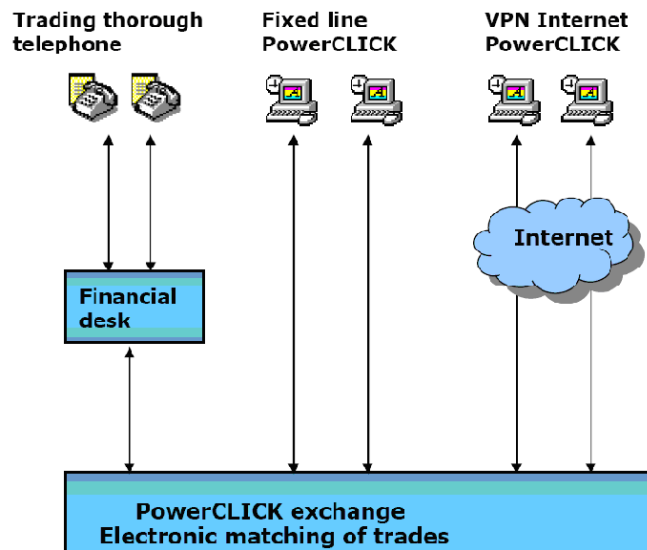


Figura 8: Fuente: El *Nord Pool*

El mercado de electricidad y de *EUAs* está abierto desde las 8:00 hasta las 15:30, hora local noruega. El mercado de los certificados de electricidad (mercado de contado de electricidad) permanece abierto desde las 10:00 hasta las 14:00. Una vez que el mercado ha sido cerrado, se hacen llegar a los miembros las confirmaciones escritas de sus negociaciones. Para el mercado de derivados, la hora límite de envío de quejas y rectificaciones es las 17:30, y para el mercado de contado, las 15:45.

Los precios de cierre, tanto para la electricidad, como para los contratos *EUAs* se determinan en un tiempo aleatorio dentro de los 10 últimos minutos del día de negociación. El momento preciso es calculado por un generador de números aleatorios, para evitar la manipulación de los precios de cierre. El *Nord Pool* distribuye los precios de cierre por el mercado, tan pronto como sea

posible, después del cierre del mercado a las 15:30.

El precio de cierre para la electricidad y los contratos *EUAs* se calcula como el precio negociado, si este último se encuentra en la horquilla de precios, en el momento aleatoriamente seleccionado. Para los contratos que están fuera de la horquilla de precios, o aquellos que no han sido negociados, el precio de cierre se define como la media entre el precio de compra y de venta, tal y como viene especificado en el libro de reglas del mercado financiero de electricidad y *EUAs*.

Finalmente, presentamos el gráfico 9 que muestra los volúmenes negociados en el mercado financiero del *Nord Pool* desde el año 1993, hasta el 2005.

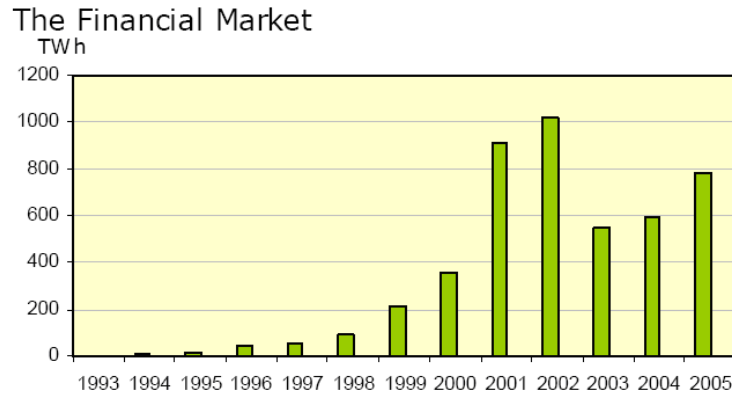


Figura 9: Fuente: El *Nord Pool*

2.6. Conclusiones

El *Nord Pool* se ha convertido en un mercado financiero altamente eficiente, y es una prueba definitiva de que los mercados de derivados eléctricos y/o energéticos pueden alcanzar niveles de eficacia similares a la de otros mercados de capitales. Además, el *Nord Pool*, o los activos que se negocian en el mismo, añaden la complejidad generada por las características tan especiales y distintivas que afectan a la electricidad y/o a la energía en general. Por consiguiente, nos encontramos ante un mercado en el que las técnicas generales de la Economía Financiera son perfectamente aplicables, pero deben incorporar multitud de especificaciones que las hacen particularmente complejas. Esto motiva nuevas investigaciones sobre los problemas clásicos, como valoración, cobertura, elección óptima de inversiones, etc, algunas de las cuales serán abordadas en capítulos posteriores de esta memoria.

2.7. Referencias

- Merrick, J.J., Y. N. Nike and P.K. Yadav (2005). *Strategic Trading Behavior and Price Distortion in a Manipulated Market: Anatomy of a Squeeze*. Journal of Financial Economics, 77, 171-208.
- *Trade at Nord Pool's Financial Market*. Documento obtenido de la página web del Nord Pool.
- También he obtenido otras informaciones acerca de las especificaciones de los productos en la página web del Nord Pool (www.nordpool.no).

3. Estimación de los Niveles de Riesgo en los Mercados Eléctricos

Contenido

- Introducción
- Características particulares de los precios de la electricidad
- Métodos de medición del riesgo
- Simulación Histórica
- Backtesting
- Teoría del Valor Extremo (*Extreme Value Theory*)
- Conclusiones
- Referencias

3.1. Introducción

A pesar de los recientes eventos ocurridos en EEUU, concretamente el caso *Enron*, la negociación en los mercados energéticos se ha desarrollado muy rápidamente en Europa durante los últimos años. Este desarrollo ha sido el resultado de la desregulación del mercado de energía de Reino Unido en 1990, el *European Union Electricity Market* en 1997, y especialmente en Alemania, el *Energiewirtschaftsgesetz* en 1998 y por consiguiente el *Verbandvereinbarung*.

El objetivo de la desregulación de los mercados era incrementar la competencia entre los monopolios existentes y los nuevos participantes del mercado. De hecho, la mayoría de los países han estado intentando separar la generación de energía, de su distribución, porque entienden la importancia que tiene el que todos los participantes del mercado puedan tener el mismo acceso a la red de transmisiones, y por consiguiente, a sus clientes.

La desregulación ya ha tenido consecuencias en Europa. En primer lugar, los precios en Europa han bajado. En segundo lugar, los productores de energía han tenido que cambiar la forma de hacer su negocio, y han tenido que evolucionar de monopolistas a empresas normales en competencia. Una de las consecuencias más importantes de este hecho ha sido el aumento de la volatilidad en los precios de la energía.

Un claro signo de que las negociaciones y la volatilidad de los precios de la energía han aumentado ha sido la creación de un gran número de mercados energéticos a lo largo de toda Europa. El mercado europeo más importante de

electricidad es el *Nord Pool* del que hablamos en el capítulo anterior.

Negociar en los mercados energéticos es similar a negociar en cualquier mercado financiero, aunque la electricidad, en concreto, presenta características que la hacen diferente. Estas características se presentan en el punto siguiente.

3.2. Características Particulares de los Precios de la Electricidad

La característica más importante de la electricidad es la **imposibilidad técnica de almacenamiento** de la misma. Esta propiedad de la electricidad hace que los precios eléctricos no puedan explicarse usando los modelos tradicionales para mercancías (*cost of carry*), por lo que son necesarios modelos más complejos.

Además, los precios eléctricos presentan una **volatilidad** mucho más **elevada** que los productos negociados en los mercados financieros. Este hecho se produce debido a fluctuaciones en la demanda que no pueden ser cubiertas con inventario. La figura 10 muestra el sistema de precios del *Nord Pool* (denotado por $S(t)$) desde el día 01-01-96 hasta el 08-02-00 en *NOK* (coronas noruegas) por MWh. En él, se observa la naturaleza altísimamente volátil de los precios eléctricos, que como decía no es típica de los mercados financieros.

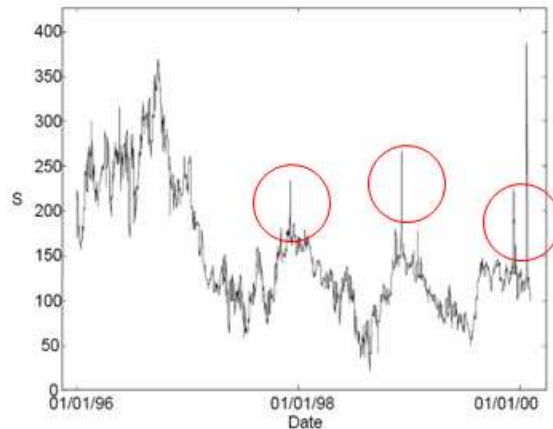


Figura 10: Fuente: El *Nord Pool*

Por otro lado, y para complicar todavía más el problema, la **volatilidad depende del precio**. De modo que, a precios más altos, mayor es la volatilidad en términos relativos, y a precios más bajos, menor es la volatilidad de los mismos.

Otra característica muy particular de estos mercados son los **picos en los precios**, que consisten en subidas del precio de la electricidad en momentos muy cortos de tiempo, y que son provocados por problemas de oferta, interrupción de la transmisión de electricidad, o niveles muy grandes de demanda que alcanzan el límite de la capacidad disponible. Este hecho también se pone de relieve en la figura anterior.

Además, los precios eléctricos **revierten a la media**. A pesar de darse frecuentes desviaciones de la media, tienen a volver rápidamente en dirección a su media de largo plazo. Usando el sistema de precios del *Nord Pool* se ha confirmado que las fluctuaciones en periodos cortos de tiempo son mayores que en los intervalos más grandes. De hecho, para un día, la volatilidad anualizada es de 200 %, y sin embargo, para un mes es tan solo del 80 %. Este es un claro ejemplo de reversión a la media.

Por último, los precios de la electricidad presentan **estacionalidad**. Al contrario que en los mercados financieros tradicionales, los precios energéticos presentan pautas, dependiendo de la hora del día, del mes o la estación del año.

Por otro lado, las naturalezas estocásticas y deterministas de la oferta y de la demanda, también influyen en la explicación del comportamiento de la electricidad.

A continuación se exponen brevemente las características básicas de ambas:

- **Demanda:** La demanda en los mercados eléctricos es muy inelástica. La electricidad juega un papel muy importante en la vida diaria de todos, lo que hace que sea necesaria independientemente de su precio. Además, la demanda eléctrica es cíclica. Las pautas que sigue la demanda dependen de la actividad económica, y, por supuesto, del clima. La actividad económica es muy alta de Lunes a Viernes, durante el día, y más baja durante los fines de semana y por la noche. El gráfico que se presenta a continuación muestra este hecho. Además, durante los meses de verano, en los que se utilizan los aires acondicionados, la demanda experimenta un aumento considerable.
- **Oferta:**
 - La electricidad es generada en pocas, pero muy grandes centrales energéticas.
 - Éstas, a veces dejan de funcionar, tanto de forma planeada, como no planeada. Esto conduce inmediatamente al descenso de la cantidad de energía disponible en esa región.
 - La energía es generada a través de centrales con costes de mantenimiento bajos (centrales nucleares, carbón, etc.). Su coste de encendido y apagado es muy alto.

- Un aumento de la demanda puede ser cubierto mediante el uso de centrales energéticas con costes de mantenimiento más altos (hidroeléctricas, gas), pero más flexibles.
- Las centrales energéticas trabajan generalmente al 70 %-100 % de su capacidad máxima.
- El orden en el que las centrales energéticas se encienden depende de su coste marginal de operación.
- Hay factores externos que influyen en la oferta de energía, tales como circunstancias locales (por ejemplo, acceso al combustible), precios del petróleo, y clima (por ejemplo, afluencia de agua para las centrales hidroeléctricas, muy importantes para el *Nord Pool*).
- Actualmente, todavía la generación de energía está muy regulada de diferentes maneras.
- Una consecuencia de la estructura monopolística es que todavía existe mucha concentración en Europa.

Dos consecuencias directas de estas propiedades de la oferta son:

- La relación entre la demanda y el precio no es lineal. Es caro abrir nuevas estaciones energéticas para un corto periodo de tiempo de alta demanda. Por eso cuando las centrales existentes están trabajando al máximo de su capacidad, los precios se incrementan muchísimo.
- Cuando la demanda es inusualmente baja, los precios de la electricidad caen rápidamente. Esto sucede porque para reducir la oferta habría que cerrar centrales energéticas, y eso es muy caro. De modo que, es preferible estimular la demanda poniendo precios muy bajos.

3.3. Métodos de Medición del Riesgo

A continuación se presentan los tipos de riesgo conocidos en el sector financiero:

De todos ellos, nosotros vamos a tratar de gestionar el del mercado. Este riesgo también afecta a los mercados energéticos de forma considerable. La medida más utilizada tradicionalmente en la medición de este riesgo ha sido el *VaR*, cuya definición presentamos a continuación.

El **VaR** estima la pérdida mínima desde una posición sobre un periodo de tiempo τ con un nivel de confianza q , debido a las fluctuaciones de los precios. Es por tanto una cantidad monetaria, calculado utilizando, bien información histórica y procesos estadísticos, bien mediante simulación de Montecarlo.

El éxito de esta medida se debe a su sencillez en la aplicación, y a que ha sido utilizado por corporaciones muy influyentes. De hecho, *J.P. Morgan* desarrolló una metodología de gestión de riesgos llamada *RiskMetrics*, utilizando

el *VaR*. Además, el *Bank of International Settlements* utilizó el *VaR* para modelos internos. Hoy en día, el *VaR* puede ser utilizado por las instituciones financieras para calcular el capital mínimo que deben tener las diferentes corporaciones para hacer frente a posibles pérdidas.

Bajo el supuesto de normalidad, la fórmula de cálculo del *VaR* para los retornos de un único activo es:

$$VaR = \mu(t)\tau - a(q)\sigma(t)\sqrt{t} = \mu(t) - a(q)\sigma(t) \quad (1)$$

donde τ es el horizonte temporal, q es el cuantil, o percentil que especifica el nivel de confianza, y a es la escala correspondiente al cuantil, usando una distribución normal y $a(q) = \int_{-\infty}^q f(r)dr$.

Esto está hecho sobre la base de que los precios de los activos son de la siguiente forma:

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dX \quad (2)$$

donde X es un movimiento Browniano estándar, μ es la deriva, y σ es la volatilidad. Como es sabido dX es una variable aleatoria normal de media 0 y varianza dt .

Aplicando el cálculo de *ITO* a la expresión (2) se obtiene:

$$S(T) = S(t)exp \left[\int_t^T \mu(s)ds + \int_t^T \sigma(s)dX(s) \right] \quad (3)$$

Los retornos de los activos se calculan como:

$$r(t) = \log [S(t)/S(t - \Delta t)] \quad (4)$$

o $r(t) = \log [S(t)/S(t - 1)]$ si se trata de retornos anuales.

El movimiento browniano presupone que:

- Los precios son positivos.
- La volatilidad del proceso de precios es dependiente del precio.
- El proceso no incluye reversión a la media.

La cuestión es que los retornos de precios eléctricos no siguen exactamente la ecuación (2). Eso se observa en las figuras 11 y 12, que muestra los precios y retornos del *Nord Pool*, en escala logarítmica, respectivamente.

Además, se han llevado a cabo numerosos análisis que ponen de relieve este problema, y los resultados son los siguientes:

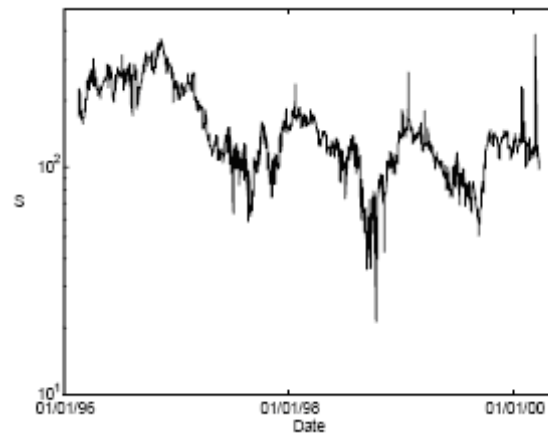


Figura 11: Fuente: El Nord Pool

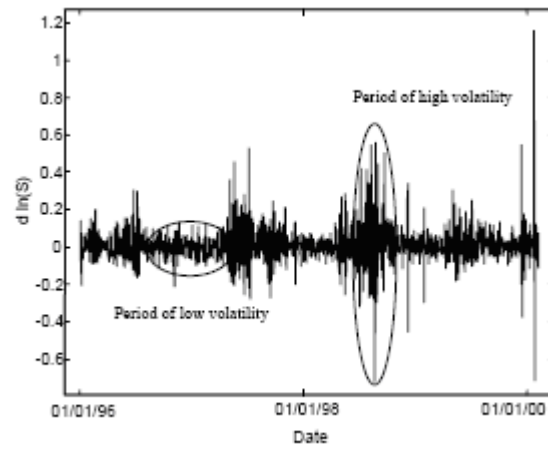


Figura 12: Fuente: El Nord Pool

- Las series temporales del *Nord Pool* son muy volátiles, y leptocúrticas.
- Los precios del *Nord Pool* presentan asimetrías importantes.
- Los retornos del *Nord Pool* presentan colas gruesas. La existencia de colas gruesas demuestra que los movimientos de precios extremos son más frecuentes de lo que se preveía con distribuciones normales.
- Estos retornos presentan correlaciones, y no están idénticamente distribuidos.
- Los efectos estacionales son muy importantes.

Para resolver estos problemas, tradicionalmente se han utilizado mixturas de distribuciones, por ejemplo con la *Poisson*. Además, hemos dicho antes que los picos en los precios eléctricos son muy comunes, de modo de esto también hay que explicarlo, y se puede hacer utilizando una distribución de saltos. A continuación presentamos las ecuaciones resultantes del modelo de saltos.

$$dr(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dX + JdN \quad (5)$$

La parte que explica los saltos podía ser representada mediante una *Poisson*, como ya adelantábamos. Supondremos que la amplitud J de los mismos se ajusta a una normal

$$J \sim N(\gamma, \omega) \quad (6)$$

y que el número de saltos es *Poisson*

$$P(dN = n) = \frac{\exp(-\ell)\ell^n}{n!} \quad (7)$$

donde ℓ es el número esperado de saltos en el intervalo temporal de longitud dt . La función de densidad de la variable r , una vez incorporados los saltos, es ²

$$f_J(r, \mu, \sigma, \ell, \gamma, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\ell)\ell^n}{n!} f\left(r; \mu + n\gamma, \sqrt{\sigma^2 + n\omega^2}\right) \quad (8)$$

Si, teniendo en cuenta que dt es un periodo corto, hacemos el supuesto simplificador de que

$$dN(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

con probabilidad

$$\begin{Bmatrix} 1 - \ell \\ \ell \end{Bmatrix} \quad (10)$$

entonces se obtiene la mixtura

²véase Werner (2002).

$$f_J(r, \mu, \sigma, \ell, \gamma, \omega) = (1 - \ell)f(r; \mu; \sigma) + \ell f\left(r; \mu + n\gamma, \sqrt{\sigma^2 + n\omega^2}\right) \quad (11)$$

Se prueba que

$$E[r(t)] = \mu + \ell\gamma = (1 - \ell)\mu + \ell(\mu + \gamma) \quad (12)$$

y

$$Var[r(t)] = \sigma^2 + \ell\omega^2 = (1 - \ell)\sigma^2 + \ell(\sigma^2 + \omega^2) \quad (13)$$

El proceso de saltos es reducido, de este modo, a una mixtura de normales. Como los saltos en los retornos logarítmicos están normalmente distribuidos, la magnitud de los saltos de los precios está distribuida de acuerdo a una distribución de logaritmo normal.

La estimación de los parámetros μ , σ , ω , ℓ y γ se puede realizar por “máxima verosimilitud”, donde la función “logarítmica de verosimilitud” a maximizar será

$$L(r(t), p) = \sum_t L(f_J(r(t), p)) \quad (14)$$

siendo $p = (\mu, \sigma, \omega, \ell, \gamma)$ el vector de parámetros.

3.4. Simulación Histórica

La simulación histórica es una forma sencilla de medir el riesgo, que no se basa en la suposición de que los retornos de los activos siguen una distribución específica. Su implementación sigue los siguientes pasos:

1. Introducir todos los retornos de la serie temporal dentro del periodo de tiempo que se desea estudiar.
2. Clasificar los retornos.
3. El VaR para el cuantil q es el qN -ésimo retorno de la lista, donde N es el número de datos.

Si la distribución de los retornos, para ese horizonte temporal, resulta ser asimétrica y leptocúrtica, la simulación histórica lo tendría en cuenta. El problema de la simulación histórica es que no es fácil tener en cuenta la estacionalidad, característica de la que hemos hablado en puntos anteriores.

3.5. Backtesting

Para comprobar la validez del estudio realizado utilizando modelos de riesgo y simulación, se puede realizar un análisis *backtesting*. Para ello, tomamos la información de hoy, y la pasada, y estimamos la distribución de mañana utilizando estos datos. Este estudio se puede hacer representando la distribución acumulada de los retornos del *Nord Pool*. Además, se puede profundizar más sobre este tema calculando los cuantiles de la distribución de los retornos del *Nord Pool*, y comparándola con los obtenidos para la distribución simulada. Si coinciden, entonces el método de medición de riesgo es válido. De todos modos, como con cualquier otro método estadístico, no se puede sacar una conclusión definitiva con sólo un análisis. Por tanto, se deben realizar muchos tests para poder calificar sus resultados como consistentes.

3.6. Teoría del Valor Extremo (*Extreme Value Theory*)

En Gestión de Riesgos se utilizan frecuentemente distribuciones de cola muy gruesa que conducen a medias y/o desviaciones típicas infinitas, como son las distribuciones estables (extensiones naturales de la distribución de Pareto). En este caso, como en general, obtenemos que:

$$VaR(q) = F^{-1}(q) \quad (15)$$

La función de distribución de una distribución estable es

$$G(x; \beta; \xi) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\beta}x\right) \\ 1 - \exp\left(-\frac{1}{\beta}x\right) \end{cases} \quad (16)$$

donde $\beta > 0$ y $x > 0$ si $\xi > 0$. Si $\xi = 0$ entonces estamos ante la distribución exponencial. Si $\xi > 0$ entonces obtenemos colas muy gruesas y los momentos de orden mayor o igual a $1/\xi$ se hacen infinitos.

Si $F_u(x)$ es la probabilidad de que x exceda el umbral u , entonces

$$F_u(y) = P(x - u \leq y | x > u) = \frac{F(y + u) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (17)$$

La mayor motivación para utilizar la Teoría de Valores Extremos radica en que para una amplia familia de distribuciones se puede encontrar una función $\beta(u)$ tal que

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \sup_{y > 0} |F_u(y) - G(y; \beta(u), \xi)| = 0 \quad (18)$$

En general,

$$VaR(q; u) = u + \frac{\beta}{\xi} \left[\left[\frac{1 - F(u)}{1 - q} \right]^\xi - 1 \right] \quad (19)$$

3.7. Conclusiones

En este capítulo hemos abordado parcialmente los problemas de la valoración y cobertura en los mercados de derivados energéticos. En todo caso, se ha comprobado cómo las características especiales de la electricidad (o de la energía, en general) hacen complejo encontrar procesos estocásticos capaces de reflejar cuantas circunstancias hay que considerar (“picos de demand”, estacionalidad, incapacidad de almacenaje, otras restricciones de tipo tecnológico, situación política internacional, etc). Pese a ello, la literatura ha intentado desarrollar modelos estocásticos basados en movimientos brownianos, normalmente con reversión a la media, que puedan ayudar a comprender y resolver los problemas. Estos modelos pueden ser resueltos analíticamente o simulados mediante el método de Monte Carlo, lo que, conjuntamente con los principios generales de la Economía Financiera y la Valoración de Activos, nos permitirá elaborar conclusiones.

