

Estructuras Algebraicas. Practicas no. 1

1) Determinar cuáles son las unidades del anillo de los enteros de Gauss $\mathbb{Z}[i]$, y demostrar que no tiene divisores de cero.

2) Sea A un D.I. y sean $a, b \in A$. Demostrar que los ideales (a) y (b) coinciden si y sólo si existe una unidad $u \in A$ tal que $a = bu$.

3) Demostrar que un ideal es el total si y sólo si contiene una unidad.

4) Demostrar que, en el anillo de los enteros de Gauss, $\mathbb{Z}[i]$, el ideal (3) es primo y el ideal (5) no lo es.

5) Demostrar que, si un anillo tiene un solo ideal maximal, entonces un elemento es una unidad si y sólo si no pertenece al ideal maximal.

6) Para cada uno de los siguientes anillos, determinar todos sus ideales, indicando cuáles son primos y maximales:

a) $\mathbb{Z}_{12}$.

b) $\mathbb{R}^2$.

c) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8$.

7) Demostrar que, en el anillo de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, el conjunto de las funciones que se anulan en un valor dado $a \in \mathbb{R}$ forma un ideal maximal.

8) Sean A y B anillos conmutativos unitarios y supongamos que B es además un dominio de integridad. Demostrar que entonces toda aplicación no nula $f : A \rightarrow B$ que satisfaga

$$f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$$

$$f(a_1 a_2) = f(a_1) f(a_2)$$

para cualesquiera $a_1, a_2 \in A$ es necesariamente un homomorfismo de anillos unitarios. Dar un ejemplo en el que esto falle cuando se quita la hipótesis de que B es D.I.

9) Demostrar que, si A es un cuerpo, se tiene que todo homomorfismo de anillos $f : A \rightarrow B$ es inyectivo.

10) Demostrar que la aplicación

$$a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

es un homomorfismo de $\mathbb{C}$ al anillo de las matrices reales 2×2 , y que es un isomorfismo sobre la imagen.

11) Determinar todos los homomorfismos de anillos de $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ a $\mathbb{Z}_2$.

12) Determinar todos los homomorfismos de anillos de $\mathbb{Z}[i]$ a $\mathbb{Z}[i]$ y de $\mathbb{Z}[i]$ a $\mathbb{Z}$.

13) Si $m, n \in \mathbb{N}$ son primos entre sí, demostrar que los anillos $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ y $\mathbb{Z}_{mn}$ son isomorfos.