



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE  
MADRID

# ECONOMETRÍA APLICADA



Facultad de Ciencias  
Económicas y Empresariales

2

## ANÁLISIS UNIVARIANTE DE SERIES TEMPORALES

José Alberto Mauricio

Departamento de Fundamentos del Análisis Económico II

EctrAp-JAM-TR2.pdf

**COPYRIGHT © 2012-2016 José Alberto Mauricio**

E-mail: [jamauri@ccee.ucm.es](mailto:jamauri@ccee.ucm.es)

**Versión 4.0 - Septiembre 2016**

# 2

## **ANÁLISIS UNIVARIANTE DE SERIES TEMPORALES**

### **BIBLIOGRAFÍA**

Box, Jenkins, Reinsel (2008): Capítulos 2-9, 13.

\* Peña (2010): Capítulos 1-12, 16.

\* Resumen en Peña, D. (1995), *Estadística - Modelos y Métodos 2. Modelos Lineales y Series Temporales* (2ª Edición Revisada), Alianza, Cap.15.

# CONTENIDO

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
2.1 Objetivos	1
2.2 Series Univariantes	1
2.3 Series Estacionarias y Series No Estacionarias	3
2.4 Modelos Univariantes	7
<b>Identificación</b>	<b>12</b>
2.5 Transformaciones de Series No Estacionarias	13
2.6 Propiedades Muestrales de Series Estacionarias	21
2.7 Modelos Estacionarios	37
2.8 Modelos Multiplicativos	65
2.9 Modelos No Estacionarios	69
2.10 Identificación - Resumen	70

<b>Estimación</b> .....	<b>73</b>
2.11 Estimación - Resumen .....	73
<b>Diagnosís</b> .....	<b>80</b>
2.12 Diagnosís - Resumen .....	80
<b>Previsión</b> .....	<b>84</b>
2.13 Previsión con Modelos ARIMA .....	84
2.14 Previsión - Aplicaciones .....	92
<b>Análisis de Intervención</b> .....	<b>97</b>
2.15 Análisis de Intervención - Aplicaciones .....	99

## INTRODUCCIÓN

### 2.1 OBJETIVOS

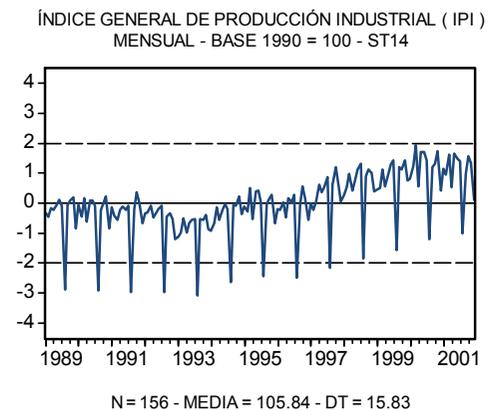
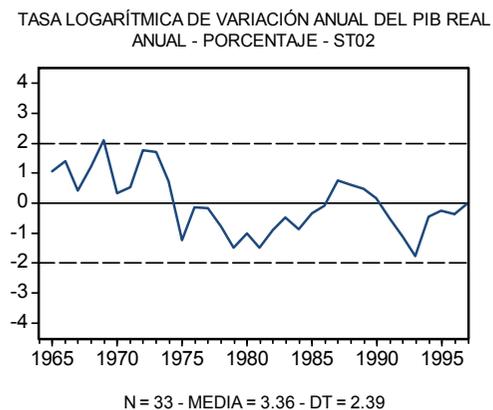
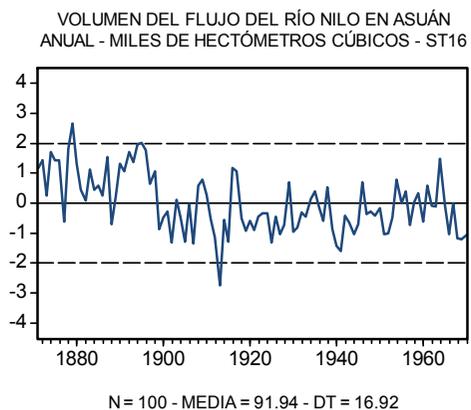
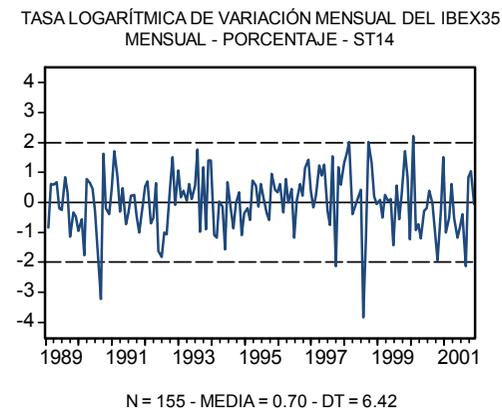
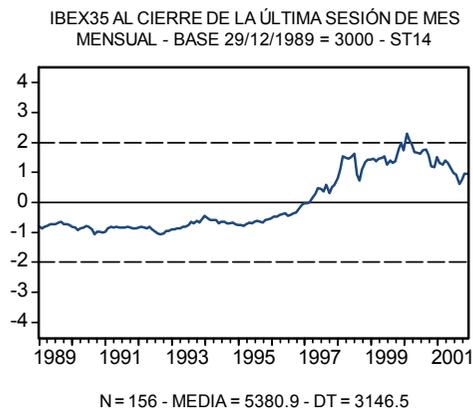
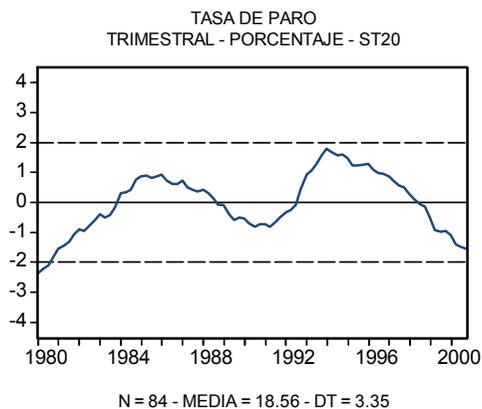
**Describir** la evolución temporal observada de una única característica de interés de cierta entidad observable, y **prever** la evolución futura (desconocida) a corto plazo de dicha característica, utilizando tan sólo información (conocida) sobre su pasado. Esta información constituye lo que se conoce como una **serie temporal univariante**.