Parte de estas conclusiones, rotundamente corroborada por la evidencia empírica, es la fuerte asimetría y el claro problema de “cola gruesa” o “valor extremo” que afecta a los rendimientos de los activos energéticos. Por consiguiente, es del máximo interés el desarrollo de métodos financieros analíticos que consideren estas situaciones. Esto motiva la investigación que presentaremos en los dos próximos capítulos, donde hablaremos de cómo medir y gestionar el riesgo ante asimetrías y colas pesadas, y de cómo utilizar esta gestión en los problemas de valoración, cobertura óptima o selección de inversiones.

3.8. Referencias

- *Risk And Risk Management In Electricity Markets: A Primer*. Alliance of Energy Suppliers, Edison Electric Institute.
- Tirri M. (2001), *Corporate–Wide Risk Management In Energy Business*. Helsinki University of Technology, Department of Mechanical Engineering.
- Werner A. (2002), *Risk Measurement In The Electricity Market*. Kellogg College, University of Oxford.
- Wilkens S. y J. Wimschulte (2007), *The Pricing Of Electricity Futures: Evidence From The European Energy Exchange*. Journal Of Futures Markets, Vol. 27, N4, 387-410.
- *Web del Nord Pool* (www.nordpool.no).

4. Selección de Carteras y Cobertura Óptima con Medidas Generales de Riesgo: Un Algoritmo Tipo Simplex

Contenido

- Introducción
- Preliminares
- Minimización de Riesgos por Optimización en Espacios de Banach
- Programas Semi-infinitos
- El Algoritmo Tipo Simplex
- Ejemplos de Funciones de Riesgo Importantes
- Ejemplo Numérico
- Conclusiones
- Referencias

4.1. Introducción

El moderno análisis de riesgos debe afrontar dos importantes inconvenientes: asimetrías y colas gruesas. Estos han provocado fuertes pérdidas de capital, que son muy difíciles de predecir si se utilizan medidas de riesgo tradicionales como la desviación típica de la prima de riesgo o la sensibilidad de los precios frente a diferentes variables económicas o financieras.

Consecuentemente, los reguladores han extendido las propuestas iniciadas por el grupo $G-10$ y el Comité de Basilea para la Supervisión Bancaria, quienes proporcionaron un número de requerimientos mínimos de capital en 1988. Por otro lado, muchos inversores institucionales han extendido también los métodos de J.P. Morgan, quien durante el final de la década de los 80 desarrolló un sistema para el cálculo del VaR global de cualquier firma, si bien asumió rentabilidades con distribución normal.

La investigación teórica también ha abordado este problema. Así, Artzner *et al.* (1999) publicaron un artículo fundamental en el que introdujeron la noción de “medida coherente del riesgo”. Ellos intentaron establecer los axiomas que una medida de riesgo debe cumplir para reflejar adecuadamente requerimientos iniciales de capital, y de estos axiomas derivaron importantes propiedades. Su análisis ha sido extendido o modificado por numerosos autores. Contribuciones importantes son, entre muchas otras, Rockafellar *et al.* (2006a) y (2006b), donde

se introducen, estudian y aplican a problemas de cartera los conceptos de “medida de riesgo acotada por la media” y “medida de desviación”, o Ruszczyński y Shapiro (2007), donde se analizan otras técnicas de optimización de carteras.

Otra línea de investigación relaciona las medidas de riesgo con la dominancia estocástica. Por ejemplo, Ogryczak y Ruszczyński (1999) ponen de manifiesto que la desviación típica no es compatible con la dominancia estocástica de segundo orden (*DESO* en lo sucesivo) si hay rentabilidades asimétricas, mientras que la desviación y semidesviación absoluta sí satisfacen el requerimiento de compatibilidad. Esto justifica el que muchos autores utilicen la desviación absoluta en la optimización de estrategias. Por ejemplo, Konno *et al.* (2005), quienes reducen el problema de programación matemática a uno meramente lineal porque consideran rentabilidades discretas obtenidas de una muestra real reciente.

Finalmente, la literatura reciente ha utilizado también la optimización de las medidas de riesgo para valorar o cubrir en mercados incompletos. Artículos interesantes son, entre otros, los de Föllmer y Schied (2002) y Nakano (2004).

La optimización de medidas de riesgo es con frecuencia muy compleja porque tenemos que enfrentarnos a problemas no diferenciables. Aunque suelen ser convexos, las técnicas basadas en la subdiferencial son difíciles de aplicar en la práctica. En consecuencia, los autores suelen buscar un problema alternativo y equivalente. Por ejemplo Föllmer y Schied (2002) Nakano (2004) encuentran un problema diferenciable para algunos casos, y, como ya hemos dicho, Konno *et al.* (2005) llegan a un problema lineal si el riesgo lo mide la desviación absoluta y se dan algunas condiciones. También Benati (2003) usa distribuciones discretas y llega a un problema lineal, combinado con un problema de programación fraccionada, para optimizar la “*worst conditional expectation*” (*WCE*), una medida coherente definida por Artzner *et al.* (1999)³.

El capítulo presente propone un enfoque de programación lineal que se puede aplicar a un gran número de medidas de riesgo. Hay una diferencia fundamental con respecto al enfoque de Benati (2003) o Konno *et al.* (2005), ya que sus estudios sólo se aplican a medidas muy particulares. Por el contrario, nosotros podemos incorporar muchas medidas coherentes de riesgo y cualquier desviación o medida de riesgo acotada por la media.

Los dos puntos para nosotros fundamentales son los teoremas de representación de medidas de riesgo y el uso de espacios de Banach para analizar problemas con un número infinito de restricciones. Los teoremas de representación nos permiten transformar un problema de selección de inversiones, o de valoración y cobertura óptimas, en otro problema minimax. Estos problemas minimax no

³Hasta donde nosotros sabemos no se ha traducido al castellano la expresión “*worst conditional expectation*”. Aunque bien pudiera traducirse por “peor esperanza condicional”, nosotros vamos a conservar la terminología anglosajona, pues es lo que la literatura suele hacer con otras medidas de riesgo más conocidas, como el *VaR* o el *CVaR*.

necesariamente conducen a un problema lineal (Barber y Copper, 1998).

Consecuentemente, seguimos un procedimiento reciente propuesto en Balbás y Romera (2007), quienes, estudiando estrategias de cobertura frente al riesgo de tipos de interés, encuentran una forma de linealizar cualquier modelo minimax mediante el uso de espacios de Banach.

Nuestro enfoque lineal genera nuevas condiciones de optimalidad y algoritmos. Así, el capítulo se estructura de la siguiente forma. La Sección 2 presenta supuestos y notaciones básicas, así como un problema general de optimización que puede aplicarse en la selección de inversiones o en la cobertura óptima. Este problema utiliza una función de riesgo general, y es transformado en un problema minimax. En la sección 3 se transforma el problema minimax en un problema lineal entre dos espacios de Banach duales: $\mathcal{C}(\Delta)$ y $\mathcal{M}(\Delta)$, funciones continuas y medidas interiormente regulares sobre el compacto Δ . El teorema 2, resultado más importante de esta sección, proporciona condiciones de optimalidad nuevas frente al resto de la literatura. En efecto, en vez de condiciones relacionadas con el concepto de subgradiente, utilizamos medias de probabilidad con propiedades adecuadas, íntimamente ligadas a las condiciones de holgura complementaria de la programación lineal. La sección 4 se centra en problemas de selección de inversiones o coberturas óptimas con un número finito de activos. El problema lineal es entonces semi-infinito y las condiciones del teorema 2 se simplifican. La sección 5 transforma las condiciones del teorema 2 (teorema 7) y desarrolla un algoritmo del simplex basado en estas condiciones. El algoritmo permite resolver también el dual, con lo que nos aporta la cobertura óptima y la sensibilidad de ésta frente a parámetros del mercado. La sección 6 particulariza la teoría para funciones de riesgo especialmente relevantes, con atención especial sobre las que vienen dadas por funciones de distorsión (Wang, 2000). Estas funciones de riesgo permiten construir nuevos índices o *benchmarks* de referencia que resuelven las dificultades causadas por asimetrías y colas gruesas. La sección 7 presenta un ejemplo numérico que ilustra las posibilidades prácticas del método, ya que se han usado datos reales de activos con fuerte asimetría y cola pesada. La sección 8 concluye el capítulo.

4.2. Preliminares

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de probabilidad, $p \in [1, \infty)$ y $q \in (1, \infty]$ tales que $(1/p) + (1/q) = 1$, donde como es habitual, se acepta el convenio $(1/\infty) = 0$. Es bien conocido que $L^q = L^q(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es el espacio dual de L^p . Considérense las funciones $\rho_i : L^p \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, \gamma$, dadas por

$$\rho_i(y) = \text{Sup} \{-E(yz) : z \in \Delta_i\} \quad (20)$$

siendo cada Δ_i un subconjunto convexo, no vacío y $\sigma(L^q, L^p)$ -compacto de L^q , y donde

$$E(h) = \int_{\Omega} h(\omega) d\mu(\omega) = \int_{\Omega} h d\mu$$

denota la esperanza matemática de cualquier variable aleatoria $h \in L^1$. Nótese que $L^q \ni z \mapsto E(yz) \in \mathbb{R}$ es $\sigma(L^q, L^p)$ -continua para cada $y \in L^p$ y, por tanto, *Sup* puede sustituirse por *Max* en (20).

Muchas medidas coherentes de riesgo, en el sentido de Artzner *et al.* (1999), o acotadas por la media, en el sentido de Rockafellar *et al.* (2006a), satisfacen la expresión (20), como se prueba en Rockafellar *et al.* (2006a) y (2006b). En realidad, estos autores muestran que Δ_i es $\sigma(L^q, L^p)$ -cerrado porque utilizan funciones de riesgo que pueden alcanzar el valor $+\infty$. No obstante, por el teorema de Alaoglu (véase Holmes, 1975), la $\sigma(L^q, L^p)$ -compacidad de Δ_i será satisfecha siempre que ρ_i sea una medida de riesgo acotada por la media, continua y \mathbb{R} -valorada (véanse la sección 6 y los teoremas de representación de funciones convexas de Zalinescu, 2002).

Por otro lado, Rockafellar *et al.* (2006a) introducen la noción de medida de desviación D , y prueban que

$$D(y) = R(y) + E(y), \quad \forall y \in L^p, \quad (21)$$

donde R denota una medida de riesgo acotada por la media.

Obviamente, dado que R satisface (20), también lo hace D si Δ_i se sustituye por

$$\Delta_i - \{1\} = \{z - 1; z \in \Delta_i\}. \quad (22)$$

Por consiguiente, nuestro análisis será aplicable a cualquier medida acotada por la media o cualquier medida de desviación.

Fíjense $m \in \mathbb{N}$, un conjunto de números $\{b_j\}_{j=1}^m$ y un conjunto de variables aleatorias $\{q_j\}_{j=1}^m \subset L^q$.

Trabajaremos con el problema de optimización vectorial

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min } \rho(y) \\ E(yq_j) \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \\ y \in Y \end{array} \right\} \quad (23)$$

siendo $Y \subset L^p$ un cono convexo cualquiera y $\rho : L^p \mapsto \mathbb{R}^\gamma$ una función vectorial de componentes $\rho_i, i = 1, 2, \dots, \gamma$. (23) puede entenderse como un problema de cobertura óptimo o como un problema de selección de carteras en el que no hay un acuerdo unánime sobre cuál debe ser la forma de medir el riesgo. Las restricciones $E(yq_j) \leq b_j$ (o, equivalentemente, $-E(yq_j) \geq -b_j$) reflejarán situaciones prácticas. Por ejemplo, una cantidad de dinero máxima para invertir,

una riqueza esperada futura mínima, etc.

La expresión (20) prueba que ρ es convexa y, consecuentemente, para cualquiera de las soluciones y_0 de (23) existe $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\gamma)$ tal que $\alpha \neq 0$, $\alpha \geq 0$ e y_0 resuelve el problema escalar

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min } \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \rho_i(y) \\ E(yq_j) \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \\ y \in Y \end{array} \right\}. \quad (24)$$

Recíprocamente, si $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, \gamma$, entonces toda solución de (24) también resuelve (23). Por tanto, resolviendo (24), con α arbitrario, tendremos el conjunto completo de soluciones de (23) y, posiblemente, algún punto más. Todo sellos componen el llamado “conjunto de soluciones débiles de (23)”. En lo sucesivo consideraremos fijado un α no nulo y no negativo que nos permitirá obtener soluciones de (23).

4.3. Minimización de Riesgos por Optimización en Espacios de Banach

En esta sección presentaremos una serie de problemas que conducen a la solución de (24). Además, casi todos los problemas alternativos serán lineales, lo que nos permitirá caracterizarlos por medio de relaciones de dualidad y condiciones de holgura complementaria. Las variables duales tendrán interpretaciones económicas que se pueden aplicar en la práctica. Una sección futura usará estas propiedades para desarrollar un algoritmo tipo simplex de resolución.

Sea $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \dots \times \Delta_\gamma$ el producto usual de $(\Delta_i)_{i=1}^{\gamma}$, dotado del producto de las topologías débil*, entonces Δ es obviamente convexo y compacto.

Considérese el problema

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min } \theta \\ \theta + \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i E(yz_i) \geq 0, \quad \forall z = (z_1, z_2, \dots, z_\gamma) \in \Delta \\ E(yq_j) \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \\ \theta \in \mathbb{R}, y \in Y \end{array} \right\} \quad (25)$$

siendo $(\theta, y) \in \mathbb{R} \times L^p$ la variable de decisión. Tenemos un primer resultado, cuya prueba es muy simple y, por tanto, omitida.

Proposición 1. Supóngase que $\theta_0 \in \mathbb{R}$ e $y_0 \in Y$. Entonces, y_0 resuelve (24) y

$$\theta_0 = \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \rho_i(y_0)$$

si y sólo si (θ_0, y_0) resuelve (25).⁴ \square

Observación 1. El problema (25) es equivalente al

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min } \theta \\ \theta + E(yz) \geq 0, \quad \forall z \in \Delta^\alpha \\ E(yq_j) \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \\ \theta \in \mathbb{R}, y \in Y \end{array} \right\}$$

donde Δ^α es el subconjunto convexo y $\sigma(L^q, L^p)$ -compacto de L^q dado por

$$\Delta^\alpha = \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \Delta_i = \left\{ z \in L^q; z = \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i z_i, z_i \in \Delta_i, i = 1, 2, \dots, \gamma \right\}$$

la nueva formulación simplificaría las notaciones de análisis futuros, aunque preferiremos estudiar (25) porque en la práctica podría ser complicado determinar Δ^α . \square

Nótese que el problema (25) es lineal, y su primera restricción se establece en el espacio de Banach $\mathcal{C}(\Delta)$ de funciones reales continuas dotado de la norma del supremo. De acuerdo al teorema de representación de Riesz, su espacio dual, denotado por $\mathcal{M}(\Delta)$, está compuesto por las medidas reales interiormente regulares y σ -aditivas sobre la σ -álgebra de Borel de Δ , dotado con la norma de la variación total.

La función lagrangiana

$$\mathcal{L} : \mathbb{R} \times L^p \times \mathbb{R} \times^m \mathcal{M}(\Delta) \mapsto \mathbb{R}$$

de (25) es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta, y, \lambda, \nu) &= \theta - \int_{\Delta} (\theta + \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i E(yz_i)) d\nu(z) + \sum_{j=1}^m \lambda_j (E(yq_j) - b_j) \\ &= \theta(1 - \nu(\Delta)) - \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \left(\int_{\Delta} E(yz_i) d\nu(z) \right) + \sum_{j=1}^m \lambda_j (E(yq_j) - b_j) \end{aligned} \quad (26)$$

Para simplificar algunas expresiones, si se considera conveniente, representaremos mediante $\nu_i = \pi_i(\nu)$ la proyección de ν sobre Δ_i , $i = 1, 2, \dots, \gamma$, y es obvio que

$$\int_{\Delta} E(yz_i) d\nu(z) = \int_{\Delta_i} E(yz_i) d\nu_i(z_i)$$

$i = 1, 2, \dots, \gamma$. Además, las variables de integración z o z_i podrán ser omitidas.

⁴Entre otros, Shimizu y Aiyoshi (1980) ya introdujeron una variable más para resolver un problema minimax. La proposición anterior sólo utiliza esta idea.

De acuerdo a Anderson y Nash (1987), un par $(\lambda, \nu) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{M}(\Delta)$ es factible dual para (25) si y sólo si $\lambda \geq 0, \nu \geq 0$ y

$$\text{Inf} \left\{ \theta (1 - \nu(\Delta)) - \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \left(\int_{\Delta} E(yz_i) d\nu \right) + \sum_{j=1}^m \lambda_j (E(yq_j) - b_j); (\theta, y) \in \mathbb{R} \times Y \right\} > -\infty,$$

en cuyo caso el objetivo dual estará dado por el ínfimo anterior.

Por consiguiente, el dual es

$$\left. \begin{aligned} \text{Max} \quad & - \sum_{j=1}^m b_j \lambda_j \\ & \sum_{j=1}^m \lambda_j E(yq_j) - \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \left(\int_{\Delta} E(yz_i) d\nu \right) \geq 0, \quad \forall y \in Y \\ & \nu(\Delta) = 1 \\ & (\lambda, \nu) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{M}(\Delta) \\ & \lambda \geq 0, \nu \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

siendo $(\lambda, \nu) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{M}(\Delta)$ la variable de decisión.

Es trivial la desigualdad

$$\theta \geq - \sum_{j=1}^m b_j \lambda_j \quad (28)$$

si (θ, y) y (λ, ν) son (25) y (27)–factibles, respectivamente.

Dado que (25) y (27) involucran a espacios de dimensión infinita, la ausencia del llamado “hueco de dualidad” no está garantizada. Para superar este problema menor impondremos la calificación de Slater (Anderson and Nash, 1987). Además, en ejemplos prácticos no es realista suponer que el nivel de riesgo pueda acercarse a menos infinito. En consecuencia, impondremos que (25) sea acotado.

Supuesto 1. Existe $y_0 \in Y$ tal que $E(y_0 q_j) < b_j, j = 1, 2, \dots, m$. También existe θ^* tal que $\theta \geq \theta^*$ siempre que (θ, y) sea (25)–factible.

El supuesto anterior implica que (25) tiene un valor finito y (27) alcanza su valor óptimo, es decir, (27) es resoluble. Denotaremos por θ_{α} al valor óptimo de ambos problemas.

La segunda y última restricciones de (27) revelan que las medidas ν (27)–factibles tienen que ser probabilidades. De ahora en adelante representaremos

$$\mathcal{P}(\Delta) = \{ \nu \in \mathcal{M}(\Delta); \nu \geq 0, \nu(\Delta) = 1 \}.$$

El teorema de Alaoglu conduce fácilmente a la compacidad del conjunto $\mathcal{P}(\Delta)$ si se le dota de la topología $(\sigma\mathcal{M}(\Delta), \mathcal{C}(\Delta))$ (Holmes, 1975, or Anderson and Nash, 1987). Las mismas notaciones y comentarios son válidos si Δ se cambia

por Δ_i , $i = 1, 2, \dots, \gamma$.

Nótese que la influencia de ν en (27) depende sólo de $\{\nu_i\}_{i=1}^\gamma$, pues dos probabilidades con iguales proyecciones tienen un papel similar en este problema de optimización. Por tanto, si conviene, la variable dual ν se puede sustituir por $\{\nu_i\}_{i=1}^\gamma$.

La primera restricción de (27) involucra a la variable $y \in L^p$. Esto hace a las notaciones “algo complejas”, así que merecería la pena eliminar y . Nótese que

$$L^p \ni y \mapsto \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \left(\int_{\Delta_i} E(yz_i) d\nu_i \right) \in \mathbb{R}$$

es lineal y continua para cada $\nu \in \mathcal{M}(\Delta)$. Por tanto, puede representarse por un elemento de L^q que se denotará por

$$\sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \left(\int_{\Delta_i} E(-) d\nu_i \right).$$

Así, para eliminar y de (27) se usará la notación

$$\sum_{j=1}^m q_j \lambda_j - \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \left(\int_{\Delta_i} E(-) d\nu_i \right) \geq_Y 0 \quad (29)$$

El problema dual será

$$\left. \begin{array}{l} \text{Max} - \sum_{j=1}^m b_j \lambda_j \\ \sum_{j=1}^m q_j \lambda_j - \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \left(\int_{\Delta_i} E(-) d\nu_i \right) \geq_Y 0 \\ \nu(\Delta) = 1 \\ (\lambda, \nu) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{M}(\Delta) \\ \lambda \geq 0, \nu \geq 0 \end{array} \right\} \quad (30)$$

La ausencia de hueco de dualidad permitirá caracterizar soluciones primales y duales por medio de sistemas de igualdades y desigualdades.

Teorema 2. Sean $(\theta, y) \in \mathbb{R} \times L^p$ y $(\lambda, \nu) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{P}(\Delta)$. Entonces, son soluciones de (25) y (30), respectivamente, si y sólo si satisfacen las condiciones de holgura complementaria

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{j=1}^m \lambda_j E(yq_j) - \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \left(\int_{\Delta_i} E(yz_i) d\nu_i \right) = 0 \\ \lambda_j (E(yq_j) - b_j) = 0, \\ \theta + \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \left(\int_{\Delta_i} E(yz_i) d\nu_i \right) = 0 \\ \theta + \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i E(yz_i) \geq 0, \\ E(yq_j) \leq b_j, \\ \sum_{j=1}^m q_j \lambda_j - \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \left(\int_{\Delta_i} E(-) d\nu_i \right) \geq_Y 0 \\ y \in Y, \lambda \geq 0 \end{array} \right\} \quad (31)$$

Demostración. Las cuatro desigualdades del sistema prueban que (θ, z) y (λ, ν) son factibles. Además, la primera igualdad implica que

$$-\sum_{j=1}^m \lambda_j E(yq_j) = -\sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \left(\int_{\Delta_i} E(yz_i) d\nu_i \right).$$

Por la segunda igualdad,

$$-\sum_{j=1}^m \lambda_j b_j = -\sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \left(\int_{\Delta_i} E(yz_i) d\nu_i \right).$$

Por la tercera igualdad,

$$-\sum_{j=1}^m \lambda_j b_j = \theta$$

y (28) demuestra que estamos ante las soluciones de ambos problemas.

Recíprocamente, supóngase que (θ, y) y (λ, ν) son soluciones. Como son factibles verifican todas las desigualdades. Por otro lado, las condiciones de holgura complementaria de la programación lineal (Anderson y Nash, 1987) conducen a la segunda y tercera expresión de (31).

Finalmente, (θ, y) debe minimizar la función lagrangiana (26) sobre $\mathbb{R} \times Y$ (Anderson y Nash, 1987). Puesto que ésta se minimiza trivialmente en $(0, 0)$ y alcanza el valor $-\sum_{j=1}^m \lambda_j b_j$, resulta fácil obtener la primera igualdad de (31). \square

Observación 2. El sistema (31) proporciona condiciones necesarias y suficientes para los problemas (24) and (25) que no usan subgradientes de la función de riesgo ρ . Por el contrario, son condiciones que se basan en la existencia de medidas de probabilidad $\{\nu_i\}_{i=1}^{\gamma}$ sobre $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\gamma}$ con soportes contenidos en los ceros de

$$\theta + \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i E(yz_i),$$

y multiplicadores $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$ tales que se cumple (29). Esto es un alternativa interesante para resolver problemas de cobertura o selección óptima en la práctica, aunque no será sencillo encontrar una solución explícita del sistema (31).⁵ Sin embargo, trabajar con el sistema será mucho más simple si la solución dual se encuentra por métodos alternativos. Por esta razón en la sección quinta se desarrollará un algoritmo tipo simplex para el problema dual que se podrá aplicar siempre que el cono Y esté generado por un número finito de variables aleatorias (de activos financieros).

