



# Curso Académico 2018-19

## GEOMETRÍA DIFERENCIAL

### Ficha Docente

#### ASIGNATURA

Nombre de asignatura (Código GeA): GEOMETRÍA DIFERENCIAL (800604)

Créditos: 6

Créditos presenciales: 6

Créditos no presenciales:

Semestre: 2

#### PLAN/ES DONDE SE IMPARTE

**Titulación:** GRADO EN MATEMÁTICAS

**Plan:** GRADO EN MATEMÁTICAS

**Curso:** 4 **Ciclo:** 1

**Carácter:** Optativa

**Duración/es:** Por determinar (no genera actas), Segundo cuatrimestre (actas en Jun. y Jul.)

**Idioma/s en que se imparte:** Español

**Módulo/Materia:** CONTENIDOS AVANZADOS EN MATEMÁTICAS PURA Y APLICADA I/GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA AVANZADAS

#### PROFESOR COORDINADOR

| Nombre                 | Departamento                   | Centro                           | Correo electrónico | Teléfono |
|------------------------|--------------------------------|----------------------------------|--------------------|----------|
| LAFUENTE LOPEZ, JAVIER | Álgebra, Geometría y Topología | Facultad de Ciencias Matemáticas | jlafuent@ucm.es    |          |

#### PROFESORADO

| Nombre                 | Departamento                   | Centro                           | Correo electrónico | Teléfono |
|------------------------|--------------------------------|----------------------------------|--------------------|----------|
| LAFUENTE LOPEZ, JAVIER | Álgebra, Geometría y Topología | Facultad de Ciencias Matemáticas | jlafuent@ucm.es    |          |

#### SINOPSIS

##### BREVE DESCRIPTOR:

Generalización de los elementos de la "geometría intrínseca" de superficies (y variedades euclideas) al contexto de las variedades abstractas (semi-) Riemannianas

##### REQUISITOS:

- Análisis en varias variables. Diferenciación e integración.
- Sistemas de ecuaciones diferenciales.
- Geometría diferencial de curvas y superficies.
- Álgebra Lineal
- Topología elemental.

Es aconsejable, aunque no imprescindible haber cursado la asignatura de Variedades diferenciables.

##### OBJETIVOS:

- Comprensión y manejo de los conceptos y resultados básicos de la Geometría Riemanniana y Lorentziana.
- Introducir las técnicas del cálculo de variaciones.
- Aplicación a la mecánica
- Aplicación la relatividad general.

##### COMPETENCIAS:

###### Generales

Conocimiento de la noción de variedad (semi) riemanniana y aprendizaje de los conceptos principales.

Conseguir la madurez necesaria para:

- 1) Tener un uso adecuado de las reglas de la lógica en los desarrollos matemáticos
- 2) Ser capaz de "reconocer" lo que no se entiende.
- 3) Ser capaz de reconstruir los detalles de las demostraciones no desarrollados explícitamente en clase.
- 4) Demostrar rigurosamente afirmaciones intuitivamente triviales.
- 5) Comprender y eventualmente utilizar, teoremas que no han sido demostrados en clase.
- 6) Adquirir capacidad crítica frente argumentos falaces o desarrollos innecesarios



# Curso Académico 2018-19

## GEOMETRÍA DIFERENCIAL

### Ficha Docente

#### Transversales:

Apreciar el papel de la geometría Semi- Riemanniana en sus aplicaciones a la física y a la topología de variedades.

#### Específicas:

- Determinación de variedades riemannianas. Ejemplos significativos.
- Conocer bien las definiciones y la manipulación formal sin coordenadas de los elementos básicos de la Geometría Riemanniana, tales como métrica, conexión canónica asociada, curvaturas ...etc.
- Conocer bien los algoritmos en coordenadas para la determinación y manipulación local, los anteriores elementos.
- Percibir el papel de las coordenadas como herramienta para expresar analíticamente y manipular características intrínsecas de variedades riemannianas, que son independientes del sistema de coordenadas utilizado.

#### Otras:

- Comprender el papel de la geometría Lorentziana como modelo de la relatividad general.
- Appreciar el papel de la métrica riemanniana para describir la energía cinética en la formulación lagrangiana de un sistema mecánico simple.

