LVI OME - COMUNIDAD DE MADRID
Segunda prueba

---

1. El paralelogramo $ABCD$ tiene área 192. Llamamos M y N a los puntos medios de los lados AD y BC, respectivamente. La recta CM corta a la prolongación de AB en el punto P. La recta DN corta a la prolongación de AB en el punto Q. Si CP y DQ se cortan en O, calcula el área del triángulo OPQ

2. Consideremos la sucesión $a_1 = 1, a_2 = 2$ y para $n \geq 1$,
$$a_{n+2} = a_n^2 + a_{n+1}^2.$$
¿Cuál es la cifra de las unidades de a_{2019}?

3. Si
$$\frac{2}{35} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$
con $x \neq y$ enteros positivos, encuentra el menor valor posible de la suma $x + y$.

4. Tenemos 20 tarjetas, numeradas desde 1 hasta 20. Jimena elige al azar una de ellas, con el número j. A continuación, Álvaro elige al azar otra carta, que tiene el número a. ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia $a - j$ sea al menos 2? (Expresa el resultado en forma de fracción irreducible).

5. Si a y b son números reales diferentes, con $a \geq 0$, $b \geq 0$ y verificando
$$a + \sqrt{b} = b + \sqrt{a},$$
¿cuál es el valor mayor que puede tomar la suma $a + b$?

6. ¿Cuál es el menor entero $n > 1$ tal que el producto de todos sus divisores positivos es n^4?

7. Las medidas de los lados del triángulo escaleno ABC son números enteros, y su perímetro es 2019. La bisectriz de $\angle C$ corta a AB en D, con $AD = 229$. Si las medidas de AC y AD son enteros primos entre sí, calcula BC.

8. Gabriel ha olvidado el código de seguridad de su teléfono, aunque recuerda que sus cuatro cifras sumaban por lo menos 8, que la primera estaba entre 0 y 6, la segunda entre 0 y 3, la tercera entre 0 y 4 y la cuarta entre 0 y 2, siempre con los extremos incluidos ¿Cuántos son los posibles códigos del teléfono de Gabriel?

9. Diremos que un entero positivo n es *genial* si cumple simultáneamente las condiciones siguientes: ninguna de sus cifras es 0; n es múltiplo de 11; n es múltiplo de 12, y cualquiera de los números que obtenemos al permutar las cifras de n sigue siendo múltiplo de 12. ¿Cuántos números geniales de diez cifras hay?

10. El área del triángulo ABC es 300. Sea Q el punto medio de BC, P un punto de AC con $CP = 3PA$, y R un punto en AB tal que el área de $\triangle PQR$ es el doble del área de $\triangle RBQ$. Determina el área de PQR.

LVI Olimpiada Matemática Española, Comunidad de Madrid

Segunda prueba, 14 de diciembre de 2019 - Soluciones

---

1. Respuesta: 216
   Los triángulos MPA y MCD son semejantes, y $AM = MD$, luego son iguales: $\triangle MPA = \triangle MCD$. De forma análoga, $\triangle NBQ = \triangle NCD$.
   Como $AM \parallel BN$ y $AM = BN$, los cuadriláteros $ABNM$ y $MNCD$ son paralelogramos, y área$(MNCD) = \frac{1}{2}$área$(ABCD) = \frac{192}{2} = 96$. Entonces, área$(MNCD) =$ 2área(DMC) $=$ 2área(PAM), luego los triángulos PAM y BQN tienen área $\dfrac{96}{2} = 48$.
   Por último, al ser el punto O el punto en que se cortan las diagonales del paralelogramo $MNCD$, tendremos área$(MNO) = \frac{1}{4}$área$(MNCD) = \dfrac{96}{4} = 24$.
   Por lo tanto, área$(OPQ) = 2 \cdot 96 + 24 = 216$.

2. Respuesta: 5
   La sucesión del enunciado, módulo 10 es $1, 2, 5, 9, 6, 7, 5, 4, 1, 7, 0, 9, 1, 2 \cdots\cdots$, ciclo de longitud 12. Como $2019 = 12 \cdot 168 + 3$, la cifra de las unidades del término 2019 es 5.