⁵Recuerde que trabajar con subgradientes también puede generar problemas difíciles. Véanse Rockafellar *et al.* (2006a) o Ruszczyński y Shapiro (2007) para análisis complementarios.

4.4. Programas Semi-infinitos

En esta sección se considerarán $n = r + s \in \mathbf{N}$ activos disponibles con pagos $\{y_h\}_{h=1}^n \subset L^p$. Las estrategias se denotarán por $x \in \mathbf{R}^n$, y el cono convexo cerrado

$$X = \left\{ x = (x_h)_{h=1}^{r+s} \in \mathbf{R}^{r+s}; x_h \geq 0, h = r + 1, r + 2, \dots, r + s \right\}$$

reflejará que la venta al descubierto de algunos valores no está permitida.⁶

El conjunto Y (de pagos alcanzables) estará dado por

$$Y = \left\{ y \in L^p; y = \sum_{h=1}^n x_h y_h, x = (x_h)_{h=1}^n \in X \right\}.$$

Es fácil ver que Y es un cono convexo.

El problema (25) se transforma en

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min } \theta \\ \theta + \sum_{h=1}^n (\sum_{i=1}^m \alpha_i E(y_h z_i)) x_h \geq 0, \quad \forall z \in \Delta \\ \sum_{h=1}^n E(y_h q_j) x_h \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \\ \theta \in \mathbf{R}, x_h \geq 0 \quad h = r + 1, \dots, r + s \end{array} \right\} \quad (32)$$

siendo $(\theta, x) \in \mathbf{R}^{1+n}$ la variable de decisión. Nótese que restricciones de la forma $\sum_{h=1}^n l_h x_h \leq L$ se incorporan con facilidad a (32). En efecto, tómesese $\tilde{q} \in L^q$ tal que $E(y_h \tilde{q}) = l_h, h = 1, 2, \dots, n$, y aplíquese la segunda restricción de (32). Por otro lado, la existencia de \tilde{q} se cumple bajo supuestos débiles como la independencia de $\{y_h\}_{h=1}^n$. Para evitar huecos de dualidad se asumirá el cumplimiento

⁶El cono X puede sustituirse por el más general $\tilde{X} \subset \mathbf{R}^n$, siempre que éste sea convexo y cerrado. Entonces, el teorema de representación de convexos cerrados de \mathbf{R}^n (Holmes, 1975) prueba que $\tilde{X} = L_{\tilde{X}} + C_{\tilde{X}}$, $L_{\tilde{X}}$ siendo $L_{\tilde{X}}$ el espacio vectorial

$$L_{\tilde{X}} = \left\{ x \in \mathbf{R}^n; x + \tilde{X} = \tilde{X} \right\},$$

y $C_{\tilde{X}}$ el cono convexo cerrado con vértice (o cono de recesión)

$$C_{\tilde{X}} = \left\{ x \in \mathbf{R}^n; x + (\tilde{X} \cap L_{\tilde{X}}^\perp) \subset \tilde{X} \cap L_{\tilde{X}}^\perp \right\},$$

donde $L_{\tilde{X}}^\perp$ denota el ortogonal de $L_{\tilde{X}}$. Los casos más importantes son

$$L_{\tilde{X}} = \mathbf{R}^n \text{ y } C_{\tilde{X}} = \{0\},$$

para, $\tilde{X} = \mathbf{R}^n$, y

$$L_{\tilde{X}} = \{0\} \text{ y } C_{\tilde{X}} = \mathbf{R}_+^n$$

para $\tilde{X} = \mathbf{R}_+^n$. Con más generalidad,

$$L_{\tilde{X}} = \{0\} \text{ y } C_{\tilde{X}} = \tilde{X}$$

si \tilde{X} tiene vértice. La representación anterior de \tilde{X} , y el procedimiento general propuesto por Balbás y Romera (2007), permiten adaptar el problema para que un cono tipo X pueda jugar el papel de \tilde{X} .

de la condición de cualificación de Slater junto a la existencia de cotas inferiores del problema primal (supuesto 1).

Para adaptar el problema (30) analicemos la restricción (29). Obviamente,

$$\sum_{h=1}^n E \left[\left(\sum_{j=1}^m q_j \lambda_j \right) y_h \right] x_h \geq \sum_{h=1}^n \left[\sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \left(\int_{\Delta_i} E(y_h z_i) d\nu_i \right) \right] x_h$$

para cada $x \in X$. Así, (30) será

$$\left. \begin{aligned} &Max - \sum_{j=1}^m b_j \lambda_j \\ &\sum_{j=1}^m E(q_j y_h) \lambda_j = \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \left(\int_{\Delta_i} E(y_h z_i) d\nu_i \right), \quad h = 1, 2, \dots, r \\ &\sum_{j=1}^m E(q_j y_h) \lambda_j \geq \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \left(\int_{\Delta_i} E(y_h z_i) d\nu_i \right), \quad h = r + 1, \dots, r + s \\ &(\lambda, \nu) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{P}(\Delta) \\ &\lambda \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

siendo $(\lambda, \nu) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{P}(\Delta)$ la variable de decisión.

Del teorema 2, las condiciones (31) son necesarias y suficientes para la optimalidad. Ahora son

$$\left. \begin{aligned} &\sum_{j=1}^m \lambda_j E(y_h q_j) - \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \left(\int_{\Delta_i} E(y_h z_i) d\nu_i \right) = 0, \quad h = 1, 2, \dots, r \\ &\left[\sum_{j=1}^m \lambda_j E(y_h q_j) - \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \left(\int_{\Delta_i} E(y_h z_i) d\nu_i \right) \right] x_h = 0, \quad h = r + 1, \dots, r + s \\ &\lambda_j \left[\sum_{h=1}^n E(y_h q_j) x_h - b_j \right] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \\ &\theta + \sum_{h=1}^n \left[\sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \left(\int_{\Delta_i} E(y_h z_i) d\nu_i \right) \right] x_h = 0 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

junto a las restricciones de ambos problemas. Como se ha dicho, en la práctica será difícil resolver en las incógnitas θ , x , λ y ν . Sin embargo, si λ y ν son conocidas entonces (34) se convierte en

$$\left. \begin{aligned} &\left[\sum_{j=1}^m \lambda_j E(y_h q_j) - \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \left(\int_{\Delta_i} E(y_h z_i) d\nu_i \right) \right] x_h = 0, \quad h = r + 1, \dots, r + s \\ &\sum_{h=1}^n E(y_h q_j) x_h = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \lambda_j \neq 0 \\ &\theta + \sum_{h=1}^n \left[\sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \left(\int_{\Delta_i} E(y_h z_i) d\nu_i \right) \right] x_h = 0 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

que es un simple sistema lineal en θ y x .

4.5. El Algoritmo Tipo Simplex

En esta sección se presentará el algoritmo tipo simplex que resuelve (33). Después, (35) dará también la solución primal.

Primero introducimos las variables de holgura $(\xi_h)_{h=r+1}^{r+s}$ para tener igualdades en las restricciones. Así obtenemos

$$\left. \begin{aligned} &Max - \sum_{j=1}^m b_j \lambda_j \\ &\sum_{j=1}^m E(q_j y_h) \lambda_j - \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \left(\int_{\Delta_i} E(y_h z_i) d\nu_i \right) = 0, \quad h = 1, 2, \dots, r \\ &\sum_{j=1}^m E(q_j y_h) \lambda_j - \xi_h - \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \left(\int_{\Delta_i} E(y_h z_i) d\nu_i \right) = 0, \quad h = r + 1, \dots, r + s \\ &(\lambda, \xi, \nu) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \times \mathcal{P}(\Delta) \\ &\lambda \geq 0, \xi \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Como se dijo, $\mathcal{P}(\Delta)$ es convexo y $\sigma(\mathcal{M}(\Delta), \mathcal{C}(\Delta))$ -compacto. Además, dado $z \in \Delta$ denotaremos por $\delta_z \in \mathcal{P}(\Delta)$ la delta de Dirac que concentra la masa en $\{z\}$, es decir, $\delta_z(\{z\}) = 1$ y $\delta_z(\Delta \setminus \{z\}) = 0$. Es conocido que el conjunto de extremos de $\mathcal{P}(\Delta)$ está dado por

$$ext(\mathcal{P}(\Delta)) = \{\delta_z; z \in \Delta\},$$

aunque no tendremos que utilizar este resultado. Similares propiedades hay si Δ es sustituido por Δ_i , $i = 1, 2, \dots, \gamma$.

Lema 3. Sea \mathcal{A} el conjunto factible de (36) y sea

$$\mathcal{A}_0 = \{(\lambda, \xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s; \text{ there exists } \nu \in \mathcal{P}(\Delta) \text{ with } (\lambda, \xi, \nu) \in \mathcal{A}\}.$$

Entonces, \mathcal{A}_0 es convexo y cerrado.

Demostración . Es fácil ver que \mathcal{A}_0 es convexo, así que veamos que es cerrado. Tomemos la sucesión $\{(\lambda_k, \xi_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_0$ y supongamos que

$$Lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_k, \xi_k) = (\lambda, \xi).$$

Probemos que $(\lambda, \xi) \in \mathcal{A}_0$. Tomemos $\{(\nu_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\Delta)$ tal que $(\lambda_k, \xi_k, \nu_k) \in \mathcal{A}$. Ya que $\mathcal{P}(\Delta)$ es compacto, existe ν , punto de aglomeración de $\{(\nu_k)\}_{k=1}^{\infty}$. Consecuentemente, (λ, ξ, ν) es punto de aglomeración de $\{(\lambda_k, \xi_k, \nu_k)\}_{k=1}^{\infty}$. Puesto que la sucesión está incluida en \mathcal{A} , que es un conjunto cerrado, (λ, ξ, ν) también está en \mathcal{A} . por tanto, $(\lambda, \xi) \in \mathcal{A}_0$. \square

Lema 4. Considérense los conjuntos \mathcal{A}_0 y \mathcal{A} anteriores y sus conjuntos extremales $ext(\mathcal{A}_0)$ y $ext(\mathcal{A})$. Entonces, existe $(\lambda, \xi, \nu) \in ext(\mathcal{A})$ tal que $-\sum_{j=1}^m b_j \lambda_j = \theta_\alpha$, es decir., existe $(\lambda, \xi, \nu) \in ext(\mathcal{A})$ solución de (36). Además, $(\lambda, \xi) \in ext(\mathcal{A}_0)$.⁷

⁷Dado un problema lineal entre espacios de Banach de dimensión infinita, si el conjunto factibles es débilmente compacto y el problema es acotado, entonces existe un extremo en el que el valor del objetivo es tan próximo a su valor óptimo como deseemos. (Anderson y Nash, 1987). Sin embargo, puesto que nuestro objetivo no depende de la variable infinito-dimensional ν , podemos probar mucho más.

Demostración . Por el lema previo \mathcal{A}_0 es convexo y cerrado. Consecuentemente, los teoremas de representación de convexos cerrados (Holmes, 1975) se pueden aplicar. \mathcal{A}_0 no contiene variedades afines porque está en el octante no-negativo de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s$. Por tanto,

$$\mathcal{A}_0 = Co[ext(\mathcal{A}_0)] + Rc(\mathcal{A}_0), \quad (37)$$

donde Co denota envoltura convexa Rc denota cono de recesión.

El supuesto 1 garantiza que (36) es resoluble, y, por consiguiente, (37) conduce a la existencia de $(\lambda, \xi) \in ext(\mathcal{A}_0)$ tal que $-\sum_{j=1}^m b_j \lambda_j = \theta_\alpha$. Fíjese (λ, ξ) y sea

$$\mathcal{A}_1 = \{\nu \in \mathcal{P}(\Delta); (\lambda, \xi, \nu) \in \mathcal{A}\}.$$

\mathcal{A}_1 es claramente cerrado y, por tanto, compacto, pues está en $\mathcal{P}(\Delta)$. El teorema de Krein Milman (Holmes, 1975, or Anderson and Nash, 1987) asegura que \mathcal{A}_1 es la envoltura $\sigma(\mathcal{M}(\Delta), \mathcal{C}(\Delta))$ -cerrada de sus extremos. Luego existe $\nu \in ext(\mathcal{A}_1)$, y (λ, ξ, ν) es el elemento requerido de $ext(\mathcal{A})$. \square

Lema 5. Sea $N \in \mathbb{N}$ y sea $C \subset \mathbb{R}^N$ convexo y compacto. Sea c_0 un extremo de C . Entonces, existe una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ con $L(c_0) > L(c)$ para cada $c \in C \setminus \{c_0\}$.

Demostración . Apliquemos la inducción sobre la dimensión de C , $Dim(C)$ (dimensión de la mínima variedad afín que contiene a C). El resultado es claro si $Dim(C)$ es cero o uno. Supóngase su cumplimiento para dimensiones $1, 2, \dots, Dim(C) - 1$. Sin pérdida de generalidad se asumirá que $Dim(C) = N$. Los teoremas de separación de conjuntos convexos (Holmes, 1975) implican que hay una función lineal no nula $L' : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ con $L'(c_0) \geq L'(c)$ para cada $c \in C$. Obviamente,

$$Dim \{c \in C; L'(c) = L'(c_0)\} \leq N - 1$$

(este conjunto está en una variedad afín de dimensión $(N - 1)$). Por inducción existe $L'' : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ con $L''(c_0) \geq L''(c)$ si $c \in C$ y $L''(c_0) > L''(c)$ cuando $c \in C$ y $L'(c) = L'(c)$. Por tanto, $L = L' + L''$ es la aplicación lineal buscada. \square

Lema 6. Sean $N \in \mathbb{N}$ y $f : \Delta \mapsto \mathbb{R}^N$ $\sigma(L^q, L^p)$ -continua. entonces, para cada $\nu \in \mathcal{P}(\Delta)$ existen un subconjunto finito

$$\{z^1, z^2, \dots, z^K\} \subset \Delta$$

y una combinación lineal convexa

$$\sum_{k=1}^K t_k \delta_{z^k}, t_1, t_2, \dots, t_K \geq 0, \sum_{k=1}^K t_k = 1$$

tales que

$$\int_{\Delta} f d\nu = \int_{\Delta} f d \left(\sum_{k=1}^K t_k \delta_{z^k} \right).$$

Demostración . Al ser f continua $f(\Delta)$ es conexo y compacto. Considérese la función

$$\mathcal{M}(\Delta) \ni \nu \longrightarrow \phi_f(\nu) = \int_{\Delta} f d\nu \in \mathbb{R}^N.$$

ϕ_f es lineal y $\sigma(\mathcal{M}(\Delta), \mathcal{C}(\Delta))$ -continua, por lo que $\phi_f(\mathcal{P}(\Delta))$ también es convexo compacto. como $f(z) = \int_{\Delta} f d\delta_z$,

$$f(\Delta) \subset \phi_f(\mathcal{P}(\Delta)). \quad (38)$$

presentemos la prueba en dos etapas.

Eta1. Se satisface el resultado para $N = 1$ con $K = 1$. En efecto, tomemos

$$m = \text{Min} \{f(z); z \in \Delta\} \leq \text{Max} \{f(z); z \in \Delta\} = M.$$

Al ser $f(\Delta)$ conexo tenemos que

$$f(\Delta) = [m, M] \quad (39)$$

Además

$$m = \int_{\Delta} m d\nu \leq \int_{\Delta} f d\nu \leq \int_{\Delta} M d\nu = M$$

para cada $\nu \in \mathcal{P}(\Delta)$, de donde (39) conduce a la existencia de $z_{\nu} \in \Delta$ con $f(z_{\nu}) = \int_{\Delta} f d\nu$ para cada $\nu \in \mathcal{P}(\Delta)$.

Eta2. Sea ahora $N \in \mathbb{N}$ arbitrario. Al ser $\phi_f(\mathcal{P}(\Delta))$ convexo y compacto

$$\phi_f(\mathcal{P}(\Delta)) = \text{Co}(\text{ext}(\phi_f(\mathcal{P}(\Delta)))) .$$

Por tanto, para cualquier $\nu \in \mathcal{P}(\Delta)$ existe $\{u_1, u_2, \dots, u_K\} \subset \text{ext}(\phi_f(\mathcal{P}(\Delta)))$ que genera a $\int_{\Delta} f d\nu$ como combinación lineal convexa

$$\int_{\Delta} f d\nu = \sum_{h=1}^K t_h u_h.$$

Es suficiente ver que todo elemento en $\{u_1, u_2, \dots, u_K\}$ tienen la forma $u_k = f(z^k)$, $z^k \in \Delta$, así que fijese $u \in \text{ext}(\phi_f(\mathcal{P}(\Delta)))$ y probemos la última expresión. Del lema anterior se deduce la existencia de $L : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ con

$$L(u) > L(w) \quad (40)$$

para cada $w \in \phi_f(\mathcal{P}(\Delta))$, $w \neq u$. Obviamente,

$$\int_{\Delta} (L \circ f) d\nu = L \left(\int_{\Delta} f d\nu \right)$$

para cada $\nu \in \mathcal{P}(\Delta)$, de donde

$$\int_{\Delta} (L \circ f) d\nu_u = L(u)$$

para los $\nu_u \in \mathcal{P}(\Delta)$ con $\int_{\Delta} f d\nu_u = u$ (cuya existencia se sigue de $u \in \phi_f(\mathcal{P}(\Delta))$). De lo probado en la etapa anterior, existe $z \in \Delta$ con

$$L(f(z)) = (L \circ f)(z) = \int_{\Delta} (L \circ f) d\nu_u = L(u)$$

y, teniendo en cuenta que $f(z) \in f(\Delta) \subset \phi_f(\mathcal{P}(\Delta))$, (véanse (39) y (40)), se tiene que $f(z) = u$. \square

Teorema 7. Con las notaciones anteriores, sea (λ, ξ) un extremo de \mathcal{A}_0 y sea (λ, ξ, ν) una solución de (36) y extremo de \mathcal{A} . Entonces, existen $\{z^1, z^2, \dots, z^K\} \subset \Delta$ y una combinación lineal y convexa

$$\sum_{k=1}^K t_k \delta_{z^k}, \quad t_1, t_2, \dots, t_K \geq 0, \quad \sum_{k=1}^K t_k = 1,$$

tales que $(\lambda, \xi, \sum_{k=1}^K t_k \delta_{z^k})$ también resuelve (36) y es extremo de \mathcal{A} . Además, if K^* es el número de componentes de (λ, ξ) estrictamente positivas, entonces $K^* + K \leq r + s + 1$.

Demostración . La existencia de (λ, ξ, ν) se deduce del lema 4, y el lema 6 garantiza la existencia de $\sum_{k=1}^K t_k \delta_{z^k}$ con

$$\sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \left(\int_{\Delta_i} E(y_h z_i) d\nu_i \right) = \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \left(\int_{\Delta_i} E(y_h z_i) d \left(\sum_{k=1}^K t_k \delta_{z^k} \right) \right),$$

$h = 1, 2, \dots, n$. Por tanto, $(\lambda, \xi, \sum_{k=1}^K t_k \delta_{z^k}) \in \mathcal{A}$, y se puede asumir que $t_k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, K$. Si $(\lambda, \xi, \sum_{k=1}^K t_k \delta_{z^k})$ no es extremo de \mathcal{A} entonces $\sum_{k=1}^K t_k \delta_{z^k}$ puede cambiarse por una nueva combinación convexa $\sum_{k=1}^K \tau_k \delta_{z^k}$ tal que $(\tau_k)_{k=1}^K$ sea extremo del conjunto compuesto por los $(\tilde{\tau}_k)_{k=1}^K$ con componentes no negativas, $\sum_{k=1}^K \tau_k = 1$ y

$$\sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \left(\int_{\Delta_i} E(y_h z_i) d\nu_i \right) = \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \left(\int_{\Delta_i} E(y_h z_i) d \left(\sum_{k=1}^K \tilde{\tau}_k \delta_{z^k} \right) \right).$$

Ahora es fácil ver que $(\lambda, \xi, \sum_{k=1}^K \tau_k \delta_{z^k})$ es extremo de \mathcal{A} .

Sólo falta probar que $K^* + K \leq n + 1$ (K sigue siendo el número de componentes no nulas de $(\tau_k)_{k=1}^K$). Al ser $(\lambda, \xi, \sum_{k=1}^K \tau_k \delta_{z^k}) \in \mathcal{A}$, se tiene que

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^m E(q_j y_h) \lambda_j - \sum_{k=1}^K \tau_k \left[\int_{\Delta} \left(\sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i E(y_h z) \right) d\delta_{z^k} \right] &= 0, & h = 1, 2, \dots, r \\ \sum_{j=1}^m E(q_j y_h) \lambda_j - \xi_h - \sum_{k=1}^K \tau_k \left[\int_{\Delta} \left(\sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i E(y_h z) \right) d\delta_{z^k} \right] &= 0, & h = r+1, \dots, r+s \\ \sum_{k=1}^K \tau_k &= 1 \\ \lambda \geq 0, \xi \geq 0, \tau \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Fijando todos los parámetros del sistema menos (λ, ξ) y $\tau = (\tau_k)_{k=1}^K$ ya sabemos que hay una solución en la incógnita (λ, ξ, τ) . Al ser nuestra concreta (λ, ξ, τ) un extremo de \mathcal{A} , también es extremo del conjunto de soluciones del último sistema. Así, (λ, ξ, τ) es solución factible básica (Anderson y Nash, 1987), y por tanto no puede tener más de $n+1$ (número de ecuaciones) componentes estrictamente positivas. \square

Observación 3. Nótese que las condiciones necesarias y suficientes (34) se simplifican con el teorema anterior. \square

Observación 4. (Algoritmo tipo simplex). Anderson y Nash (1987) presentaron un algoritmo tipo simplex que resuelve problemas lineales semi-infinitos. Su algoritmo no se adapta exactamente a nuestro problema (36), así que nosotros adaptaremos el método. Sin embargo, no presentaremos las pruebas, ya que son similares a las aportadas por estos autores.

Etapa 1. Fíjese una solución factible básica (*BFS*) inicial (punto extremo) $(\lambda, \xi, \sum_{k=1}^K t_k \delta_{z^k})$ que satisfaga las condiciones del teorema 7. Para encontrarla se pueden utilizar los procedimientos propuestos por Anderson y Nash (1987).

Considérese la matriz del sistema (41)

$$A = \begin{pmatrix} (E(y_h q_j))_{h=1, j=1}^{h=r, j=m} & (0)_{r \times s} & - \left(\int_{\Delta} \left(\sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i E(y_h z) \right) d\delta_{z^k} \right)_{h=1, k=1}^{h=r, k=K} \\ (E(y_h q_j))_{h=r+1, j=1}^{h=r+s, j=m} & -I_{s \times s} & - \left(\int_{\Delta} \left(\sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i E(y_h z) \right) d\delta_{z^k} \right)_{h=r+1, k=1}^{h=r+s, k=K} \\ (0)_{1 \times m} & (0)_{1 \times s} & -((1, 1, \dots, 1)_{1 \times K}) \end{pmatrix},$$

con dimensiones $(n+1) \times (m+s+K)$. Considérese la submatriz B que contiene las columnas de A asociadas a los elementos no nulos de $(\lambda, \xi, \sum_{k=1}^K t_k \delta_{z^k})$. El teorema 7 garantiza que B tiene menos de $(n+1)$ columnas o exactamente $(n+1)$ columnas. En el primer caso la *BFS* se dice degenerada, y no degenerada en el segundo. Si estuviéramos frente a la degeneración deberíamos añadir columnas de A hasta alcanzar una matriz regular B . Considérense finalmente la matriz fila

$$c = (-b_1, -b_2, \dots, -b_m, 0, 0, \dots, 0)$$

con $(m+s+K)$ columnas, y la matriz fila c_B con $(n+1)$ columnas que se obtiene tomando de c los elementos de A que componen B (columnas básicas,

desde ahora).