#### CONTENIDOS TEMÁTICOS:

- 1.- Introducción a la Geometría Riemanniana local. Primera Forma Fundamental en superficies. Generalización a variedades Euclídeas . Longitud de una curva. Geometría intrínseca. Estructuras riemannianas en un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Isometrías. Longitud y Energía de una curva. Sistemas holónomos de partículas.
- 2.- Cálculo (local) de variaciones: Geodésicas. Espacio de curvas entre dos puntos fijos. Variaciones. Las geodésicas como Puntos críticos de los operadores Longitud y Energía. Símbolos de Christoffel. Sistema mecánico simple: Función Lagrangiana. Principio de mínima acción. Ecuaciones diferenciales (locales) de la evolución.
- 3.- Variedades Riemannianas: Variedades diferenciables. Revisión del espacio tangente y cotangente. Grupos de Lie: Ejemplos. Estructura Riemanniana. Longitud de curvas. Isometrías Estructura métrica de una variedad Riemanniana. Isometrías. Las geodésicas a revisión. Aplicación exponencial. Carta normal. Geodésicas minimizantes. Completitud geodésica. Teorema de Hopf-Rinow .
- 4.- La conexión Riemanniana: Revisión de los campos de vectores en una variedad. Conexiones afines. Transporte paralelo de vectores. El Tensor de curvatura. La conexión de Levi-Civita. Las geodésicas revisitadas. El caso de las variedades Euclídeas.
- 5.- Curvaturas: El tensor de curvatura (semi-)Riemanniano. Curvaturas seccionales. El tensor de Ricci y Curvatura escalar. Espacios de curvatura constante. Acción propiamente discontinua. Formas espaciales. Curvatura y topología. Enunciados de los teoremas de Hadamar y Bonnet-Myers.
- 6.- Variedades Lorentzianas: Métricas semi-Riemannianas: La conexión canónica. Caso Lorentziano. El Espacio de Minkowski. La Geometría Lorentziana como modelo relativista: Orientación temporal. Causalidad. Tiempo propio. Rayos de luz y partículas inerciales. Paradoja de los gemelos.

#### ACTIVIDADES DOCENTES:

##### Clases teóricas:

2,5 horas  
Exposición de temas teóricos por parte del profesor.

##### Seminarios:

0,5 horas  
Exposición por parte de los alumnos de problemas

##### Clases prácticas:

1 horas  
Cada semana se entregará una lista de problemas, dos de ellos ocultos. El alumno podrá elegir cada tres semanas uno de los problemas ocultos, para entregar a través del Campus Virtual, con el compromiso implícito de salir a resolverlo a la pizarra si así se le pide. De la hora y media semanal de prácticas media, está destinada a la resolución en la pizarra de problemas por los propios alumnos con la ayuda eventual del profesor. La hora restante a la resolución de problemas por el profesor.

##### Trabajos de campo:

##### Prácticas clínicas:

##### Laboratorios:

##### Exposiciones:

##### Presentaciones:

##### Otras actividades:

Entrega "on line" de soluciones a "problemas abiertos"

##### TOTAL:

##### EVALUACIÓN:

Se realizará un examen final con una parte teórica y otra práctica.



# Curso Académico 2018-19

## GEOMETRÍA DIFERENCIAL

### Ficha Docente

La Nota Final, se obtiene como máximo entre la nota del examen E, y la nota ponderada MÁXIMO  $(0,4C + 0,6E, E)$  si  $E > 3$ .

Donde la nota de Curso C corresponde a la calificación de siete problemas. Para obtener nota de curso es necesario haber asistido al menos al 80% de las clases.

En todo caso la calificación final no podrá superar el 5, si  $E < 5$ .

#### **BIBLIOGRAFÍA BÁSICA:**

J. Douglas Moore. Lectures on Differential Geometry. (2009)

M. P. Do Carmo, Geometría Riemanniana, 1988

B. O'Neill Semi-riemannian geometry with applications to relativity, 1983

#### **OTRA INFORMACIÓN RELEVANTE**

Otra información relevante

El profesor tiene una página de la asignatura en el Campus virtual. En ella se pueden consultar

- Notas manuscritas del curso
- Las hojas de problemas propuestos
- Soluciones proporcionadas por los propios alumnos de algunos ejercicios.
- Material didáctico complementario.
- Evolución de la Nota de Curso a lo largo del periodo de clases.