3. Respuesta: 72
   $$\frac{x+y}{xy} = \frac{2}{35} \leftrightarrow x + y = 2k, \quad xy = 35k$$
   para algún entero k. Llegamos entonces a la ecuación $x(2k - x) = 35k$, es decir $x^2 - 2kx + 35k = 0$, con soluciones
   $$x = \frac{2k \pm \sqrt{4k^2 - 4 \cdot 35k}}{2} = k \pm \sqrt{k^2 - 35k}$$
   Como x es entero, $k^2 - 35k$ debe ser cuadrado perfecto. El menor k para el que esto ocurre es $k = 36$, de modo que $x = 36 \pm \sqrt{36^2 - 35 \cdot 36} = 36 \pm 6$, $y = 72 - (36 \pm 6)$ y el menor valor posible de la suma $x + y$ es $30 + 42 = 72$.

4. Respuesta: $\dfrac{9}{29}$.
   Si la carta que saca Jimena tiene el número j, el número de la carta de Álvaro debe ser $j + 2 \leq a \leq 20$; por lo tanto para cada j con $1 \leq j \leq 18$ habrá $19 - j$ valores posibles para a. Entonces,
   $$p(a - j \geq 2) = \frac{1}{20}\left(\frac{18 + 17 + \cdots 1}{19}\right) = \frac{19 \cdot 9}{20 \cdot 19} = \frac{9}{20}$$

5. Respuesta: el valor máximo de la suma es 1.
   Si $a \neq b$ son números reales no negativos, tendremos
   $$a + \sqrt{b} = b + \sqrt{a} \Leftrightarrow a - b = \sqrt{a} - \sqrt{b} \Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$
   Como $a - b \neq 0$, resulta entonces que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$. Elevando al cuadrado, $a + b + 2\sqrt{ab} = 1$, es decir $a + b = 1 - 2\sqrt{ab} \leq 1$.
   Además, la suma alcanza el valor 1, por ejemplo para $a = 0$ y $b = 1$.

6. Respuesta: $n = 24$
Observemos para empezar que si $d \geq 1$ es divisor de n, también lo será $m = \dfrac{n}{d}$, y además ambos divisores (d, m) forman un par cuyo producto es precisamente n. Por lo tanto, si buscamos que el producto de todos los divisores positivos de n sea n^4, debemos buscar números cuyos divisores puedan agruparse en cuatro parejas como la anterior, es decir, que tengan exactamente 8 divisores. Hay dos posibilidades para la factorización en primos de n: $n = p^3q$, o $n = p^7$. Como buscamos el menor n con esta condición, en el primer caso tomamos $n = 2^3 3 = 24$, y en el segundo, $n = 2^7 = 128$. El menor de ambos es $n = 24$.

7. Respuesta: 888
Llamemos $a = BC, b = AC, c = AB, d = CD, e = AD = 229$ y $f = DB$. Como $a+b+c = a+b+(e+f) = 2019$ es entero, y también son enteros a, b y e, $f = DB$ es entero.
El teorema de la bisectriz permite establecer $\dfrac{b}{a} = \dfrac{229}{f}$, luego $b = \dfrac{229a}{f}$, entero. Como $\mathrm{mcd}(b, 229) = 1$, se sigue que f ha de ser múltiplo de 229, es decir, $f = 229k$ (con k entero), y $a = bk$. Entonces, el perímetro será
$a + b + c = bk + b + 229 + 229k = (b + 229)(k + 1) = 2019 = 3 \cdot 673.$
Barriendo posibilidades, resulta $b = 444$ y $k = 2$, es decir $BC = a = 888$.

8. Respuesta: 210
Sin contar con la restricción de la suma, el número de códigos posibles es $7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 = 420$. Veamos ahora que exactamente la mitad de ellos tiene suma mayor o igual que 8: a cada código $abcd$ con $S = a+b+c+d$ y a, b, c, d en los intervalos del enunciado, podemos asociar otro con dígitos también en los intervalos del enunciado $6 - a, 3 - b, 4 - c, 2 - d$, de suma $(6 + 3 + 4 + 2) - S = 15 - S$, de modo que $S \geq 8 \Leftrightarrow 15 - S \leq 7$. Observemos que en cada pareja de códigos asociados de esta forma, exactamente uno de los dos tiene suma de dígitos mayor o igual que 8. Además, el código asociado a $6 - a, 3 - b, 4 - c, 2 - d$ es de nuevo $abcd$. De esta forma, resulta que podemos formar exactamente 210 parejas de códigos asociados, en cada una de las cuáles exactamente un código tiene dígitos con suma mayor o igual que 8. La respuesta es entonces 210.