Etapa 2. Calculemos the matrices

$$B^{-1}A \text{ and } c_B B^{-1}A - c.$$

Es trivial ver que las columnas de $B^{-1}A$ asociadas con las variables básicas generan la matriz identidad. Por consiguiente, los elementos de $c_B B^{-1}A - c$ asociados a columnas básicas se anularán. En particular, se anulan todos los asociados a $\sum_{k=1}^K t_k \delta_{z^k}$.

Considérese la función

$$\Delta \ni z \mapsto \Phi(z) = c_B B^{-1} \begin{pmatrix} ([\int_{\Delta} (\sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i E(y_h z))] d\delta_z)_{h=1}^{h=r} \\ ([\int_{\Delta} (\sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i E(y_h z))] d\delta_z)_{h=r+1}^{h=n} \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \quad (42)$$

Extendamos la matriz $B^{-1}A$ añadiendo dos nuevas columnas.

Obtenemos la tabla

$$\left(\begin{array}{cc} c_B B^{-1}A - c. & -\sum_{j=1}^m b_j \lambda_j \\ \begin{pmatrix} (j_l)_{j_l} \\ (h_l)_{h_l} \\ (z_{k_l})_{k_l} \end{pmatrix} & \begin{matrix} B^{-1}A, & B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{array} \right) \quad (43)$$

que indica las variables básicas (primera columna), sus valores (última columna) y el nivel del objetivo. **Criterio de optimalidad** . Si no hay elementos negativos en $c_B B^{-1}A - c$ y

$$\Phi(z) \geq 0 \quad (44)$$

para cada $z \in \Delta$, entonces $(\lambda, \xi, \sum_{k=1}^K t_k \delta_{z^k})$ resuelve (36). El algoritmo termina aquí. En otro caso vamos a la etapa 3.

Etapa 3. Escenario 1. Asumamos que $c_B B^{-1}A - c$ contiene elementos negativos. Estarán asociados con variables no básicas de A ,

$$\begin{pmatrix} (E(y_h q_j))_{h=1, j=1}^{h=r, j=m} \\ (E(y_h q_j))_{h=r+1, j=1}^{h=r+s, j=m} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \text{ or } (0, \dots, 0, 0, \dots, -1, \dots, 0, 0)^t$$

relacionadas con no básicas λ_{j_0} o ξ_{h_0} que serán básicas en la nueva iteración del algoritmo. Denotemos por A_0 a la columna anterior y calculemos la matriz columna (que es columna de $B^{-1}A$)

$$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n+1})^t = B^{-1}A_0. \quad (45)$$

Fácilmente se prueba que tiene elementos positivos o que, en otro caso, (36) sería no acotado, y por tanto (32) no factible en virtud de (28).

Tomemos

$$\eta = \text{Min} \left\{ \left\{ \frac{\lambda_{j_l}}{\eta_l}; \eta_l > 0 \right\} \cup \left\{ \frac{\xi_{h_l}}{\eta_l}; \eta_l > 0 \right\} \cup \left\{ \frac{t_{k_l}}{\eta_l}; \eta_l > 0 \right\} \right\}, \quad (46)$$

con las notaciones obvias $((\lambda_{j_l}), (\xi_{h_l}), (t_{k_l})) = B^{-1}(0, 0, \dots, 1)^t$ está entre las columnas de (43) y representa la “antigua” no óptima variable). El valor mínimo se alcanzará en la variable que dejará de ser básica en la nueva iteración. Por tanto, hemos modificado el conjunto de variables básicas, y resolvemos el sistema (41) para obtener la nueva *BFS*. El objetivo en *BFS* ha mejorado y volvemos a la etapa 1.

Algunos cálculos se pueden agilizar: Llamemos “pivote” P al elemento de $B^{-1}A$ en la posición queda el mínimo de (46). Actualicemos la fila de $B^{-1}A$ de la tabla (43) que contiene al pivote dividiendo toda la fila por P . Actualicemos $c_B B^{-1}A - c$ y el resto de filas de $B^{-1}A$ y (43) sustrayendo de la antigua fila la nueva del pivote multiplicada por P , elemento en la correspondiente fila y en la columna del pivote. Modifiquemos los subíndices de la primera columna de (43) para reflejar las nuevas variables básicas. Ahora volvemos a la etapa 2 habiendo actualizado $(\lambda, \xi, \sum_{k=1}^K t_k \delta_{z^k}), B^{-1}A, c_B B^{-1}A - c$ y (43).

Etapa3. Escenario 2. Supongamos que $c_B B^{-1}A - c$ no contienen elementos negativos pero que existe $\tilde{z} \in \Delta$ con $\Phi(\tilde{z}) < 0$. Obviamente, \tilde{z} no está en $\{z^1, z^2, \dots, z^K\}$. Si se puede, escojamos \tilde{z} de forma que resolvamos

$$\text{Min} \{ \Phi(z); z \in \Delta \} \quad (47)$$

Si no, sea \tilde{z} arbitrario pero tal que el valor de Φ es negativo. \tilde{z} estará en la siguiente *BFS* y hay que determinar la variable que dejará la base. Para hacerlo procedemos como en el escenario anterior. Por tanto, sea

$$A_0 = \begin{pmatrix} ([\int_{\Delta} (\sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i E(y_h \tilde{z}))] d\delta_{\tilde{z}})_{h=1}^{h=r} \\ ([\int_{\Delta} (\sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i E(y_h \tilde{z}))] d\delta_{\tilde{z}})_{h=r+1}^{h=n} \\ 1 \end{pmatrix},$$

calculemos (45), y el valor η de (46) indicará la variable que deja de ser básica. (41) nos da la nueva *BFS* y después volvamos a la etapa 1. Se pueden simplificar

los cálculos si actualizamos $(\lambda, \xi, \sum_{k=1}^K t_k \delta_{z^k})$, $B^{-1}A$, $c_B B^{-1}A - c$ y (43) como en el caso anterior. Si lo hacemos “las antiguas $B^{-1}A$, $c_B B^{-1}A - c$ y (43)” deben ser previamente ampliadas a

$$\begin{pmatrix} \Phi(\tilde{z}) \\ B^{-1} \begin{pmatrix} ([\int_{\Delta} (\sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i E(y_h \tilde{z}))] d\delta_{\tilde{z}})_{h=r}^{h=1} \\ ([\int_{\Delta} (\sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i E(y_h \tilde{z}))] d\delta_{\tilde{z}})_{h=r+1}^{h=n} \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Nota Final. Si la condición de optimalidad de la etapa 2 no se da y vamos al segundo escenario de la etapa 3 entonces $\tilde{z} \in \Delta$ debe ser tal que $\Phi(\tilde{z})$ sea tan pequeña (negativa) como sea posible (deberíamos incluso resolver (47)), pues es importante una convergencia rápida del algoritmo. Por tanto, esta etapa es importante. Dado que Φ es lineal en z (véase (42)), se puede contrastar el valor de Φ en los extremos de Δ , para obtener un \tilde{z} tan cercano como sea posible a la solución de (47). \square

4.6. Ejemplos de Funciones de Riesgo Importantes

Veamos ejemplos de funciones de riesgo que satisfacen (20), es decir, tales que permiten aplicar nuestra metodología. Todos estos ejemplo han sido tratados en la literatura, así que nuestro único propósito es mostrar lo general que nuestros métodos son. En consecuencia, no seremos exhaustivos y sólo resumiremos las propiedades más importantes de algunas funciones de riesgo.

Todos los ejemplos son funciones convexas y positivamente homogéneas. Por tanto, maximizando la ratio de Sharpe generalizada (GSR), cociente entre la prima de riesgo esperada y el nivel de riesgo, se puede obtener la estrategia general cuyas combinaciones con el activo sin riesgo generan la línea eficiente en este “nuevo marco rentabilidad/riesgo”. Esta propiedad es similar a la bien conocida del clásico $CAPM$, caso en el que la línea eficiente se obtiene diversificando entre el activo sin riesgo y la cartera del mercado. Obviamente, la maximización de la GSR es equivalente a la minimización del nivel de riesgo con una cota apropiada sobre la prima de riesgo esperada, es decir, es equivalente a la resolución de los problemas de optimización lineales estudiados en este capítulo. La nueva cartera modelo se puede interpretar como aquel “nuevo índice” que resuelve los problemas de asimetría y cola gruesa. En el próximo capítulo de esta memoria se estudiará a fondo este tema, la cartera óptima obtenida será denominada “Estrategia de Cola Ligera”, y será relacionada con otros “Índices de Cola Ligera” que se construirán.

Ejemplo 1. Desviación estándar. La desviación estándar σ_2 medida de riesgo utilizada en la teoría clásica de selección de carteras y en los modelos $CAPM$ y APT . Se define sobre el espacio de Banach L^2 . e acuerdo a los resultados de Rockafellar *et al.* (2006a), la expresión (20) se cumple si (véanse (21)

y (22))

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}^{\sigma_2} &= \Delta^{\sigma_2} - \{1\} = \{z \in L^2; E(z) = 1, \|z - 1\|_2 \leq 1\} - \{1\}, \\ &= \{z \in L^2; E(z) = 0, \|z\|_2 \leq 1\}\end{aligned}$$

que es $\sigma(L^2, L^2)$ –compacto porque es acotado (recuérdese el teorema de Alaoglu). La medida de riesgo asociada también verifica (20) si tomamos Δ^{σ_2} . Puesto que, en general, Δ^{σ_2} contiene variables aleatorias no positivas, la medida de riesgo no es decreciente y por tanto no es coherente, en el sentido de Artzner *et al.* (1999) (véase Rockafellar *et al.*, 2006a). Esto es una deficiencia porque una medida de riesgo trata de reflejar requerimientos de capital, y podría darse el contrasentido de que mayor riqueza final implicara mayor riesgo y mayor necesidad inicial de capitales. Como ya dijimos, σ_2 no es compatible con la *DESO* cuando hay retornos asimétricos (Ogryczak y Ruszczyński, 1999).

Ejemplo 2. Dispersiones usuales. La p –desviación está dada por $L^p \ni y \mapsto \sigma_p(y) = \|(y - E(y))\|_p = [E|y - E(y)|^p]^{1/p} \in \mathbb{R}$, donde $p \in [1, \infty)$. Al ser $\|\cdot\|_q$ norma dual de $\|\cdot\|_p$ se tiene que $\|y\|_p = \text{Sup} \{E(yz); z \in L^q, \|z\|_q \leq 1\}$ para cada $y \in L^p$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\sigma_p(y) &= \|(y - E(y))\|_p = \text{Sup} \left\{ E[(y - E(y))z]; z \in L^q, \|z\|_q \leq 1 \right\} \\ &= \text{Sup} \left\{ E(yz) - E(y)E(z); z \in L^q, \|z\|_q \leq 1 \right\} \\ &= \text{Sup} \left\{ E[y(z - E(z))]; z \in L^q, \|z\|_q \leq 1 \right\} \\ &= \text{Sup} \left\{ E(y(-z)); z = E(z') - z', z' \in L^q, \|z'\|_q \leq 1 \right\} = \text{Sup} \left\{ E(y(-z)); z \in \tilde{\Delta}^{\sigma_p} \right\}.\end{aligned}$$

Dado que $L^q \ni z \mapsto E(z) - z \in L^q$ es $\sigma(L^q, L^p)$ –continua y la bola unidad de L^q es $\sigma(L^q, L^p)$ –compacta (teorema de Alaoglu), $\tilde{\Delta}^{\sigma_p}$ es $\sigma(L^q, L^p)$ –compacto, es decir, la expresión (20) se cumple y la teoría desarrollada es aplicable.

Como en el ejemplo anterior, $\Delta^{\sigma_p} = \tilde{\Delta}^{\sigma_p} + \{1\}$ contiene variables aleatorias no positivas, por lo que la medida de riesgo acotada por la media asociada no es coherente.

La desviación absoluta $\sigma_1(y) = E|y - E(y)|$, $y \in L^1$, es un caso importante porque es compatible con la *DESO* (Ogryczak y Ruszczyński, 1999).

Además, si distorsionamos levemente y usamos $\frac{\sigma_1(y)}{2}$ en vez de $\sigma_1(y)$, entonces la medida de riesgo asociada $\frac{\sigma_1(y)}{2} - E(y)$ es coherente (Rockafellar *et al.*, 2006a).

La p –semi–desviación está dada por $L^p \ni y \mapsto \sigma_p(y) = \|(y - E(y))_-\|_p \in \mathbb{R}$, donde

$$(y - E(y))_- = \begin{cases} 0 & \text{si } y \geq E(y) \\ E(y) - y & \text{resto} \end{cases}.$$

Es una medida de dispersión interesante en cobertura y selección de inversiones porque sólo considera las desviaciones respecto a la media con efecto “pérdida”, dejando a un lado las ganancias (desviaciones positivas). Nuevamente se cumple (20) (Rockafellar *et al.*, 2006a) y la medida de riesgo asociada es coherente y acotada por la media (Rockafellar *et al.*, 2006a). Si $p = 1$ o $p = 2$ también es compatible con *DESO* (Ogryczak y Ruszczyński, 1999).

Ejemplo 3. VaR condicional. El VaR condicional ($CVaR$ or $CVaR_{\mu_0}$), definido sobre L^1 , se está convirtiendo en una medida muy importante para teóricos e inversores. Es coherente y acotada por la media (Rockafellar *et al.*, 2006a). Se representa por

$$\Delta^{CVaR} = \left\{ z \in L^\infty; 0 \leq z \leq \frac{1}{\mu_0}, E(z) = 1 \right\} \subset L^\infty$$

siendo $\mu_0 \in (0, 1)$ el nivel de confianza. Δ^{CVaR} es convexo y $\sigma(L^\infty, L^1)$ – compacto. El conjunto extremo de Δ^{CVaR} es importante porque nos pone fácil trabajar con la condición (44) y el problema (47). Lo componen las variables aleatorias de la forma $(1/\mu_0)\chi_{\Omega_0}$, $\Omega_0 \in \mathcal{F}$, $\mu(\Omega_0) = \mu_0$. La desviación asociada con el $CVaR$ puede también tratarse con nuestra metodología si usamos

$$\tilde{\Delta}^{CVaR} = \left\{ z \in L^\infty; -1 \leq z \leq \frac{1}{\mu_0} - 1, E(z) = 0 \right\} \subset L^\infty.$$

Pese a su creciente importancia, el $CVaR$ no es compatible con la *DESO*, como veremos en el ejemplo 5.

Ejemplo 4. Valor en riesgo. El valor en riesgo (VaR) es quizá la medida de riesgo más usada, pese a ni ser coherente, ni acotada por la media, ni ser compatible con la *DESO*. El VaR no puede representarse mediante (20), así que nuestra metodología tampoco puede aplicarse. Sin embargo, en ciertos casos, algunas modificaciones de (24) conducirían a un problema lineal vectorial equivalente al (23), de forma que la metodología se podría adaptar para minimizar el VaR también (problemas lineales vectoriales en espacios de Banach generales se analizan, entre otros, en Balbás y Heras, 1993).

Ejemplo 5. Funciones de distorsión. Analicemos un conjunto de funciones de riesgo que verifican “todas las propiedades deseables” (coherentes, acotadas por la media, satisfacen (20) y son compatibles con la *DESO*).

Wang (2000) consideró una función no decreciente $g : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ con $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$, y una función general de riesgo bajo la “forma heurística”

$$R_g(y) = - \int_0^1 VaR_t(y) dg(t),$$

donde $VaR_t(y)$ es el valor en riesgo de y si t es el nivel de confianza. Si g es continua en $[0, 1]$ y diferenciable a trozos en $(0, 1)$ entonces, de la expresión anterior,

$$R_g(y) = - \int_0^1 VaR_t(y) g'(t) dt. \quad (48)$$

Un caso especialmente importante es

$$g(t) = \begin{cases} (1/\mu_0) t, & t \leq \mu_0 \\ 1, & t \geq \mu_0 \end{cases}$$

que conduce al $CVaR_{\mu_0}$. Wang justificó su propuesta por varias razones. Entre ellas, él demostró con ejemplos numéricos simples que el $CVaR$ puede presentar deficiencias en problemas prácticos particulares. Su idea intuitiva fue formalizada en, Whirch and Hardy (2001), donde se establece que R_g es compatible con la $DESO$ si y sólo si g es estrictamente cóncava, caso en el que R_g es también coherente.

Hay muchas medidas de riesgo dadas por (48) que satisfacen las deseables propiedades antes citadas. Por ejemplo, supóngase que g es dos veces continuamente diferenciable en $[0, 1]$ y con segunda derivada estrictamente negativa en $(0, 1)$. Entonces R_g se define en L^1 , es compatible con la $DECO$, y admite la representación (20) si Δ^g es la envoltura débilmente*-cerrada de

$$\{0\} \cup \{z \in L^\infty; z(\omega) = g'[\mu(y \leq y(\omega))], y \in L^1\}.$$

Al ser g' no negativa y acotada superiormente R_g es coherente (Rockafellar *et al.*, 2006a) y acotada por la media, y Δ^g es $\sigma(L^\infty, L^1)$ -compacto, esto es, R_g satisface todas las “propiedades ideales” y admite que se aplique nuestra metodología. Un ejemplo importante en el campo actuarial es la “Dual Power Transform”, generada por

$$g_x(t) = 1 - (1 - t)^x, x \geq 2.$$

Wang también propuso la función de distorsión $g(t) = \Psi(a + \Psi^{-1}(t))$, con $a > 0$, y donde Ψ denota la función de distribución de la normal estándar. Entonces R_g se define en L^2 , es compatible con la $DESO$, y se puede probar (20) si Δ^g es la envoltura débilmente cerrada de $\{0\} \cup \{z \in L^2; z(\omega) = g'[\mu(y \leq y(\omega))], y \in L^2\}$.

Al ser g' no negativa y estar en $L^2[0, 1]$ (cuando $[0, 1]$ está dotado de la media de Lebesgue), Δ^g es $\sigma(L^2, L^2)$ -compacto y (por Rockafellar *et al.*, 2006a) R_g es coherente y acotada por la media.

4.7. Ejemplo Numérico

Presentaremos un ejemplo numérico que ilustra el uso en la práctica de los métodos propuestos. Consideraremos una base de datos que contiene precios semanales desde el 27 de julio de 2003 hasta el 22 de septiembre de 2006.⁸

⁸Agradecemos a “Welzia Management SGIIC SA” el habernos proporcionado la base de datos.

Hay 8 activos involucrados, 7 arriesgados y uno sin riesgo. Son, RV (renta variable internacional), RVA (renta variable internacional, pequeñas compañías), RVA (renta variable internacional, mercados emergentes), RF (renta fija), RFA (renta fija, emergentes), un *Hedge Fund* representado por $R1$, y un índice final COM que combina varios futuros sobre mercancías.

Resolveremos problemas de selección de carteras utilizando la medida de Wang y el *Conditional Value at Risk*. Como hemos dicho, el $CVaR$ se utiliza cada vez más en la práctica, pese a no ser compatible con la dominancia estocástica de segundo orden. Además, la literatura ha mostrado lo complejo que puede llegar a ser optimizar en la práctica el $CVaR$, especialmente para cierto tipo de activos (véase, entre otros muchos, Alexander *et al.*, 2006). Por otro lado, hasta donde nosotros sabemos, no hay hasta ahora trabajos empíricos que minimicen la medida de Wang, pese a que es coherente, acotada por la media, y compatible con la dominancia estocástica de segundo orden.

Consideremos el problema

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min } \rho(u) \\ E(yq_j) \leq b_j \quad j = 1, 2 \end{array} \right\} \quad (49)$$

donde ρ es el $CVaR$ (ya daremos valores a μ_0) o la medida de ($a = 1,65$, conforme a la sugerencia de Wang, 2000). La primera restricción está relacionada con la rentabilidad esperada de la cartera, que debe superar el valor semanal $r = 0,001$. Por consiguiente $q_1 = (-1, \dots - 1)$ y $b_1 = -(1 + r) = -1,001$, por lo que la restricción es $E(-y) \leq -(1 + r)$. La segunda restricción impone que no se invierta más de un euro, y está dada por $E(yq_2) \leq 1$ ($b_2 = 1$), donde q_2 denota el factor de descuento estocástico (véase Cochrane, 2001, para un análisis detallado de este concepto). Argumentos usuales de ausencia de arbitraje justifican que (49) es acotado (Cochrane, 2001). Además, la cualificación de Slater del supuesto I también se cumple, ya que r es suficientemente pequeño, y hay activos con mayor rentabilidad esperada.

Se ha utilizado el algoritmo tipo simplex desarrollado en este capítulo bajo supuestos diferentes. Para simplificar y resumir sólo presentaremos la solución numérica de los problemas (carteras óptimas), ya que no hay nada significativo en la aplicación del algoritmo. Pese a que los problemas de optimización implican a espacio de dimensión infinita, la función objetivo depende de la variable finito dimensional λ (véase (36)), y la convergencia del algoritmo es muy rápida. Con un código *Visual – Basic* el tiempo de computación nunca fue mayor de 6 minutos.⁹

Estrategia 1.1. No incorporamos es activo sin riesgo e imponemos $x_k \geq 0$, $k = 1, \dots, 7$. Tenemos que adaptar (49) para obtener una expresión similar a

⁹Nótese que estamos comprobando la efectividad del algoritmo, y no la de las funciones de riesgo elegidas.

(32). Entonces, si ρ es la medida de Wang, resolvemos (36) y llegamos a

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 2,739488, \quad \lambda_2 = 1,7130599 \\ \xi_1 &= 0,0004, \quad \xi_5 = 0,0016, \quad \xi_k = 0, \quad k = 2, 3, 4, 6, 7 \\ t_1 &= 0,1628, \quad t_2 = 0,1886, \quad t_3 = 0,6486\end{aligned}$$

Las condiciones de holgura complementaria (35) y las restricciones de (32) conducen a

$$\begin{aligned}\theta &= -0,993920023 \\ x_2 &= 0,0500, \quad x_3 = 0,0100, \quad x_4 = 0,1062, \quad x_5 = 0,8000, \quad x_6 = 0,0338 \\ x_k &= 0, \quad k = 1, 7\end{aligned}$$

Estrategia 1.2. Bajo supuestos análogos, si $\rho = CVaR_{0,03}$ ($\mu_0 = 0,03$ es el nivel de confianza), entonces

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 2,686958046, \quad \lambda_2 = 1,680211521 \\ \xi_1 &= 0,0076, \quad \xi_3 = 0,0047, \quad \xi_5 = 0,0113, \quad \xi_k = 0, \quad k = 2, 4, 6, 7 \\ t_1 &= 0,2540, \quad t_2 = 0,2677, \quad t_3 = 0,4783.\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\theta &= -0,995607081 \\ x_2 &= 0,0500, \quad x_4 = 0,1500, \quad x_6 = 0,7442, \quad x_7 = 0,0558 \\ x_k &= 0, \quad k = 1, 3, 5\end{aligned}$$

es la solución primal.

Estrategia 1.3. Bajo análogos supuestos, si $\rho = CVaR_{0,0592}$ ($\mu_0 = 0,0592 = 5,92\%$ es ahora el nuevo nivel de confianza)

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 4,463566171, \quad \lambda_2 = 3,7728751 \\ \xi_1 &= 0,0008, \quad \xi_5 = 0,0006, \quad \xi_k = 0, \quad k = 2, 3, 4, 6, 7 \\ t_1 &= 0,0581, \quad t_2 = 0,2692, \quad t_3 = 0,1682, \quad t_4 = 0,5045\end{aligned}$$

La solución primal es

$$\begin{aligned}\theta &= -0,997226608 \\ x_2 &= 0,0500, \quad x_3 = 0,0199, \quad x_4 = 0,3000, \quad x_6 = 0,6301 \\ x_k &= 0, \quad k = 1, 5, 7\end{aligned}$$

Estrategia 2.1. Consideremos los valores $S_1 = EE$, $S_2 = FI$, $S_3 = R1$, $S_4 = COM$, y el activo sin riesgo S_5 . para simplificar anulamos el tipo de interés. Impondremos $x_k \geq 0$, $k = 1, \dots, 5$. Para la medida de Wang la solución dual es

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 2,68386099 \quad \lambda_2 = 1,67825611 \\ \xi_5 &= 0,0099, \quad \xi_k = 0, \quad k \neq 5 \\ t_1 &= 0,3950, \quad t_2 = 0,4469, \quad t_3 = 0,1581\end{aligned}$$

y la solución primal

$$\begin{aligned} \theta &= -0,991837854 \\ x_1 &= 0,0168, \quad x_2 = 0,1500, \quad x_3 = 0,7332, \quad x_4 = 0,100, \quad x_5 = 0 \end{aligned}$$

Estrategia 2.2. Los supuestos son los anteriores pero $\rho = CVaR_{0,03}$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2,685878, \quad \lambda_2 = 1,6795367 \\ \xi_3 &= 0,0024, \quad \xi_4 = 0,0006 \\ t_1 &= 0,3610, \quad t_2 = 0,6390 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \theta &= -0,995584188 \\ x_1 &= 0,0528, \quad x_2 = 0,4000, \quad x_3 = 0,5472, \quad x_k = 0, \quad k = 4, 5 \end{aligned}$$

4.8. Conclusiones

Requerimientos de capital para las instituciones financieras, colas pesadas, asimetrías y otros factores han provocado un creciente interés en el moderno análisis de riesgos. Investigadores, reguladores e inversores han desarrollado nuevos métodos en la medición de los niveles de riesgo.

La selección de inversiones y la cobertura óptima son complejos si se usan funciones de riesgo generales. Estas funciones son convexas pero no diferenciables, y no es fácil aplicar los métodos de la optimización convexa o cuasi-convexa. Por tanto, el desarrollo de algoritmos apropiados se está convirtiendo en un tema importante.

Los teoremas de representación de funciones de riesgo nos han permitido transformar un problema de minimización en otro minimax, que después se ha descrito como un problema lineal entre espacios de Banach de dimensión infinita. Para éste se han dado nuevas condiciones de optimalidad que nada tienen que ver con subgradientes, sino con existencia de medidas de probabilidad regulares y σ -aditivas con propiedades especiales. Con respecto a otros trabajos que también usan programación lineal, nuestro enfoque tiene la aparente ventaja de ser universal, y de poderse aplicar a cualquier medida de desviación o acotada por la media, y a casi todas las coherentes.

Se ha desarrollado un algoritmo tipo simplex también muy general, que nos permite resolver problemas prácticos con gran eficiencia. Además, la teoría se ha aplicado a problemas numéricos que involucraban fuertes asimetrías y colas muy pesadas.

4.9. Apéndice I: datos para el ejemplo práctico de la sección 4

	Renta Variable	Renta Variable Small	Renta Variable Emergentes	Renta Fija EUR	Renta Fija High Yield y Emergentes	Gestión Alternativa Riesgo 1	Commodities	Liquidez
Rent. Esperada	9,57 %	13,38 %	10,23 %	4,05 %	6,82 %	3,50 %	13,38 %	3,00 %
Límites	sin	menos que RV	15 %	sin	15 %	sin	15 %	

	RV	RVA	RVE	RF	RFA	R 1	COM
22-sep-06	165,121201	222,7803858	284,667441	121,158391	138,483669	112,388298	166,692036
15-sep-06	165,873605	224,5457918	287,026876	120,379828	138,5264452	112,616554	171,939029
8-sep-06	164,443648	221,0398295	286,364125	120,252646	138,1615813	112,377426	182,26065
1-sep-06	166,099157	223,3030171	289,285176	120,477507	138,0876655	112,167674	188,549811
25-ago-06	164,290438	218,228668	284,573839	120,072185	137,2783897	112,09638	197,427532
18-ago-06	164,952404	220,1360375	288,611667	119,200527	137,1933634	112,204975	194,785624
11-ago-06	160,7353	213,1024708	285,195705	118,537689	136,3973666	112,220089	202,983421
4-ago-06	161,97047	216,8174288	283,151507	118,935564	135,9788998	112,04482	205,910478
28-jul-06	161,763034	215,8470483	279,929206	118,861374	135,1950511	112,079449	201,4125
21-jul-06	156,318446	209,0718345	270,080477	118,618754	134,3525734	112,054245	200,163494
14-jul-06	155,71688	210,9740911	267,31543	118,36267	133,5231264	111,969535	210,529938
7-jul-06	159,835424	218,0650028	277,87425	117,760846	133,3343831	111,685552	202,468672
30-jun-06	159,78528	219,8707614	276,161427	117,547443	132,3732625	111,473657	202,256962
23-jun-06	155,965362	211,8831214	258,474813	117,311411	131,7032992	111,55076	195,147868
16-jun-06	155,201535	211,7061777	260,781529	118,270721	132,8361309	111,341427	195,59799
9-jun-06	155,732487	212,7271503	260,450154	118,244368	133,6258143	111,185193	198,998771
2-jun-06	160,807045	223,4679268	282,812601	118,148981	133,4959172	110,939385	203,183504
26-may-06	160,515058	222,2916809	283,572182	118,421965	133,3795959	111,138448	201,091225
19-may-06	158,898523	220,821809	289,659587	117,804672	133,7475977	111,15548	195,593902
12-may-06	163,479577	230,9879298	315,335786	116,965383	134,3039277	111,152825	206,785876
5-may-06	167,59037	238,0748472	320,033138	117,301958	134,7473876	111,24868	200,746377
28-abr-06	165,629714	232,7226169	309,236546	117,551167	134,5920222	111,249405	201,483534
21-abr-06	166,655201	234,3122795	309,818604	117,575515	134,3380059	111,331827	210,372678
14-abr-06	163,580795	228,6813349	297,021927	117,422266	133,5552238	111,286692	198,732728
7-abr-06	164,842002	231,1864958	298,717535	117,833317	133,669289	111,135589	191,752219
31-mar-06	163,89891	230,8387719	288,680524	118,64969	134,2634122	111,114138	189,482761
24-mar-06	164,264347	227,9649194	283,573258	119,473224	134,6061498	111,033418	184,819288
17-mar-06	163,731298	225,8469503	286,527661	119,020638	134,5452367	110,935227	183,980625
10-mar-06	160,924287	220,0963822	275,427668	118,990848	133,8073676	110,979802	177,847478
3-mar-06	160,423097	221,421296	287,183956	119,694648	134,7633245	110,822725	186,297314
24-feb-06	161,448399	222,1058426	287,566974	120,346887	134,8222111	110,830638	183,645549
17-feb-06	160,077877	218,7816532	284,771803	120,526203	134,193026	110,759087	180,123344
10-feb-06	158,413438	216,812805	281,998149	120,464617	133,6441008	110,707695	182,792331
3-feb-06	158,480369	217,4716943	280,623158	120,144369	138,6998256	110,597222	194,742192
27-ene-06	159,503127	218,3961662	284,853571	119,946434	138,4451027	110,429866	198,248712
20-ene-06	155,716965	211,2407451	275,527726	120,893714	138,2153739	110,114515	200,553078
13-ene-06	158,528559	212,8860219	276,243195	121,422781	137,6999956	110,080317	191,471389
6-ene-06	158,455487	210,8238041	271,773933	121,351169	137,5373402	110,000744	195,072804
30-dic-05	154,416979	204,3399956	257,714157	120,691483	136,5268974	109,972123	192,166013
23-dic-05	155,438499	205,0804876	256,487638	120,298764	136,0559062	109,862968	189,231417
16-dic-05	154,057741	202,9017798	251,337336	120,290457	135,4474721	109,773393	192,970782
9-dic-05	153,227878	203,2238013	249,126374	119,608714	134,9606266	109,922052	196,342251
2-dic-05	153,516423	202,8405003	247,387731	119,957606	134,8805627	109,900464	195,079124
25-nov-05	152,769756	199,8672967	243,020679	119,810659	134,6388774	109,656862	187,01867
18-nov-05	150,895954	197,3870933	239,561681	118,790622	133,7259733	109,692578	185,637221
11-nov-05	149,125586	196,3269826	235,459299	118,812678	133,3729665	109,59652	188,421747
4-nov-05	147,502209	194,3370398	232,014288	118,791481	132,759221	109,463083	193,888453
28-oct-05	143,295802	188,2465183	220,465647	119,312528	132,7189693	109,166049	199,776055
21-oct-05	141,403554	186,4712246	221,24029	120,288165	132,7833178	109,089518	199,0135

14-oct-05	143,260312	188,4396602	224,915542	119,845605	131,7656132	109,124289	204,391369
7-oct-05	144,338898	191,3040792	231,9691	120,499277	133,9358422	108,969422	204,837056
30-sep-05	147,985837	196,849737	240,456824	120,620157	134,8888067	108,906157	216,652561
23-sep-05	145,427947	193,2611939	232,907279	121,201644	134,4304636	108,636822	207,786438
16-sep-05	146,712924	195,2393028	232,614636	120,5474	134,8134452	108,603741	200,586623
9-sep-05	145,978986	194,8276536	230,09597	121,257215	134,7143452	108,324831	205,372593
2-sep-05	143,575529	191,9499733	226,494954	121,137194	134,4052819	108,128211	215,240902
26-ago-05	141,587856	188,3850152	219,353173	120,368371	133,411284	108,284627	202,944599
19-ago-05	143,256109	188,8512909	219,059454	120,004297	132,9155865	108,400143	200,008292
12-ago-05	144,073836	190,2432933	225,181288	119,286175	132,6831615	108,376157	204,996055
5-ago-05	142,3477	189,3166672	222,978934	118,681486	132,6920421	108,434489	193,909415
29-jul-05	143,08805	192,0526591	218,106212	119,454319	132,4035885	108,306132	188,125029
22-jul-05	142,35391	190,2329255	215,58109	119,453746	132,0644258	108,044985	182,587203
15-jul-05	141,769821	187,3031954	210,645966	118,985692	132,0907139	107,985792	185,434151
8-jul-05	140,186716	186,1793302	203,71506	119,75652	131,2417827	107,763105	187,63736
1-jul-05	138,79686	183,1314462	205,029802	119,935263	131,3147448	107,649603	183,477358
24-jun-05	137,829918	180,2413974	204,473565	119,965626	130,8670164	107,48399	186,149361
17-jun-05	139,367293	182,0877708	205,345039	118,812678	130,2112783	107,562865	185,527945
10-jun-05	137,231611	177,815512	200,176447	119,713553	129,6345772	107,308935	175,055733
3-jun-05	136,474817	175,6589985	199,960192	119,099984	129,8770079	107,170746	177,49918
27-may-05	135,907925	173,6420549	197,967637	118,204838	128,1391446	107,181482	168,484756
20-may-05	134,721282	171,5747092	195,595292	117,983128	126,4454914	107,169471	161,832742
13-may-05	131,761199	167,0502124	192,970112	118,121769	126,4620821	107,014308	164,313881
6-may-05	133,446141	169,3815871	197,607213	116,995173	127,0402099	107,013202	169,885891
29-abr-05	131,155559	166,1740603	190,526757	117,266725	126,4526709	106,806806	169,801636
22-abr-05	131,414545	168,992323	192,481656	116,683519	126,8955364	106,84792	181,77359
15-abr-05	131,423374	168,5446524	191,679039	116,333195	126,2153033	106,851375	173,051448
8-abr-05	135,513846	175,0004769	198,406602	115,71848	126,8866049	107,025509	179,181899
1-abr-05	134,371738	173,9619187	198,452865	115,561221	126,3071463	106,928174	190,594918
25-mar-05	134,096274	173,805774	195,582381	114,873462	125,8663452	106,918207	182,354647
18-mar-05	135,486877	175,9151538	201,110322	114,842526	127,9830805	106,834649	187,305385
11-mar-05	136,153479	176,4486579	208,468358	114,435771	129,3411645	106,856327	181,735812
4-mar-05	138,002856	178,477035	208,480193	114,892941	130,0661249	106,773493	178,124626
25-feb-05	136,387418	175,5544335	207,121339	114,710474	129,7113986	106,722084	172,106263
18-feb-05	135,890612	174,4796033	201,673014	114,954527	129,5547037	106,595738	163,096478
11-feb-05	135,866009	174,7915106	197,071418	116,208877	129,5458622	106,346871	160,441465
4-feb-05	134,650266	174,0219264	195,439287	115,960528	134,4108708	106,207235	157,961602
28-ene-05	131,326947	168,7469419	190,409485	115,389639	133,3102603	106,067894	161,159168
21-ene-05	130,75252	167,5226662	186,748219	115,134702	132,7250897	105,898882	163,519839
14-ene-05	131,810594	167,7327698	187,472296	115,194855	132,5333014	105,792059	162,713388
7-ene-05	132,061002	166,3845629	184,169303	114,799272	132,5397572	105,813533	156,182625
31-dic-04	133,233096	170,5335165	192,325651	114,16021	133,142249	105,64626	153,055484
24-dic-04	132,93761	169,4840147	188,511609	114,708755	133,0102785	105,509806	156,793342
17-dic-04	130,746748	167,1385544	184,704022	114,576417	132,5924077	105,403483	163,778344
10-dic-04	129,774963	164,8902454	178,616616	114,48991	131,8068562	105,212645	149,742147
3-dic-04	130,458342	166,8574656	184,543714	113,546641	131,0858086	105,288623	153,458376
26-nov-04	129,664763	164,6275643	181,284832	113,509116	131,1037037	105,203972	173,425753
19-nov-04	129,024618	161,5797602	179,18146	112,859168	130,9105121	105,108485	170,830931
12-nov-04	129,885035	162,1856366	176,321735	112,891537	130,2612732	105,015136	166,386445
5-nov-04	128,275158	159,1862487	173,682568	111,97548	129,8600219	104,835427	171,68554
29-oct-04	124,798058	154,6713982	167,963118	112,056545	128,9319681	104,411716	178,68359
22-oct-04	122,670564	152,3430192	165,769371	112,099225	128,2559947	104,215168	186,571736
15-oct-04	123,527841	152,6073013	165,129215	111,801034	128,1550687	104,148877	181,516824

8-oct-04	125,331127	154,7176522	170,430142	111,385973	128,1303163	104,352542	180,389938
1-oct-04	125,046936	154,808397	166,437501	110,850031	126,8824522	104,187647	172,371553
24-sep-04	122,856649	151,0553646	163,01616	111,029346	126,9877488	103,869293	167,435311
17-sep-04	124,373416	152,3987497	162,773008	110,569599	126,7995651	103,708792	159,416577
10-sep-04	123,524511	151,6859607	159,084845	110,389138	125,6059634	103,696885	152,619423
3-sep-04	122,828439	149,5628425	156,087406	109,689062	124,8252796	103,756314	154,680245
27-ago-04	122,012631	148,4380844	154,507994	110,126753	124,5274745	103,698608	153,884318
20-ago-04	120,020335	146,7197014	152,332537	110,113003	123,9225064	103,760584	164,032239
13-ago-04	117,305883	142,0294688	148,586276	110,070036	123,1157587	103,612743	162,363872
6-ago-04	117,784557	142,8817817	148,354959	109,941135	122,4106718	103,617812	157,097338
30-jul-04	121,225735	147,2825444	148,919803	108,901333	121,3559286	103,825686	158,503981
23-jul-04	119,450112	145,9544911	148,214017	108,614027	121,4362297	103,752922	155,239151
16-jul-04	120,707093	148,3365836	150,604652	108,887584	121,6380888	103,72164	154,447834
9-jul-04	121,843197	149,2014213	150,771416	108,563613	119,9579722	103,659722	153,679915
2-jul-04	122,908438	152,0750111	150,976911	108,414087	119,8406895	103,580414	150,631926
25-jun-04	123,806488	151,6190278	151,273858	107,914238	118,5582888	103,592356	149,829243
18-jun-04	123,516159	148,4413984	146,305382	107,685367	118,0408448	103,516631	152,029871
11-jun-04	123,269239	148,2162029	146,951994	107,103021	117,4061927	103,452014	149,954785
4-jun-04	121,777283	146,4400538	147,955802	107,215308	117,126804	103,343357	150,886749
28-may-04	121,411756	146,1454767	152,046349	107,554461	117,0387274	103,32261	154,354475
21-may-04	119,174319	142,0407954	146,816431	107,326163	115,6281951	103,072471	153,696412
14-may-04	118,881798	140,674048	143,108902	107,213875	115,4741054	102,955904	156,440753
7-may-04	120,372677	143,5102705	151,525617	107,24653	115,6537923	103,122221	155,029934
30-abr-04	121,451214	147,106338	154,128203	107,888458	118,958856	103,036942	147,528501
23-abr-04	124,630974	152,5448006	166,904439	107,851792	120,3380119	103,036143	143,273546
16-abr-04	123,778029	151,2890749	168,226712	108,166884	120,5543582	102,972102	145,942649
9-abr-04	124,007455	152,9086854	172,126826	108,364532	121,6087477	103,012667	146,761162
2-abr-04	124,013045	153,7053077	169,708218	108,14626	121,3869482	102,985447	140,458809
26-mar-04	120,513007	148,1239378	162,360941	109,357357	121,48318	102,635144	141,485059
19-mar-04	120,551703	147,2983096	165,812407	109,163719	121,8637134	102,551229	145,644336
12-mar-04	121,286953	148,7564258	162,22753	109,025365	121,4658117	102,414204	139,555549
5-mar-04	124,786173	152,2378848	169,555441	108,405208	121,4735729	102,568086	141,599235
27-feb-04	122,793359	149,1105634	165,801648	108,025666	120,4645125	102,507925	140,740567
20-feb-04	122,40632	147,8846269	164,980742	107,406941	120,0789389	102,516958	134,431081
13-feb-04	121,654017	147,4226203	166,505283	107,571647	120,8247613	102,528111	135,046843
6-feb-04	120,812455	145,9466185	159,534568	107,207574	119,9144175	102,479427	129,346161
30-ene-04	120,365855	145,0402675	158,531836	106,597442	123,9700989	102,39239	131,018471
23-ene-04	121,974233	147,2893155	162,218923	107,38202	125,6335327	102,392292	137,274609
16-ene-04	121,412651	145,5611554	159,051492	106,88704	125,3168434	102,267284	135,216947
9-ene-04	119,761435	142,7220234	162,031717	107,011931	125,1550888	102,299618	138,775481
2-ene-04	118,84406	139,9837152	155,971209	105,873305	122,490089	102,196057	131,070515
26-dic-03	116,927226	137,8864747	149,90317	106,245113	122,1880403	102,043965	130,940392
19-dic-03	116,253172	136,3188674	147,956878	105,910256	122,2098253	101,988416	134,340013
12-dic-03	114,711601	136,3102493	147,436146	105,64959	121,4550005	101,910695	134,085567
5-dic-03	114,209156	135,4456615	145,056269	105,261168	121,0244516	101,837794	127,222076
28-nov-03	113,177508	135,0709626	142,839929	104,508099	119,4986894	101,721394	122,836041
21-nov-03	110,943114	131,3043893	139,370172	105,226508	119,4094017	101,574346	124,583503
14-nov-03	113,076918	133,5749788	144,167581	104,901104	119,0830657	101,582996	127,347501
7-nov-03	113,688173	135,4914995	143,729693	104,118532	118,2676894	101,43697	122,812876
31-oct-03	112,517132	132,7708144	141,122802	104,834362	117,9734315	101,398751	119,77112
24-oct-03	110,050869	128,5930816	138,180234	104,915999	117,4727053	101,343084	121,77813
17-oct-03	112,313346	131,8047797	141,226088	104,720929	117,6478435	101,28534	122,197694
10-oct-03	111,487742	130,4989295	140,564414	105,331347	117,5560406	101,200875	126,795409

3-oct-03	110,550605	128,5322816	134,466249	105,23281	116,4176657	101,099343	119,770106
26-sep-03	107,265953	123,3194958	129,715103	106,049756	116,2135567	100,944089	114,261331
19-sep-03	111,501777	128,9558406	131,829234	105,369158	116,1141417	100,870149	111,462337
12-sep-03	109,784507	126,6547759	132,142319	105,306713	115,3283834	100,772461	115,504307
5-sep-03	110,422046	126,7867765	132,328449	104,397531	114,4582681	100,61121	116,736584
29-ago-03	108,542864	123,889388	129,116907	104,810587	112,8322627	100,546329	122,193693
22-ago-03	108,172573	122,5616894	128,152906	104,816602	112,0739626	100,432802	123,911204
15-ago-03	107,099846	119,3106219	124,390506	104,674525	110,250298	100,373943	119,955953
8-ago-03	104,670283	115,6560572	120,039593	105,685396	110,6537343	100,286624	122,139011
1-ago-03	105,055494	117,4368908	121,233835	104,498933	110,1626754	100,248917	121,759082
25-jul-03	105,705497	116,4077852	120,241861	105,667922	112,7432942	100,320569	116,248219
18-jul-03	105,146439	115,8520514	118,130958	105,425302	112,94406	100,052224	118,280512
11-jul-03	105,41641	116,2175352	118,731306	106,195844	112,568448	100,028996	118,922281
4-jul-03	104,024081	113,8225029	118,153552	106,081838	112,647035	100,034804	116,706518
27-jun-03	103,341022	112,2192613	114,199643	106,063505	112,9494078	100	114,57127
20-jun-03	105,026126	112,5556825	115,088331	106,857249	113,0843533		116,41064
13-jun-03	103,855679	112,4389616	112,940847	108,18092	112,3372495		115,2928
6-jun-03	103,539551	112,4892164	110,953672	106,855244	111,6539329		120,099731
30-may-03	100,543686	108,7926854	107,821746	106,422996	110,9664087		116,31099
23-may-03	97,8662764	105,1424014	104,908226	106,89105	110,7097233		115,747272
16-may-03	98,9360304	104,9180375	103,482667	105,886481	109,8670853		115,784905
9-may-03	97,616738	103,7503392	103,227681	105,07154	109,6822193		111,906313
2-may-03	97,1779114	102,0262949	101,178103	104,229387	108,5142808		105,306662
25-abr-03	94,4347901	98,49234478	97,3554537	104,085877	106,4643096		107,814359
18-abr-03	94,4592668	97,41535329	101,226519	103,799144	105,1153792		112,56513
11-abr-03	92,0861863	95,12091725	96,8207346	103,355151	103,7079353		108,668765
4-abr-03	92,5088747	94,29386391	95,4747918	103,429341	103,6301266		107,830218
28-mar-03	90,8509435	93,08538654	94,1159383	103,504963	101,7096505		111,465352
21-mar-03	93,9427792	94,44700198	95,6759839	102,675413	100,8830487		106,373126
14-mar-03	87,8872849	89,84071561	93,2519958	103,980178	101,016231		120,76168
7-mar-03	86,8217078	90,26078197	92,8388527	105,065811	100,8725402		131,98975
28-feb-03	89,5136935	91,93142379	95,1262023	104,447086	99,91179001		132,113726
21-feb-03	90,8552888	93,02709035	96,9121856	104,241131	99,14066729		125,960718
14-feb-03	90,0027596	92,19513589	94,3203581	103,971012	98,29635395		123,831791
7-feb-03	89,1940368	92,51440296	95,9180599	103,772218	98,24892583		123,736489
31-ene-03	91,1656878	94,06787299	97,8761862	103,349136	104,4872234		117,829664
24-ene-03	92,1882494	95,99612392	99,010178	103,555091	104,0588199		115,599086
17-ene-03	96,3145515	98,13905515	101,72143	102,699474	104,5783962		114,421026
10-ene-03	98,4470381	99,00301703	102,014073	102,195328	104,2956329		110,095414
3-ene-03	97,6017508	98,63920486	101,021023	101,562854	102,8087619		113,51162
27-dic-02	93,9822691	96,85506419	99,9537366	102,030908	102,4095993		112,049917
20-dic-02	95,5345204	97,11353481	101,593398	101,61069	102,2441902		108,486832
13-dic-02	95,2429623	97,61696172	100,44542	101,330832	101,5535303		105,178366
6-dic-02	97,8625801	99,56322339	100,671358	100,678592	101,1087615		99,5158102
29-nov-02	100,99905	101,8562336	101,692381	100,141505	100,5849018		99,6115464
22-nov-02	100	100	100	100	100		100