9. Respuesta: 50
Es claro que si n es genial no puede tener cifras impares, pues tanto n como cualquier otro número obtenido de n al permutar sus cifras debe ser múltiplo de 4. Además, al ser múltplo de 4, n se escribe usando únicamente las cifras 4 y 8 para que las terminaciones posibles, 44, 48, 84 y 88 sean múltiplos de 4; el 2 debe excluirse, pues 22,42,62, 82 no son múltiplos de 4, y análogamente debe excluirse el 6, pues tampoco son múltiplos de 4 los números 26,46,66 ni 86.
Un número genial n también debe ser múltiplo de 3; por tanto, si se escribe con k cuatros $(0 \leq k \leq 10)$ y $10-k$ ochos, la suma de sus cifras, $4k+(10-k)8 = 80-4k$, ha de ser múltiplo de 3. Pero $80 - 4k = 72 - 4k + 8 = 72 - 4(k - 2)$ es múltiplo de 3 si y solamente si $k - 2$ es múltiplo de 3, lo que ocurre con $k = 2, 5$ u 8.
Por último, si n es genial debe ser también múltiplo de 11, y la suma alternada de sus cifras, S, que siempre será par, ha de ser múltiplo de 11.
Observemos que se verifica
$4 + 4 + 4 + 4 - (8 + 8 + 8 + 8 + 8) = -20 \leq S \leq 20$
$= 8 + 8 + 8 + 8 + 8 - (4 + 4 + 4 + 4 + 4)$, con lo que el único valor posible para S

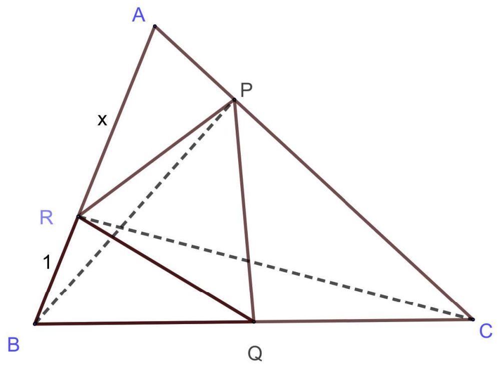
es $S = 0$. Combinando ahora toda la información obtenida, resulta:

- Si n tiene dos ochos y ocho cuatros, para que S sea cero uno de los ochos debe ocupar una posición par, y el otro una posición impar, lo que da lugar a 5×5 números geniales diferentes.
- Si n tiene cinco ochos, al ser 5 impar no podemos separarlos en dos grupos iguales, así que $S \neq 0$ y ninguno de estos números será genial.
- Si n tiene dos cuatros y ocho ochos, igual que en el primer caso colocaremos los dos cuatros uno en lugar par y el otro en lugar impar, consiguiendo de esta forma que $S = 0$. De nuevo, hay 5×5 posibilidades

Por lo tanto, hay 50 números geniales de 10 cifras.

10. Respuesta: 90

Llamemos $x = \dfrac{AR}{BR}$; podemos suponer, sin pérdida de generalidad $BR = 1$. Calcularemos en función de x las áreas de los cuatro triángulos en los que se descompone $\triangle ABC$, como se observa en la figura.
Como Q es punto medio de BC, se tiene área$(BQR) = \dfrac{1}{2} \cdot$ área(BCR).
Además, la relación entre las bases de $\triangle RBC$ y $\triangle ABC$ es $\dfrac{1}{x+1}$, de donde



$$\text{área}(RBC) = \frac{1}{x+1} \cdot \text{área}(ABC),$$

es decir

$$\text{área}(BQR) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \text{área}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{300}{1+x} = \frac{150}{x+1} \qquad [1]$$

De forma análoga, como $\dfrac{AP}{AC} = \dfrac{1}{4}$ y $\dfrac{PC}{AC} = \dfrac{3}{4}$, tendremos

$$\text{área}(APR) = \frac{1}{4} \cdot \text{área}(ACR) = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{1+x} \text{área}(ABC) = \frac{1}{4} \cdot \frac{300x}{1+x} = \frac{75x}{x+1} \qquad [2],$$

$$\text{área}(CPQ) = \frac{1}{2} \cdot \text{área}(BCP) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \text{área}(ABC) = \frac{3}{8} \cdot 300 = \frac{225}{2} \qquad [3]$$

y área$(PQR) = 2 \cdot$ área$(BQR) = \dfrac{300}{1+x}$ [4].

Sumando, tenemos:

$$300 = \frac{150}{x+1} + \frac{75x}{x+1} + \frac{225}{2} + \frac{300}{x+1}$$

de donde se sigue $x = \dfrac{7}{3}$. Resulta entonces,

$$\text{área}(PQR) = \frac{300}{1+x} = \frac{900}{3+3x} = \frac{900}{10} = 90.$$