4.10. Referencias

- Alexander, S., T.F. Coleman y Y. Li, 2006. *Minimizing CVaR and VaR for a Portfolio of Derivatives*. *Journal of Banking & Finance*, 30, 538-605.
- Anderson, E.J. y P. Nash, 1987. *Linear programming in infinite-dimensional spaces*. John Wiley & Sons, New York.
- Artzner, P., F. Delbaen, J.M. Eber y D. Heath, 1999. *Coherent Measures of Risk*. *Mathematical Finance*, 9, 203-228.
- Balbás, A. y A. Heras, 1993. *Duality Theory for Infinite-Dimensional Multiobjective Linear Programming*. *European Journal of Operational Research*, 68, 379-388.
- Balbás, A. y R. Romera, 2007. *Hedging Bond Portfolios by Optimization in Banach Spaces*. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 132, 1, 175-191.
- Barber, J.R. y M.L. Copper, 1998. *A Minimax Risk Strategy for Portfolio Immunization*. *Insurance: Mathematics and Economics*, 23, 173-177.
- Benati, S., 2003. *The Optimal Portfolio Problem with Coherent Risk Measure Constraints*. *European Journal of Operational Research*, 150, 572-584.
- Cochrane, J.H., 2001. *Asset pricing*. Princeton University Press.
- Föllmer, H. y A. Schied, 2002. *Convex Measures of Risk and Trading Constraints*. *Finance & Stochastics*, 6, 429-447.
- Holmes, R.B., 1975. *Geometrical functional analysis and its applications*. Graduate Texts in Mathematics, No 24, Springer-Verlag, New York-Heidelberg.
- Konno, H., K. Akishino y R. Yamamoto, 2005. *Optimization of a Long-Short Portfolio Under Non-convex Transaction Costs*. *Computational Optimization and Applications*, 32, 115-132.
- Nakano, Y., 2004. *Efficient Hedging with Coherent Risk Measures*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 293, 345-354.
- Ogryczak, W. y A. Ruszczyński, 1999. *From Stochastic Dominance to Mean Risk Models: Semideviations and Risk Measures*. *European Journal of Operational Research*, 116, 33-50.
- Rockafellar, R.T., S. Uryasev y M. Zabarankin, 2006a. *Generalized Deviations in Risk Analysis*. *Finance & Stochastics*, 10, 51-74.
- Rockafellar, R.T., S. Uryasev y M. Zabarankin, 2006b. *Optimality Conditions in Portfolio Analysis with General Deviations Measures*. *Mathematical Programming, Ser. B*, 108, 515-540.

- Ruszczyński, A. y A. Shapiro, 2007. *Optimization of Risk Measures*. *Mathematics of Operations Research*, forthcoming.
- Shimizu, K. y E. Aiyoshi, 1980. *Necessary Conditions for Min – Max Problems and Algorithms by a Relaxation Procedure*. *Transactions on Automatic Control*, 25, 62-67.
- Wang, S.S., 2000. *A Class of Distortion Operators for Pricing Financial and Insurance Risks*. *Journal of Risk and Insurance*, 67, 15-36.
- Whirch, J.L. y M.R. Hardy, 2001. *Distortion Risk Measures. Coherence and Stochastic Dominance*. Unpublished Working Paper (<http://www.gloriamundi.org>).
- Young, M.R., 1998. *A Minimax Portfolio Selection Rule with Linear Programming Solution*. *Management Science*, 43, 673-683.
- Zalinescu, C., 2002. *Convex analysis in general vector spaces*. World Scientific Publishing Co.

5. Modelos Tipo APT y CAPM con Medidas Generales de Riesgo

Contenido

- Introducción
- Distorsión de las Probabilidades e Índices y Factores Generalizados
- Índices con Colas Ligeras
- Estrategias de Cola Ligera
- Comparación de Índices
- Conclusiones
- Referencias

5.1. Introducción

Las colas gruesas y las asimetrías están favoreciendo el uso de funciones de riesgo más complejas que la clásica desviación estándar, ya que esta última no es compatible con la Dominancia Estocástica de Segundo Orden (Ogryczak y Ruszczyński, 2002) y no provee a los responsables, reguladores y supervisores con requerimientos de capital adecuados (Artzner *et al.*, 1999). Por ejemplo, recientemente se han abordado problemas de selección de carteras (Benati, 2003, Konno *et al.*, 2005, etc.) o temas de valoración más generales (Rockafellar y Uryasev, 2002, Nakano, 2004, Alexander *et al.*, 2006, etc.) utilizando funciones de riesgo tales como el *Worst Conditional Expectation*, la *Absolute Deviation*, el *Conditional Value at Risk*, etc. En el capítulo anterior se ha propuesto un método general para la optimización de una gran variedad de funciones de riesgo.

Si tomamos como medida de riesgo la desviación típica, entonces las “estrategias eficientes” son combinaciones del activo sin riesgo y la cartera de mercado. Además, la cartera de mercado es un *benchmark* o un índice del mercado que nos permite explicar el comportamiento de cualquier activo disponible, por medio de la conocida fórmula del *CAPM*. De ese modo, podemos separar el riesgo global en una combinación del sistemático y el idiosincrático, y el retorno esperado también se justifica. En particular, es bien sabido que el mercado nunca paga el riesgo idiosincrático.

Si los problemas de cobertura o selección de cartera se estudian a través de medidas de riesgo más generales que la desviación estándar, entonces los *benchmarks* o carteras óptimas obtenidas no nos permiten explicar el comportamiento de los activos disponibles en el mercado por medio de fórmulas tipo *CAPM*, ya que estas últimas no se cumplen. En este capítulo intentamos resolver este problema. Por ello, nos centraremos en la posibilidad de construir

nuevos *benchmarks* que minimicen los niveles de riesgo y nos permitan explicar, tanto los retornos reales y esperados, como el riesgo idiosincrático.

A continuación se presenta el contenido de este capítulo: La sección 2 se centrará en aquellos *benchmarks* que hagan posible la utilización de expresiones tipo *CAPM* y *APT*. Esto es posible construyendo nuevas “Carteras de Mercado” o referencias que aparezcan si distorsionamos el espacio de probabilidad inicial que soporta el comportamiento estocástico de los activos disponibles.¹⁰ El Teorema 3 es un resultado importante de esta sección, ya que nos proporciona las expresiones deseadas. El Lema 6 y el Teorema 7 son también resultados significativos ya que nos llevan a caracterizaciones prácticas de aquellos *benchmarks* para los que se verifica el Teorema 3.

La sección 3 considera una medida de riesgo bastante general y proporciona un método para generar el *benchmark* asociado o índice con colas ligeras. Por tanto, la mayor contribución, con respecto a los resultados de la sección 2 es la utilización de una medida de riesgo para seleccionar el *benchmark*. Se ha demostrado que diversificar utilizando este nuevo índice es mucho mejor (en términos del par dual rentabilidad-riesgo) que si usamos la clásica cartera que surge de optimizar la Ratio de *Sharpe*. Finalmente, el apartado termina definiendo los riesgos sistemático e idiosincrático de cada cartera, y mostrando que no se paga nada por el último.

La sección 4 introduce la estrategia de cola ligera, que es la estrategia que nos permite minimizar la medida de riesgo seleccionada. Como ya dijimos antes, los niveles de riesgo pueden ser reducidos si diversificamos utilizando esta estrategia de cola ligera, pero a cambio perdemos las propiedades clásicas del *CAPM* y del *APT*. Por tanto, El índice de colas ligeras de la sección 3 y la estrategia de cola ligera de la sección 4 son comparados en la sección 5, y el Teorema 11 caracteriza aquellos casos que hacen coincidir ambos *benchmarks*. La sección 6 resume y concluye este capítulo.

5.2. Distorsión de las Probabilidades e Índices y Factores Generalizados

A lo largo de esta sección consideraremos el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ y $n + 1$ variables aleatorias $R_0, R_1, \dots, R_n \in L^2(\mu)$ que generan el subespacio de pagos alcanzables de un mercado financiero determinado.¹¹ Asumamos que R_0 es constante, y por tanto, refleja la riqueza final proporcionada por una cartera sin riesgo. Sin pérdida de generalidad se puede aceptar que los precios actuales

¹⁰El uso de probabilidades distorsionadas juega un papel crucial en Finanzas. Por ejemplo, es la clave para establecer el “Teoremas Fundamental de Valoración de Activos” y caracteriza aquellos mercados que están libres de arbitraje (para versiones recientes de este teorema véase, por ejemplo, Jacod y Shiryaev, 1998, o Schachermayer, 2004, entre otros).

¹¹Un pago alcanzable es una variable aleatoria que reproduce el precio final de una cartera autofinanciada cualquiera.

de los pagos anteriores son iguales a 1, de modo que R_0, R_1, \dots, R_n pueden ser, también, interpretados como retornos finales.

Supondremos que no existen oportunidades de arbitraje y, por lo tanto, la Ley de Precio Único (*LPU*) se cumple y existe un único Factor Estocástico de Descuento (*FDE*) del modelo (Chamberlain y Rothschild, 1983, Hansen y Jagannathan, 1997, He y Modest, 1995, o Cochrane, 2001).

Consideremos la variable aleatoria $g \in L^\infty(\mu)$ y $0 < \delta < 1$, tal que $\mu(g \geq \delta) = 1$. La medida σ -aditiva dada por

$$d\mu_g = g d\mu$$

y μ son equivalentes. Supondremos que se cumplen las siguientes restricciones

$$\int_{\Omega} (g - 1) R_j d\mu = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (50)$$

Entonces, tomando $j = 0$ tenemos que $\mu_g(\Omega) = 1$ y μ_g es una medida de probabilidad. Además, (50) implica claramente que cada pago alcanzable tiene idénticas esperanzas matemáticas con respecto a μ y μ_g .

Para algunos problemas también podemos considerar variables aleatorias g tales que

$$\int_{\Omega} (g - 1) R_i R_j d\mu = 0, \quad i, j = 0, 1, \dots, n, \quad (51)$$

para garantizar que la covarianza de dos pagos alcanzables tampoco dependa de g .

Proposición 1. Consideremos que g satisface la Condición (50). Si μ_g sustituye a μ en el mercado financiero anterior, entonces la *LPU* también se cumple.

Demostración. En efecto, supongamos que

$$\mu_g \left(\sum_{j=0}^n \alpha_j R_j = 0 \right) = 1.$$

Entonces, como μ y μ_g son equivalentes, se cumple la misma igualdad si μ reemplaza a μ_g . En consecuencia,

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j = 0$$

y el resultado se deduce trivialmente. \square

Como consecuencia, existe un único FDE asociado a g (es decir, si μ_g reemplaza a μ), o un único pago alcanzable $\sum_{j=0}^n \alpha_j R_j$ tal que ¹²

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{j=0}^n \alpha_j R_j \right) R_i g d\mu = 1$$

$i = 0, 1, \dots, n$. En otras palabras, existe $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j \int_{\Omega} R_i R_j g d\mu = 1, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (52)$$

Más aún, si $\alpha_0^*, \alpha_1^*, \dots, \alpha_n^* \in \mathbb{R}$ también satisface la ecuación anterior, entonces

$$\mu \left(\sum_{j=0}^n \alpha_j R_j = \sum_{j=0}^n \alpha_j^* R_j \right) = 1. \quad (53)$$

El mercado se denomina neutral al riesgo si el $g - FDE$ es constante (tiene varianza cero). En dicho caso, es fácil comprobar que su valor constante es igual al factor de descuento, es decir, $1/R_0$.

Proposición 2. Supongamos que el modelo inicial ($\mu(g = 1) = 1$) no es neutral al riesgo. Entonces el modelo generado por g tampoco es neutral al riesgo.

Demostración: En efecto, si

$$1 = \frac{1}{R_0} \int_{\Omega} R_j g d\mu,$$

$j = 0, 1, 2, \dots, n$, entonces (50) conduciría a

$$1 = \frac{1}{R_0} \int_{\Omega} R_j d\mu,$$

$j = 0, 1, 2, \dots, n$, y el mercado inicial sería también neutral al riesgo. \square

De ahora en adelante, aceptaremos el siguiente supuesto:

Supuesto 1. El mercado no es neutral al riesgo. \square

Es sabido que la Cartera de Mercado ($g - CM$), denotada por R^g , se obtiene vendiendo $\theta > 0$ unidades del $g - FDE$ anterior e invirtiendo el dinero, junto con un euro más, en el activo sin riesgo. De esta manera, la $g - CM$ es dada por

¹²De ahora en adelante, simplemente diremos que $g - FDE$, y g será omitido si $\mu(g = 1) = 1$. Similares notaciones serán usadas en situaciones parecidas.

$$R^g = \left(1 + \sum_{j=0}^n \theta \alpha_j\right) R_0 - \sum_{j=0}^n \theta \alpha_j R_j = R_0 + \sum_{j=1}^n \theta \alpha_j (R_0 - R_j). \quad (54)$$

Nótese que (53) implica que R^g permanece igual (fuera de conjuntos nulos) si α^* reemplaza a α .

Existe posibilidad de elegir el θ anterior entre varios valores. Para eliminar la ambigüedad supongamos dada la referencia o cartera de mercado inicial, (para $\mu(g=1) = 1$), denotada por R^M . Entonces, para cualquier g factible ajustaremos el coeficiente θ de (54) para asegurar que la prima de riesgo esperada de la “nueva” $g-CM$ no dependerá de g . Obviamente, la esperanza de $R^g - R_0$ está dada por

$$E(R^g - R_0) = \theta \sum_{j=1}^n \alpha_j E(R_0 - R_j),$$

donde tomaremos

$$\theta = \frac{E(R^M - R_0)}{\sum_{j=1}^n \alpha_j E(R_0 - R_j)}. \quad (55)$$

de donde $\sum_{j=1}^n \alpha_j E(R_0 - R_j) > 0$ ya que de otra manera $E(R^g - R_0)$ podría no ser positiva, como debe ocurrir en un contexto neutral al riesgo (Chamberlain and Rothschild, 1983, Luttmer, 1996, or Cochrane, 2001). Por tanto, tomaremos

$$\theta = \frac{E(R^* - R_0)}{\sum_{j=1}^n \alpha_j E(R_0 - R_j)}, \quad (56)$$

y θ es también positiva. \square

Teorema 3. Sean F_1, F_2, \dots, F_k pagos alcanzables sin varianza cero, con precio igual a uno y tales que $F_i - R_0$ y $F_j - R_0$ tengan g -covarianza nula si $i \neq j$. Supongamos que $R^g - R_0$ se puede poner como una combinación lineal de $F_1 - R_0, F_2 - R_0, \dots, F_k - R_0$. Si R es un pago alcanzable de precio uno y β_h , $h = 1, 2, \dots, k$ es el coeficiente de g -regresión de $R - R_0$ con respecto a $F_h - R_0$, entonces, existe un pago alcanzable ε con precio y valor esperado nulos y con g -covarianza nula con cada $F_h - R_0$ tal que

$$R - R_0 = \sum_{h=1}^k \beta_h (F_h - R_0) + \varepsilon. \quad (57)$$

Demostración. Se obtiene fácilmente del Teorema Fundamental del Modelo *APT* si es aplicado a nuestro mercado financiero una vez que μ_g a reemplazado a μ . \square

Un caso particular muy importante del resultado anterior se presenta si $k = 1$ y $F_1 = R^g$. Entonces, obtenemos la fórmula tipo-*CAPM*

$$R - R_0 = \beta (R^g - R_0) + \varepsilon. \quad (58)$$

Nótese que en ambos casos las betas son “ g -betas” salvo que hayamos impuesto (51). Sin embargo, para la versión tipo-*CAPM* se tiene:

Proposición 4. Si R es un pago alcanzable de precio unitario, entonces su g -beta no depende de g .

Demostración. La expresión (58) nos da

$$E(R - R_0) = \beta E(R^g - R_0) \quad (59)$$

y trivialmente se obtiene la conclusión, ya que la prima de riesgo esperada $E(R^g - R_0)$ no depende de g . \square

La Teoría de Selección de Carteras nos recomienda diversificar la inversión total, es decir, en lugar de comprar la cartera anterior R se debería diversificar entre el activo libre de riesgo y las estrategias F_h del Teorema 3 de acuerdo a los pesos

$$\left(1 - \sum_{h=1}^k \beta_h, \beta_1, \dots, \beta_k \right). \quad (60)$$

Esta estrategia alternativa da la prima de riesgo del del miembro de la derecha de (57) con $\varepsilon = 0$. En consecuencia, su prima de riesgo esperada es igual a la obtenida para R , dada por

$$E(R - R_0) = \sum_{h=1}^k \beta_h E(F_h - R_0), \quad (61)$$

pero para una g -varianza inferior. Se suele decir que estamos eliminando el riesgo idiosincrático. La estrategia (60) se llamará “estrategia eficiente para R , g y F_1, F_2, \dots, F_k ”. Los “factores” F_1, F_2, \dots, F_k serán omitidos si estamos tratando con la versión tipo-*CAPM*.

A continuación nos centraremos en una importante cuestión con consecuencias significativas en futuras secciones. Caracterizaremos aquellas estrategias que sean $g - CM$ para algún factible g .

Lema 5. Suponga que $0 < \delta < 1$ y considere $g, h \in L^\infty(\mu)$ que satisfacen (50) y tales que $\mu(g \geq \delta) = \mu(h \geq \delta) = 1$. Entonces la g -covarianza de $R^g - R^h$ y R^g se anula.

Demostración. Claramente la h -beta de R^h es igual a uno, y lo mismo pasa con su g -beta (Proposición 4). De la expresión (58) se obtiene

$$R^h - R_0 = (R^g - R_0) + \varepsilon,$$

donde el valor esperado de ε y su g -covarianza con R^g se anulan. De ese modo, se la conclusión es consecuencia trivial de $R^g - R^h = -\varepsilon$. \square

Lema 6. Sea R sea un pago alcanzable con valor unitario, $0 < \delta < 1$ y $g \in L^\infty(\mu)$ con $\mu(g \geq \delta) = 1$ y que satisface (50). Entonces, $R = R^g$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

a) $R^M - R$ tiene esperanza cero.

b) La g -covarianza de R y $R^M - R$ se anula.

c) Para cada pago alcanzable con valor unitario ε con esperanza cero y covarianza cero con R^M se obtiene que ε tiene g -covarianza cero con R .

Demostración. En primer lugar, probemos que las condiciones dadas son suficientes. Como la g -beta de R^g es igual a uno, lo mismo pasa para beta. Por tanto, (58) da

$$R^g - R_0 = (R^M - R_0) + \varepsilon,$$

donde ε satisface la Condición c) anterior y, en consecuencia, su g -covarianza con R se anula. La última expresión conduce a

$$R^g = R + (R^M - R + \varepsilon) = R + \varepsilon^* \quad (62)$$

donde ε^* tiene esperanza cero debido a a) y g -covarianza cero con R debido a b). De este modo la g -varianza de R^g es mayor que la g -varianza de R salvo que ε^* se anule. Como los valores esperados de R y R^g son idénticos, por a), la g -CM R^g no sería eficiente una vez que μ_g hubiera reemplazado a μ salvo que ε^* se anule. Como R^g tiene que ser eficiente (Cochrane, 2001) tenemos que la Expresión (62) da $R^g = R$.

Recíprocamente, probemos que las condiciones dadas son necesarias. Si $R = R^g$ entonces la Condición a) es trivial y la Condition b) sigue del lema previo. Supongamos que ε tiene esperanza cero con R^M . Se obtiene que la beta de $\varepsilon + R^M$ se iguala a uno y lo mismo pasa con su g -beta. De ese modo la Expression (58) conduce a

$$R^M + \varepsilon = R^g + \varepsilon^*, \quad (63)$$

donde ε^* tiene precio cero, esperanza cero y g -covarianza con R^g cero. Entonces $\varepsilon = R^g - R^M + \varepsilon^*$ tiene g -covarianza cero con R^g por b). \square

Teorema 7. Sea R un pago alcanzable de pago unitario, $0 < \delta < 1$ y $g \in L^\infty(\mu)$ con $\mu(g \geq \delta) = 1$ y que satisface(50). Entonces, $R = R^g$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

- a) $R^* - R$ tiene esperanza cero.
- b) La g -covarianza de R y $R^* - R$ se anula.
- c) Existe $\phi_0, \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_{\Omega} R_j R g d\mu = \phi_0 + \phi_1 E(R_j) + \phi_2 \int_{\Omega} R_j R^* d\mu = \int_{\Omega} (\phi_0 + \phi_1 R_j + \phi_2 R_j R^*) d\mu, \quad (64)$$

$j = 0, 1, \dots, n$.

Demostración. Probemos que las tres condiciones implican la condición c) del Lema 6. En efecto, supongamos que el pago alcanzable $\varepsilon = \sum_{j=0}^n \lambda_j R_j$ tiene precio nulo, esperanza cero y covarianza con R^* cero. Entonces,

$$\sum_{j=0}^n \lambda_j = 0,$$

$$\sum_{j=0}^n \lambda_j E(R_j) = 0$$

y

$$\sum_{j=0}^n \lambda_j \int_{\Omega} R_j R^* d\mu = 0.$$

La expresión (64) implica que

$$\sum_{j=0}^n \lambda_j \int_{\Omega} R_j R g d\mu = \phi_0 \sum_{j=0}^n \lambda_j + \phi_1 \sum_{j=0}^n \lambda_j E(R_j) + \phi_2 \sum_{j=0}^n \lambda_j \int_{\Omega} R_j R^* d\mu = 0,$$

y la g -covarianza de ε y R se anula.

Recíprocamente, asumamos que las Condiciones a), b) y c) del Lema 6 se verifican y probemos el cumplimiento de la Condición c) del Teorema 7. En realidad, debemos probar que $(\int_{\Omega} R_j R g d\mu)_{j=0}^n \in \mathbb{R}^{n+1}$ es una combinación lineal $(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $(E(R_j))_{j=0}^n \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $(\int_{\Omega} R_j R^* d\mu)_{j=0}^n \in \mathbb{R}^{n+1}$. Lemas habituales del álgebra lineal muestran que es suficiente ver la implicación

$$\left. \begin{array}{l} (1, 1, \dots, 1) (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \\ (E(R_j))_{j=0}^n (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \\ (\int_{\Omega} R_j R^* d\mu)_{j=0}^n (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \end{array} \right\} \implies \left(\int_{\Omega} R_j R g d\mu \right)_{j=0}^n (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0.$$

Las condiciones del miembro de la izquierda significan que el pago alcanzable $\varepsilon = \sum_{j=0}^n \lambda_j R_j$ tiene precio cero, esperanza cero y covarianza cero con R^* , de modo que g -covarianza de ε y R debe anularse y el miembro de la derecha de la ecuación también debe cumplirse. \square

Observación 2. El Teorema 7 proporciona una herramienta muy útil ya que conduce al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (R - R^*) d\mu & = 0 \\ \int_{\Omega} R(R - R^*) g d\mu & = 0 \\ \int_{\Omega} (g - 1) R_j d\mu & = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n \\ \int_{\Omega} R_j R g d\mu - \phi_0 - \phi_1 E(R_j) - \phi_2 \int_{\Omega} R_j R^* d\mu & = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n \\ g \geq \delta \\ \delta > 0 \end{cases} \quad (65)$$

donde $(g, \delta, R, \phi) \in L^\infty(\mu) \times \mathbb{R} \times L^2(\mu) \times \mathbb{R}^3$ es la incógnita. Obviamente, el sistema se simplifica mucho y se hace lineal si R es conocido. \square

5.3. Índices con Colas Ligeras

Supongamos que

$$\rho : L^2(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}$$

es una función de riesgo.¹³ No impondremos que ρ sea coherente en el sentido de Artzner *et al.* (1999) o acodada por la media en el sentido de Rockafellar *et al.* (2006a). La función ρ no tiene que ser ni coherente en el sentido de Artzner *et al.* (1999), ni consistente en el sentido de Goovaerts *et al.* (2004), ni acotada por la media en el sentido de Rockafellar *et al.* . Los únicos requerimientos que impondremos son:

P1. $\rho(\lambda F) = \lambda \rho(F)$ si $\lambda > 0$ y $F \in L^p(\mu)$ (homogeneidad).

P2. Existe $H \geq 0$ tal que $\rho(F + \lambda) = \rho(F) - H\lambda$ si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $F \in L^p(\mu)$ (invariante por traslaciones).¹⁴

P.3. Existe $H \geq 0$ tal que $\rho(F + \lambda) = \rho(F) - H\lambda$ si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $F \in L^2(\mu)$ (invariante por traslaciones).¹⁵

¹³es decir, ρ podría ser la Desviación Estándar, la Desviación Absoluta, el Valor en Riesgo (VaR), y el CVaR (Rockafellar y Uryasev, 2006a), el *Worst Conditional Expectation* (Artzner *et al.* 1999), el *Tail Conditional Expectation* (Artzner *et al.* 1999), la Medida de Wang (Wang, 2000), etc.

¹⁴Si $H = 1$ obtenemos la definición de invariante por traslaciones de Artzner *et al.* (1999). Sin embargo, usando una H general alargamos la colección de funciones de riesgo factibles. Por ejemplo, la Desviación estándar, o las medidas generales de desviación de Rockafellar *et al.* (2006), satisfacen P2 con $H = 0$.

¹⁵Si $H = 1$ obtenemos la definición de invariante por traslaciones de Artzner *et al.* (1999). No obstante, usando una H general extendemos el conjunto de funciones de riesgo factibles. Por ejemplo, la Desviación Estándar, o las medidas generales de desviación de Rockafellar *et al.* (2006a), satisfacen P3 con $H = 0$.

No obstante, en algunos casos consideraremos supuestos adicionales como:

P3. $\rho(\tau F + (1 - \tau)G) \leq \tau\rho(F) + (1 - \tau)\rho(G)$ si $\tau \in [0, 1]$ y $F, G \in L^2(\mu)$ (convexidad).

P4. $\rho(G) \leq \rho(F)$ si $F, G \in L^2(\mu)$ y $\mu(G \geq F) = 1$ (monotonía).

P5. $\rho(F + G) \leq \rho(F) + \rho(G)$ if $F, G \in L^2(\mu)$ (subaditividad).¹⁶

P6. $\rho(F + G) \geq \rho(F) + \rho(G)$ si $F, G \in L^2(\mu)$ (superaditividad).

P7. $\rho(F) \geq -E(f)$ si f no es constante (dominante de la media).

Téngase en cuenta que P1 implica que $\rho(0) = 0$. En efecto, $\rho(0) = \rho(\lambda 0) = \lambda\rho(0)$ y $\rho(0) \neq 0$ conducirían a $\lambda = 1$ si $\lambda > 0$. Además, $\rho(0) = 0$ implica que P1 también se cumple para $\lambda = 0$.

Con las notaciones del Teorema 3 se tiene que $\rho(R) = \rho(R - R_0) - HR_0$ y

$$\rho\left(R_0 + \sum_{h=1}^k \beta_h (F_h - R_0) + \varepsilon\right) = \rho\left(\sum_{h=1}^k \beta_h (F_h - R_0) + \varepsilon\right) - HR_0.$$

Así, el nivel de riesgo de cualquier estrategia g -eficiente o general viene dada por el nivel de riesgo de su prima de riesgo menos un término constante. Eso implica que comparar dos estrategias usando el nivel de riesgo de su retorno total o el nivel de riesgo de su prima de riesgo conduce al mismo resultado. Nosotros trataremos habitualmente con la prima de riesgo.

Con las notaciones de la sección previa, si el retorno R es substituido por la Cartera (60) y consideramos el caso de un solo factor (*CAPM*), entonces el nivel de riesgo alcanzado será

$$\beta\rho(R^g - R_0) \tag{66}$$

para $\beta \geq 0$, o

$$-\beta\rho(R_0 - R^g)$$

si $\beta < 0$. Por tanto, para las carteras de beta positiva sería conveniente elegir g de tal modo que se minimizara $\rho(R^g - R_0) = HR_0 + \rho(R^g)$. De dónde, teniendo en cuenta (54) y (56), la variable aleatoria g resolvería

¹⁶Nótese que P3 y P5 son equivalentes porque P1 se cumple.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{\rho \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j (R_0 - R_j) \right)}{\sum_{j=1}^n \alpha_j E (R_0 - R_j)} \\ & \begin{cases} \int_{\Omega} (g - 1) R_j d\mu = 0, & j = 0, 1, \dots, n \\ \sum_{j=0}^n \alpha_j \int_{\Omega} R_i R_j g d\mu = 1, & i = 0, 1, \dots, n \\ g \in L^{\infty}(\mu) \\ g \geq \delta \end{cases} \end{aligned} \quad (67)$$

siendo $(g, \alpha) \in L^{\infty}(\mu) \times \mathbb{R}^{n+1}$ la variable decisión. El parámetro δ debería ser tan pequeño como fuera posible para lograr un valor óptimo bajo del problema anterior.¹⁷

Podríamos incorporar la Restricción (51), pero tendría poco sentido para el Problema (67). En efecto, (51) implicaría que g podría ser eliminada de la segunda restricción del Problema (67). De ese modo, teniendo en cuenta la unicidad de $\sum_{j=1}^n \alpha_j (R_0 - R_j)$ dada g (véase (53)) y la expresión de la función objetivo en (67), es claro que el objetivo permanece constante y no depende de g . Entonces $g = 1$ resuelve el problema y (66) se transforma en $\beta \rho (R^M - R_0)$, de modo que la (probable) cola pesada y el nivel de riesgo del índice no son reducidos.

En el caso general el valor óptimo del Problema (67) será mucho más bajo que el obtenido si $g = 1$, y (66) será mucho más bajo que $\beta \rho (R^M - R_0)$, de modo que estamos reduciendo los niveles de riesgo de forma significativa cuando cambiamos el índice (la Cartera de Mercado). Por tanto, estamos considerando un nuevo índice diversificado que nos permita explicar los retornos de los activos de acuerdo a (58) y (59), y genera simultáneamente la familia de carteras eficientes conforme a la sencilla expresión¹⁸

$$(1 - \beta, \beta) \quad (68)$$

y reduce los niveles de riesgo en el sentido de que resuelve el problema de “colas gruesas”. Aparece una cuestión natural: La Cartera (68) es menos arriesgada que R si g resuelve (67) y medimos el nivel de riesgo usando la g -Desviación Estándar, pero es también menos arriesgada si usamos ρ ? En general, la respuesta es “no”, por lo que es conveniente proporcionar condiciones que generen una respuesta positiva. En primer lugar, probaremos que (68) es mucho mejor que el índice inicial. Además, reduce los niveles de riesgo si lo hace el índice inicial.¹⁹

¹⁷A pesar de que ρ puede ser no diferenciable (Rockafellar *et al.*, 2006), si $P5$ y $P7$ se cumplen (incluso una condición especial estrictamente más débil que $P7$) entonces el Problema (67) se puede transformar de tal forma que se haga diferenciable, y se pueden establecer unas condiciones de tipo Karush-Kunt-Tucker.

¹⁸Recuerde que para cada cartera β permanece constante aunque el índice haya sido alterado.

¹⁹Esto es, si la nueva estrategia eficiente no reduce el valor de ρ lo mismo ocurre con la antigua.

Proposición 8. Sea R un pago alcanzable de precio unitario con β no negativa y $0 < \delta < 1$.

a) Asumamos que existe $h \in L^\infty(\mu)$ tal que $\mu(h \geq \delta) = 1$ y

$$\rho(R - R_0) \geq \beta \rho(R^h - R_0).$$

Asumamos que g resuelve el Problema (67). Entonces,

$$\rho(R - R_0) \geq \beta \rho(R^g - R_0). \quad (69)$$

b) En particular, (69) se cumple si

$$\rho(R - R_0) \geq \beta \rho(R^M - R_0).$$

c) La desigualdad $\rho(R^g - R_0) \geq \beta \rho(R^M - R_0)$ se cumplirá.

Demostración. Como g resuelve (67) tenemos

$$\rho(R^h - R_0) \geq \rho(R^g - R_0)$$

y la primera afirmación se deduce trivialmente. Además, la segunda afirmación es obvia si se toma $\mu(h = 1) = 1$, y la última es obvia porque g resuelve (67) y, por tanto, supera a $\mu(h = 1) = 1$. \square

Observación 3. Supongamos que $\rho(R - R_0) \geq \beta \rho(R^* - R_0)$. Entonces $\beta \rho(R^* - R_0)$ debe entenderse como el riesgo sistemático de R , mientras que $\rho(R - R_0) - \beta \rho(R^* - R_0)$ será su riesgo idiosincrático. La expresión (59) indica que el mercado sólo paga por el riesgo sistemático. \square

5.4. Estrategias de Cola Ligera

Considérese el Problema

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \rho\left(\sum_{j=0}^n \gamma_j R_j - R_0\right) \\ & \left\{ \begin{array}{l} E\left(\sum_{j=0}^n \gamma_j R_j - R_0\right) \geq E(R^* - R_0) \\ \sum_{j=0}^n \gamma_j \leq 1 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (70)$$

siendo $(\gamma_j)_{j=0}^n$ la variable de decisión.²⁰ El Problema (70) minimiza el nivel de riesgo una vez que se ha alcanzado el retorno esperado de la CM . En primer lugar, mostremos que las desigualdades se pueden transformar en igualdades sin

²⁰De acuerdo a los métodos de Balbás *et al.* (2006), si se cumplen $P5$ y $P7$ entonces el Problema (70) se puede transformar de tal forma que se transforma en lineal, y un algoritmo tipo simplex nos permite resolverlo en la práctica (véase también Balbás y Romera, 2007). Se pueden realizar comentarios similares para los restantes problemas de optimización de esta sección.

que eso afecte al valor óptimo.

Lema 9. Considérese el Problema

$$\begin{aligned} \text{Min } \rho \left(\sum_{j=0}^n \gamma_j R_j - R_0 \right) &= \rho \left(\sum_{j=0}^n \gamma_j (R_j - R_0) \right) \\ \left\{ \begin{array}{l} E \left(\sum_{j=0}^n \gamma_j R_j - R_0 \right) = E(R^* - R_0) \\ \sum_{j=0}^n \gamma_j = 1 \end{array} \right. & \quad (71) \end{aligned}$$

Si $(\gamma_j)_{j=0}^n$ es (70)-factible entonces existe $(\tilde{\gamma}_j)_{j=0}^n$ (71)-factible tal que

$$\rho \left(\sum_{j=0}^n \gamma_j R_j - R_0 \right) \geq \rho \left(\sum_{j=0}^n \tilde{\gamma}_j R_j - R_0 \right).$$

Demostración. Tómese $\lambda = 1 - \sum_{j=0}^n \gamma_j$ y es claro que $\lambda \geq 0$. Más aún,

$$k = \frac{E(R^* - R_0)}{E\left((\gamma_0 + \lambda - 1)R_0 + \sum_{j=1}^n \gamma_j R_j\right)} \in (0, 1].$$

En efecto,

$$\begin{aligned} E\left((\gamma_0 - 1 + \lambda)R_0 + \sum_{j=1}^n \gamma_j R_j\right) &= (\gamma_0 - 1 + \lambda)R_0 + E\left(\sum_{j=1}^n \gamma_j R_j\right) \\ &= \gamma_0 R_0 + E\left(\sum_{j=1}^n \gamma_j R_j\right) - R_0 + \lambda R_0 \\ &\geq E(R^* - R_0) + \lambda R_0 \geq E(R^* - R_0). \end{aligned}$$

Tómese

$$(\tilde{\gamma}_j)_{j=0}^n = (1 - k + k\lambda + k\gamma_0, k\gamma_1, \dots, k\gamma_n).$$

$(\tilde{\gamma}_j)_{j=0}^n$ es (71)-factible porque

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \tilde{\gamma}_j &= 1 - k + k\lambda + k\gamma_0 + k \sum_{j=1}^n \gamma_j \\ &= 1 - k \left(\sum_{j=0}^n \gamma_j \right) + k\gamma_0 + k \sum_{j=1}^n \gamma_j \\ &= 1, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} &E\left((1 - k + k\lambda + k\gamma_0)R_0 + k \sum_{j=1}^n \gamma_j R_j - R_0\right) \\ &= E\left((-k + k\lambda + k\gamma_0)R_0 + k \sum_{j=1}^n \gamma_j R_j\right) = kE\left((\lambda - 1 + \gamma_0)R_0 + \sum_{j=1}^n \gamma_j R_j\right) \\ &= \frac{E(R^* - R_0)}{E\left((\gamma_0 + \lambda - 1)R_0 + \sum_{j=1}^n \gamma_j R_j\right)} E\left((\lambda - 1 + \gamma_0)R_0 + \sum_{j=1}^n \gamma_j R_j\right) \\ &= E(R^* - R_0). \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \rho\left(\sum_{j=0}^n \tilde{\gamma}_j R_j\right) &= \rho\left((1-k+k\lambda+k\gamma_0)R_0+k\sum_{j=1}^n \gamma_j R_j\right) \\ &= k\rho\left(\sum_{j=0}^n \gamma_j R_j\right)-H(1-k+k\lambda)R_0 \\ &\leq \rho\left(\sum_{j=0}^n \gamma_j R_j\right) \end{aligned}$$

ya que $k \leq 1$, $\lambda \geq 0$, $k > 0$, $1 - k \geq 0$, $H \geq 0$ y $R_0 > 0$. \square

Diversificando entre la solución de (71) y el activo sin riesgo se reduce el riesgo de cada cartera y no se paga nada en términos de retorno esperado. En cierto sentido se puede decir que la solución de (71) nos proporciona el mejor índice posible (o “cartera de mercado”) si se desea minimizar la medida de riesgo ρ y no se está interesado en las expresiones de tipo *APT* o *CAPM* en la línea de (57) y (58). El resultado siguiente aclara esta idea.

Lema 10. Sea R un pago alcanzable de precio unitario con β positiva y sea $(\tilde{\gamma}_j)_{j=0}^n$ una solución de (71). Entonces,

$$E(R - R_0) = E\left(\beta \sum_{j=1}^n \tilde{\gamma}_j (R_j - R_0)\right)$$

y

$$\rho(R - R_0) \geq \rho\left(\beta \sum_{j=1}^n \tilde{\gamma}_j (R_j - R_0)\right),$$

es decir, diversificando de acuerdo a los pesos $(1 - \beta, \beta)$ entre el activo sin riesgo y la Cartera $(\tilde{\gamma}_j)_{j=0}^n$ se supera al pago R .

Demostración. Por un lado,

$$\begin{aligned} &E\left(\beta \sum_{j=0}^n \tilde{\gamma}_j (R_j - R_0)\right) \\ &= \beta \left(E\left(\sum_{j=0}^n \tilde{\gamma}_j R_j\right) - R_0 E\left(\sum_{j=0}^n \tilde{\gamma}_j\right)\right) \\ &= \beta (E(R^M) - R_0) = E(R - R_0). \end{aligned}$$

Por otro lado, considérese la cartera que compra $1 - 1/\beta$ unidades del activo sin riesgo y $1/\beta$ unidades de R . Su precio es igual a uno y su pago esperado es

$$E\left[\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)R_0 + \frac{1}{\beta}R\right] = R_0 + \frac{1}{\beta}E[R - R_0] = R_0 + \frac{1}{\beta}\beta E[R^* - R_0] = E[R^*].$$

Entonces ésta es una estrategia (71)-factible que debe satisfacer

$$\rho \left[\left(1 - \frac{1}{\beta} \right) R_0 + \frac{1}{\beta} R \right] \geq \rho \left[\sum_{j=0}^n \tilde{\gamma}_j R_j \right],$$

es decir,

$$\frac{1}{\beta} \rho [R - R_0] \geq \rho \left[\sum_{j=0}^n \tilde{\gamma}_j R_j - R_0 \right],$$

y el resultado se deduce trivialmente. \square

5.5. Comparación de Índices

Resolviendo el Problema (67) llegamos a un *benchmark* apropiado ya que se cumple la Expresión (58), así como la Expresión (57) si los factores generan el índice con colas ligeras R^{g_ρ} , donde g_ρ denota la solución de (67). Además, dada una estrategia arbitraria, combinando el activo sin riesgo y la solución R^{g_ρ} de acuerdo a la Cartera (68) es una alternativa adecuada, en el sentido de que el nivel de riesgo es menor del que habría si β fuera el peso de la cartera de mercado R^* (véase Proposición 8). Sin embargo, no se garantiza que el nivel de riesgo inicial de la cartera, dado por la medida ρ se reduzca si se combinan R^{g_ρ} y el activo sin riesgo.

La estrategia de cola ligera que resuelve el Problema (71) resuelve, también, parcialmente el inconveniente, en el sentido de que se reduce el nivel de riesgo inicial si su solución \tilde{R}^ρ juega el papel de R^{g_ρ} , aunque \tilde{R}^ρ no nos permita explicar los activos disponibles usando (58) y (57).

Si $\rho = \sigma$, es decir, si la medida de riesgo es la desviación estándar, entonces el Modelo de Valoración de Activos (*CAPM*) muestra que $R^{g_\rho} = \tilde{R}^\rho = R^*$, de modo que ambos, la estrategia de cola ligera y el índice con colas ligeras coinciden, y se cumple (58) cuando los factores generan la estrategia óptima. Es natural analizar las propiedades de ρ que lleven a situaciones similares, es decir, las propiedades de ρ que impliquen que

$$R^{g_\rho} = \tilde{R}^\rho. \tag{72}$$

Por supuesto, se pueden resolver ambos (67) y (71) y comparar las soluciones. Aplicando el Teorema 7 y su observación el proceso se puede simplificar, ya que es suficiente resolver sólo uno de los problemas. El Teorema 11, mostrado a continuación, nos permite garantizar (72), si se cumple (71), el más fácil si tenemos en cuenta el procedimiento del capítulo anterior que transforma éste en un problema lineal.

Teorema 11. Con las notaciones anteriores, se cumple la Expresión (72) si y sólo si existen $g \in L^\infty(\mu)$, $\delta \in \mathbb{R}$ con $\mu(g \geq \delta) = 1$, y $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in \mathbb{R}$ que satisfagan

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \tilde{R}^\rho (\tilde{R}^\rho - R^*) g d\mu & = 0 \\ \int_{\Omega} (g - 1) R_j d\mu & = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n \\ \int_{\Omega} R_j \tilde{R}^\rho g d\mu - \phi_0 - \phi_1 E(R_j) - \phi_2 \int_{\Omega} R_j R^* d\mu & = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n \end{cases} \quad (73)$$

En caso afirmativo g resuelve (67).

Demostración. En primer lugar probemos que $\tilde{R}^\rho = R^{g^\rho}$ si y sólo si existe $g \in L^\infty(\mu)$ que satisfaga (50) y $\delta \in \mathbb{R}$ con $\mu(g \geq \delta) = 1$ y $\tilde{R}^\rho = R^g$. En efecto, la existencia de g y δ muestra que (g, α) es (67)–factible, donde $\sum_{j=0}^m \alpha_j R_j$ es el $g - FDE$. Como la función objetivo de (67) es

$$\frac{\rho(R^g - R_0)}{E(R^* - R_0)}$$

tenemos que $\rho(\tilde{R}^\rho - R_0) = \rho(R^g - R_0) \geq \rho(R^{g^\rho} - R_0)$. Por otro lado, $E(R^{g^\rho}) = E(R^*)$, y R^{g^ρ} es una cartera de precio unitario, así que R^g es (71)–factible. Entonces $\rho(R^{g^\rho} - R_0) \geq \rho(\tilde{R}^\rho - R_0)$ y la igualdad debe cumplirse. Entonces \tilde{R}^ρ es (67)–factible y el objetivo alcanza su mínimo valor, de modo que \tilde{R}^ρ resuelve (67) y $\tilde{R}^\rho = R^{g^\rho}$.

Únicamente queda demostrar que (73) es equivalente a la existencia de g y δ . Como las restricciones de (71) implican que $E(\tilde{R}^\rho - R^*) = 0$, es una consecuencia clara del Teorema 7 y el Sistema (65). \square

5.6. Conclusiones

Las colas pesadas y las asimetrías están produciendo que muchos problemas de cobertura óptima y selección de carteras tengan que ser tratados utilizando funciones generales de riesgo, ya que la desviación estándar contradice la Dominancia Estocástica de Segundo Orden y no proporciona ninguna información para establecer los requerimientos de capital iniciales.

Al minimizar funciones de riesgo generales se llega a otro nuevo *benchmark* o estrategia de cola ligera cuyas combinaciones con el activo sin riesgo pueden superar a cualquier cartera. Sin embargo, no se garantiza que ese nuevo *benchmark* sea capaz de explicar el comportamiento del mercado a través de fórmulas de tipo *CAPM* y *APT*. Éste es un resultado muy significativo, ya que se pierde la noción de riesgo idiosincrático, es decir, no se sabe qué niveles de riesgo y retornos son debidos a la evolución global del mercado y que partes no

dependen del mercado.

En este capítulo se ha mostrado que para una gran variedad de funciones de riesgo, incluyendo las medidas de riesgo coherentes, consistentes o acotadas por la media, y las desviaciones generales, entre otras, se puede encontrar un *benchmark* alternativo que puede ser apropiado cuando se componen estrategias eficientes y, más importante aún, nos permite recuperar las fórmulas clásicas del *CAPM* y del *APT*. Además, las situaciones en las cuales ambos *benchmarks* son idénticos han sido caracterizadas.

Agradecimientos. Esta investigación ha sido parcialmente apoyada por “*Welzia Management SGIIC SA*” y “*RD_Sistemas SA*”.

5.7. Referencias

- Alexander, S., T.F. Coleman y Y. Li, 2006. *Minimizing CVaR and VaR for a Portfolio of Derivatives*. *Journal of Banking & Finance*, 30, 538-605.
- Artzner, P., F. Delbaen, J.M. Eber y D. Heath, 1999. *Coherent Measures of Risk*. *Mathematical Finance*, 9, 203-228.
- Balbás, A., I.R. Longarela y J. Lucia, 1999. *How Financial Theory Applies to Catastrophe – linked Derivatives: An Eempirical Test of Several Pricing Models*. *Journal of Risk and Insurance*, 66, 4, 551-582.
- Balbás, A. y R. Romera, 2007. *Hedging Bond Portfolios by Optimization in Banach Spaces*. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 132, 1, 175-191.
- Benati, S., 2003. *The Optimal Portfolio Problem with Coherent Risk Measure Constraints*. *European Journal of Operational Research*, 150, 572-584.
- Chamberlain, G. y M. Rothschild, 1983. *Arbitrage, Factor Structure, and Mean – variance Analysis on Large Assets*. *Econometrica* , 51, 1281-1304.
- Clark, S.A., 2000. *Arbitrage Approximation Theory*. *Journal of Mathematical Economics*, 33, 167-181.
- Cochrane, J.H., 2001. *Asset pricing*. Princeton University Press.
- Föllmer, H. y A. Schied, 2002. *Convex Measures of Risk and Trading Constraints*. *Finance and Stochastics*, 6, 429-447.
- Goovaerts, M., R. Kaas, J. Dhaene y Q. Tang, 2004. *A New Classes of Consistent Risk Measures*. *Insurance: Mathematics and Economics*, 34, 505-516.

- Hansen L. y R. Jagannathan, 1997. *Assessing Specification Errors in Stochastic Discount Factor Models*. *The Journal of Finance*, 52, 2, 567-590.
- Harrison, M. y D.M. Kreps, 1979. *Martingale and Arbitrage in Multiperiod Security Markets*. *Journal of Economic Theory*, 20, 381-408.
- He, H. y D.M. Modest, 1995. *Market Frictions and Consumption-based Asset Pricing*. *Journal of Political Economy*, 103, 94-117.
- Jacod, J. y A. Shiryaev, 1998. *Local Martingales and the Fundamental Asset Pricing Theorems in the Discrete-time Case*. *Finance and Stochastics*, 2, 3, 259-273.
- Konno, H., K. Akishino y R. Yamamoto, 2005. *Optimization of a Long-Short Portfolio Under Non-convex Transaction Costs*. *Computational Optimization and Applications*, 32, 115-132.
- Luenberger, D.G., 1969. *Optimization by vector space methods*. John Wiley & Sons, New York.
- Luttmer, 1996. *Asset Pricing in Economies with Frictions*. *Econometrica*, 64, 1439-1467.
- Nakano, Y., 2004. *Efficient Hedging with Coherent Risk Measure*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 293, 345-354.
- Ogryczak, W. y A. Ruszczyński, 2002. *Dual Stochastic Dominance and Related Mean Risk Models*. *SIAM Journal of Optimization*, 13, 60-78.
- Rockafellar, R. y S. Uryasev, 2002. *Conditional Value at Risk for General Loss Distributions*. *Journal of Banking and Finance*, 26, 1443-1471.
- Rockafellar, R.T., S. Uryasev y M. Zabarankin, 2006. *Generalized Deviations in Risk Analysis*. *Finance & Stochastics*, 10, 51-74.
- Schachermayer, W., 2004. *The Fundamental Theorem of Asset Pricing under Proportional Transaction Costs in Finite Discrete Time*. *Mathematical Finance*, 14, 1, 19-48.
- Wang, S.S., 2000. *A Class of Distortion Operators for Pricing Financial and Insurance Risks*. *Journal of Risk and Insurance*, 67, 1, 15-36.

6. Sobre la Aplicabilidad de las Medidas Generales de Riesgo en los Mercados Eléctricos

Contenido

- Planteamientos generales
- Problemas abiertos en mercados eléctricos derivados
- Conclusiones
- Referencias

6.1. Planteamientos generales

Este capítulo sintetizará ideas que serán desarrolladas en profundidad en futuras investigaciones. Se trata por tanto de un proyecto aún por elaborar, si bien pensamos que los resultados hasta ahora obtenidos, reflejados en capítulos anteriores, avalan totalmente las posibilidades del proyecto que ahora exponemos.

Como se dijo en los capítulos anteriores, la electricidad y sus derivados presentan precios y rentabilidades difíciles de estudiar, con fuertes “picos de demanda”, dependencias estacionales, y con asimetrías y colas pesadas, además de otras circunstancias especiales como es la capacidad de almacenamiento del subyacente o la existencia de tecnologías muy diferentes para su producción.

El problema del productor de energía eléctrica se suele enfocar como un problema de Programación Matemática o Investigación Operativa (véase, entre otros, Conejo y Prieto, 2001), pero hay muchos otros problemas que tienen mucho más que ver con la Economía Financiera. Aunque en la sección siguiente haremos más hincapié en este hecho, los clásicos problemas de valoración, cobertura, gestión de riesgos, selección de inversiones, etc, son claro ejemplo de ello.

La teoría desarrollada en capítulos anteriores se adapta perfectamente a los problemas financieros mencionados en el párrafo anterior. En efecto, por un lado, las fuertes fricciones o la falta de liquidez de estos mercados pueden hacer muy complejo el empleo de los métodos habituales de valoración, por cuanto rebalances en tiempo continuo, o al menos muy frecuentes, pueden ser tremendamente caros si no absolutamente infactibles. Por otro lado, las asimetrías y colas gruesas hacen que la desviación típica sea totalmente inapropiada para medir muchos tipos de riesgos, por ser imposible de traducir en términos de requerimientos de capital (no hay relación directa entre la desviación típica y el VaR), y, como innumerables veces hemos dicho ya por estar en flagrante contradicción con el Principio de Dominancia Estocástica de Segundo Orden. Por

consiguiente, métodos de valoración, cobertura óptima y selección de inversiones por funciones de riesgo más generales están totalmente justificados, y cubren un vacío que, sin duda, ayudará de forma importante al análisis y tratamiento de los mercados energéticos.

Como dijimos en la introducción de esta memoria, quizá sea el *Nord Pool* el ejemplo de mercado que más se adapta a nuestros desarrollos de los capítulos III, IV y V, y por ello le hemos dedicado el capítulo I casi en exclusividad. En efecto, se trata de un mercado organizado, con una gama suficiente de productos y con la necesaria transparencia en los procesos de negociación y formación de precios, así como con información sobre los niveles de liquidez y costes de transacción. En este tipo de mercados las fricciones hacen difícil el tratamiento de los problemas con los modelos tradicionales, diseñados para mercados perfectos, pero hay la suficiente información y eficiencia como para intentar aplicar modelos más generales y sofisticados.

En la sección siguiente describiremos toda una colección de problemas que se adaptan a los contenidos de capítulos anteriores, así como métodos de resolución de los mismos. La última sección del capítulo establecerá las conclusiones más importantes del mismo.

6.2. Problemas abiertos en mercados eléctricos derivados

Dedicaremos esta sección a ver posibles aplicaciones de la teoría desarrollada a datos procedentes del mercado *Nord Pool*.

Föllmer y Schied (2002) y Nakano (2004) muestran como una medida coherente del riesgo, en el sentido de Artzner *et al.* (1999), puede utilizarse para valorar en mercados incompletos o imperfectos, ya sean estas imperfecciones provocadas por rozamientos, por falta de liquidez, o por otras razones. Es fácil probar que el método de Föllmer y Schied (2002) y Nakano (2004) también puede aplicarse si se usan medidas de desviación o medidas acotadas por la media, tal y como estas son introducidas en Rockafellar *et al.* (2006). Básicamente, se considera un proceso estocástico adaptado que representa la evolución del precio de una cartera autofinanciada y factible, y se minimiza la medida de riesgo de la diferencia entre el pago (o activo) a valorar y el valor final del proceso. Por tanto, la variable de decisión es el proceso estocástico adaptado, su valor inicial es el precio que pondremos al activo que se está valorando y, finalmente, una posición opuesta (directa) en este proceso es la mejor estrategia de cobertura de la compra (venta) de este nuevo activo. En particular, los autores antes citados proponen varias medidas de riesgo concretas que se pueden utilizar, como el *CVaR* o el *Worst Conditional Expectation*, citadas en el capítulo IV de esta memoria.

Las opciones del *Nord Pool* tienen como subyacente futuros o *forwards* sobre electricidad (véase capítulo I), con lo que su valoración y cobertura habría

que hacerla comparando con “la mejor réplica dinámica autofinanciada de la opción que combina el derivado subyacente y el activo sin riesgo”. Sin duda, “la mejor réplica” es la perfecta, es decir, aquella que a vencimiento ofrece exactamente el mismo pago que la opción. Pero la existencia de esta cartera estará condicionada a la obtención de un modelo estocástico bien calibrado para el precio del *forward* subyacente (lo cual no es siempre fácil, véase capítulo III), y a la posibilidad de rebalanceo permanente del nivel de contratos *forward* en cartera (el habitual control con las griegas, delta e incluso la gamma y la vega), lo cual puede ser muy complicado dado que los costes de transacción son aquí más altos que en otros mercados organizados y la liquidez no es la misma.

Alternativamente, se puede utilizar el método de valoración y cobertura de Nakano (2004) para el *CVaR*, la media de Wang o la *Dual Power Transform* (Wang, 1999), entre otras, e incluso combinaciones de las mismas. Entonces, todas las técnicas de optimización de medidas de riesgo presentadas en los capítulos IV y V tienen perfecta cabida en este problema, al que dedicaremos futuras investigaciones. También se podrán utilizar otros modelos de optimización recientes y desarrollados por otros autores (véase Saunders et al., 2007), y compararlos con los nuestros. Un contraste empírico podría ayudarnos a determinar la eficacia del método, observando, a partir de las cotizaciones reales de las opciones, la validez empírica del método y su posible superioridad sobre el más clásico antes citada. La ventaja comparativa de este nuevo enfoque estriba en que los “procesos estocásticos (o carteras de cobertura) factibles” van a tener en cuenta todas las imperfecciones, y la medida del riesgo va a ser compatible con las dominancias estocásticas (con las funciones de utilidad habituales).

Un segundo problema se plantea en la elección de la cartera óptima. Supondremos una cartera general a la que hay que añadir otra formada por activos negociables en el *Nord Pool*. En este caso podremos tratar todos los problemas de selección de cartera mediante los procedimientos de optimización de los capítulos IV y V. En particular, podremos elaborar índices representativos y obtener factores que nos expliquen el riesgo general del mercado eléctrico, y cómo éste afecta a cada uno de los activos o carteras en él negociables, es decir, hablaremos de riesgo sistemático y riesgo específico en mercados eléctricos. Esto es importante porque modelos *CAPM* o *APT* clásicos no parecen tan directamente aplicables al caso, pues, como hemos reiterado, la desviación típica no mide bien el nivel de riesgos de estos mercados.

Un tercer problema es la eficacia de los métodos de los párrafos anteriores desde el punto de vista de la determinación de requerimientos iniciales de capital. Tanto si estamos valorando y cubriendo un activo, como si estamos gestionando inversiones, el valor de la medida que minimizamos puede interpretarse como reservas adicionales para solventar evoluciones negativas del mercado. A priori parece fácil hacer contrastes empíricos que nos permitan decir con qué grado de precisión o confianza estas reservas van a permitir hacer una adecuada gestión del riesgo asumido, es decir, parece fácil hacer un *backtesting*, como se

indicó parcialmente en el capítulo III.

En un artículo reciente Artzner *et al.* (2007) ponen de manifiesto cómo decisiones óptimas en el corto plazo pueden dejar de serlo en el largo plazo si las medidas de riesgo no satisfacen cierto “principio de optimalidad de Bellman”. En consecuencia, veremos la estabilidad de las carteras óptimas del apartado anterior, con especial interés en aquellas que nos permiten distinguir los riesgos de mercado y específicos. En este sentido, buscaremos que las medidas de riesgo utilizadas satisfagan ciertas propiedades introducidas por los autores anteriores.

En el capítulo III se indicaron numerosos problemas a ser tratados mediante el uso del *VaR*, pues se trataba de no complicar la lectura usando medidas de riesgo más complejas que distrajeran la atención sobre los problemas que se planteaban, pero es obvio que cuantos problemas se formularon con el *VaR* se pueden (y deben) formular con funciones de riesgo más generales.

Un sexto y último problema importante, aunque quizá sea extraordinariamente complejo, es ver qué medida de riesgo se adapta mejor para trabajar en los mercados eléctricos derivados, o al menos en el *Nord Pool*. En general, es una cuestión que está lejos de ser resuelta en la literatura el de dar criterios que permitan elegir la medida de riesgo más adecuada para un mercado. Por simplicidad, con frecuencia se utiliza el *VaR*, pero ya se indicó en el capítulo IV que esto tienen fundamentalmente un origen histórico, y que esta medida presenta deficiencias notables que pueden provocar conclusiones erróneas si no se tienen en cuenta. La búsqueda de “la mejor” función de riesgo parece “muy difícil”, pero quizá sí se consiga ver cuál o cuáles son las medidas que dan una respuesta “mejor desde el punto de vista empírico”, al menos para cierto tipo de problemas.

Todos los problemas anteriores exigirán que conozcamos en profundidad el espacio probabilística que gobierna el comportamiento de los precios del mercado eléctrico y su derivado. En el capítulo III se dieron los métodos de estimación que se van a utilizar, tanto teóricos, como empíricos o de simulación de Monte Carlo. A este respecto hay que señalar que nos estamos haciendo con una base de datos que contempla las cotizaciones del *Nord Pool* paso a paso (incluso en formato *bid – ask*), así como la profundidad y las cantidades negociadas. Disponemos también de bases de datos históricas pero, como dijimos en el capítulo II, la gama de activos negociables ha cambiado muy recientemente, por lo que preferimos elaborar otra base que utilice los contratos actualmente en vigor. De hecho, el ejercicio numérico que presentamos al final del capítulo IV podría haberse realizado con datos del *Nord Pool*, pero no lo hicimos así porque, o bien usábamos activos que ya no se negocian, o bien utilizábamos bases de datos no significativas y con muy poca información, por incorporar activos de muy reciente lanzamiento al mercado.

6.3. Conclusiones

Los métodos de los capítulos anteriores, en especial de los capítulos III, IV y V, se pueden aplicar a una serie de problemas importantes en mercados energéticos, que con frecuencia no pueden ser tratados de una forma más tradicional dadas sus especificidades. Los problemas que se pueden abordar son los clásicos de valoración, cobertura, selección de inversiones o gestión de riesgos, así como el de la determinación de niveles de riesgo sistemático o global de mercado. En este capítulo se ha puesto especial atención en el *Nord Pool*, por ser probablemente el primer mercado europeo, pero es de prever que, dado el creciente nivel de liberalización que estos mercados están experimentando en toda Europa, en plazos de tiempo razonables todas las ideas expuestas, tanto en este capítulo como en el resto de la memoria, se adapten perfectamente a muchos más mercados energéticos y, entre ellos, por supuesto, los españoles o los ibéricos.

6.4. Referencias

- Artzner, P., F. Delbaen, J.M. Eber y D. Heath, 1999. *Coherent Measures of Risk*. *Mathematical Finance*, 9, 203-228.
- Artzner, P., F. Delbaen, J.M. Eber, D. Heath y H. Ku, 2007. *Coherent Multiperiod Risk Adjusted Values and Bellman's Principle*. *Annals of Operations Research*, 152, 5-22.
- Conejo, A.J. y F.J. Prieto, 2001. *Mathematical Programming and Electricity Markets*. *TOP*, 9, 1, 1-22.
- Delbaen, F., 2002. *Coherent Risk Measures on General Probability Spaces*. En Sandman andn Schönbucher eds. *Advances in Finance and Stochastics*, pp 1-33. Springer.
- Föllmer, H. y A. Schied, 2002. *Convex Measures of Risk and Trading Constraints*. *Finance and Stochastics*, 6, 429-447.
- Nakano, Y., 2004. *Efficient Hedging with Coherent Risk Measure*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 293, 345-354.
- Rockafellar, R.T., S. Uryasev y M. Zabarankin, 2006. *Generalized Deviations in Risk Analysis*. *Finance and Sochastics*, 10, 51-74.
- Saunders, D., C. Xiourus y S.A. Zenios, 2007. *Credit Risk Optimization Using Factor Models*. *Annals of Operations Research* 152, 49-77.
- Wang, S.S., 2000. *A Class of Distortion Operators for Pricing Financial and Insurance Risks*. *Journal of Risk and Insurance*, 67, 15-36.

7. Referencias Generales de la Memoria

- Alexander, S., T.F. Coleman y Y. Li, 2006. *Minimizing CVaR and VaR for a Portfolio of Derivatives*. *Journal of Banking & Finance*, 30, 538-605.
- Anderson, E.J. y P. Nash, 1987. *Linear programming in infinite-dimensional spaces*. John Wiley & Sons, New York.
- Artzner, P., F. Delbaen, J.M. Eber y D. Heath, 1999. *Coherent Measures of Risk*. *Mathematical Finance*, 9, 203-228.
- Artzner, P., F. Delbaen, J.M. Eber, D. Heath y H. Ku, 2007. *Coherent Multiperiod Risk Adjusted Values and Bellman's Principle*. *Annals of Operations Research*, 152, 5-22.
- Balbás, A. y A. Heras, 1993. *Duality Theory for Infinite-Dimensional Multiobjective Linear Programming*. *European Journal of Operational Research*, 68, 379-388.
- Balbás, A., I.R. Longarela y J. Lucia, 1999. *How Financial Theory Applies to Catastrophe – linked Derivatives: An Eempirical Test of Several Pricing Models*. *Journal of Risk and Insurance*, 66, 4, 551-582.
- Balbás, A. y R. Romera, 2007. *Hedging Bond Portfolios by Optimization in Banach Spaces*. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 132, 1, 175-191.
- Barber, J.R. y M.L. Copper, 1998. *A Minimax Risk Strategy for Portfolio Immunization*. *Insurance: Mathematics and Economics*, 23, 173-177.
- Benati, S., 2003. *The Optimal Portfolio Problem with Coherent Risk Measure Constraints*. *European Journal of Operational Research*, 150, 572-584.
- Chamberlain, G. y M. Rothschild, 1983. *Arbitrage, Factor Structure, and Mean – variance Analysis on Large Assets*. *Econometrica*, 51, 1281-1304.
- Clark, S.A., 2000. *Arbitrage Approximation Theory*. *Journal of Mathematical Economics*, 33, 167-181.
- Cochrane, J.H., 2001. *Asset pricing*. Princeton University Press.
- Conejo, A.J. y F.J. Prieto, 2001. *Mathematical Programming and Electricity Markets*. *TOP*, 9, 1, 1-22.
- Delbaen, F., 2002. *Coherent Risk Measures on General Probability Spaces*. En Sandman andn Schönbucher eds. *Advances in Finance and Stochastics*, pp 1-33. Springer.

- Föllmer, H. y A. Schied, 2002. *Convex Measures of Risk and Trading Constraints*. *Finance & Stochastics*, 6, 429-447.
- Goovaerts, M., R. Kaas, J. Dhaene y Q. Tang, 2004. *A New Classes of Consistent Risk Measures*. *Insurance: Mathematics and Economics*, 34, 505-516.
- Hansen L. y R. Jagannathan, 1997. *Assessing Specification Errors in Stochastic Discount Factor Models*. *The Journal of Finance*, 52, 2, 567-590.
- Harrison, M. y D.M. Kreps, 1979. *Martingale and Arbitrage in Multiperiod Security Markets*. *Journal of Economic Theory*, 20, 381-408.
- He, H. y D.M. Modest, 1995. *Market Frictions and Consumption-based Asset Pricing*. *Journal of Political Economy*, 103, 94-117.
- Holmes, R.B., 1975. *Geometrical functional analysis and its applications*. Graduate Texts in Mathematics, No 24, Springer-Verlag, New York-Heidelberg.
- Jacod, J. y A. Shiryaev, 1998. *Local Martingales and the Fundamental Asset Pricing Theorems in the Discrete – time Case*. *Finance and Stochastics*, 2, 3, 259-273.
- Konno, H., K. Akishino y R. Yamamoto, 2005. *Optimization of a Long–Short Portfolio Under Non–convex Transaction Costs*. *Computational Optimization and Applications*, 32, 115-132.
- Luenberger, D.G., 1969. *Optimization by vector space methods*. John Wiley & Sons, New York.
- Luttmer, 1996. *Asset Pricing in Economies with Frictions*. *Econometrica*, 64, 1439-1467.
- Merrick, J.J., Y. N. Nike and P.K. Yadav (2005). *Strategic Trading Behavior and Price Distortion in a Manipulated Market: Anatomy of a Squeeze*. *Journal of Financial Economics*, 77, 171-208.
- Nakano, Y., 2004. *Efficient Hedging with Coherent Risk Measures*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 293, 345-354.
- Ogryczak, W. y A. Ruszczyński, 1999. *From Stochastic Dominance to Mean Risk Models: Semideviations and Risk Measures*. *European Journal of Operational Research*, 116, 33-50.
- Ogryczak, W. y A. Ruszczyński, 2002. *Dual Stochastic Dominance and Related Mean Risk Models*. *SIAM Journal of Optimization*, 13, 60-78.
- *Risk And Risk Management In Electricity Markets: A Primer*. Alliance of Energy Suppliers, Edison Electric Institute.

- Rockafellar, R. y S. Uryasev, 2002. *Conditional Value at Risk for General Loss Distributions*. *Journal of Banking and Finance* , 26, 1443-1471.
- Rockafellar, R.T., S. Uryasev y M. Zabarankin, 2006a. *Generalized Deviations in Risk Analysis*. *Finance & Sochastics*, 10, 51-74.
- Rockafellar, R.T., S. Uryasev y M. Zabarankin, 2006b. *Optimality Conditions in Portfolio Analysis with General Deviations Measures*. *Mathematical Programming*, Ser. B, 108, 515-540.
- Ruszczyński, A. y A. Shapiro, 2007. *Optimization of Risk Measures*. *Mathematics of Operations Research*, forthcoming.
- Saunders, D., C. Xiourus y S.A. Zenios, 2007. *Credit Risk Optimization Using Factor Models*. *Annals of Operations Research* 152, 49-77.
- Schachermayer, W., 2004. *The Fundamental Theorem of Asset Pricing under Proportional Transaction Costs in Finite Discrete Time*. *Mathematical Finance*, 14, 1, 19-48.
- Shimizu, K. y E. Aiyoshiy, 1980. *Necessary Conditions for Min – Max Problems and Algorithms by a Relaxation Procedure*. *Transactions on Automatic Control*, 25, 62-67.
- Tirri M. (2001), *Corporate–Wide Risk Management In Energy Business*. Helsinki University of Technology, Department of Mechanical Engineering.
- *Trade at Nord Pool's Financial Market*. Documento obtenido de la página web del Nord Pool.
- Wang, S.S., 2000. *A Class of Distortion Operators for Pricing Financial and Insurance Risks*. *Journal of Risk and Insurance*, 67, 15-36.
- Werner A. (2002), *Risk Measurement In The Electricity Market*. Kellogg College, University of Oxford.
- Whirch, J.L. y M.R. Hardy, 2001. *Distortion Risk Measures. Coherence and Stochastic Dominance*. Unpublished Working Paper (<http://www.gloriamundi.org>).
- Wilkens S. y J. Wimschulte (2007), *The Pricing Of Electricity Futures: Evidence From The European Energy Exchange*. *Journal Of Futures Markets*, Vol. 27, N4, 387-410.
- Young, M.R., 1998. *A Minimax Portfolio Selection Rule with Linear Programming Solution*. *Management Science*, 43, 673-683.
- Zalinescu, C., 2002. *Convex analysis in general vector spaces*. World Scientific Publishing Co.
- *Web del Nord Pool* (www.nordpool.no).