### 2.2 SERIES UNIVARIANTES

Una **serie temporal univariante** es una secuencia de  $N$  observaciones (datos), ordenadas y equidistantes cronológicamente, sobre una única característica de cierta entidad observable en diferentes momentos.

Una serie temporal univariante suele representarse como  $y_1, y_2, \dots, y_N$ ,  $\mathbf{y} \equiv [y_1, y_2, \dots, y_N]'$ ,  $(y_t)_{t=1}^N$ , ó  $y_t$  ( $t = 1, \dots, N$ ), donde  $y_t$  es la observación número  $t$  ( $1 \leq t \leq N$ ) de la serie y  $N$  es el número de observaciones de que consta la serie completa (su tamaño o longitud).

**FIGURA 2.1**  
Series Temporales Univariantes



## 2.3 SERIES ESTACIONARIAS Y SERIES NO ESTACIONARIAS

Una **serie temporal** es **estacionaria en media** cuando su evolución presenta un nivel medio que es constante.

Una **serie temporal** es **estacionaria en varianza** cuando es estacionaria en media y, además, su evolución presenta una dispersión constante alrededor de su nivel medio.

**Observación 1:** Suele decirse que una serie es estacionaria (sin más calificativos) cuando lo es en varianza. Algunos términos asociados con la **estacionariedad** son **estabilidad**, **homogeneidad**, **equilibrio** y **ausencia de tendencia**.

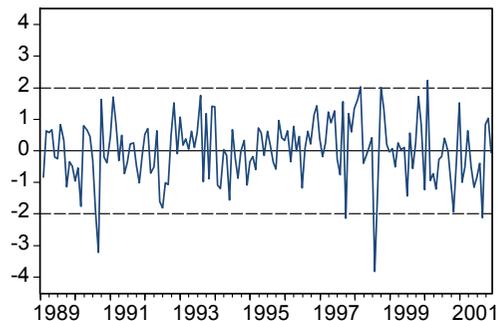
Una **serie temporal** es **no estacionaria en media** cuando su nivel medio no es constante.

Una **serie temporal** es **no estacionaria en varianza** [i] cuando es no estacionaria en media, o bien [ii] cuando su dispersión alrededor de su nivel medio no es constante, o bien [iii] cuando se dan ambas circunstancias al mismo tiempo.

**Observación 2:** Los tipos de no estacionariedad más frecuentes son los que tienen que ver con el caso [i] (incluyendo la **estacionalidad**) y con el caso [iii] de la no estacionariedad en varianza. Suele decirse que una serie es no estacionaria (sin más calificativos) cuando no es estacionaria por un sólo motivo o por varios al mismo tiempo. Algunos términos asociados con la **no estacionariedad** son **inestabilidad**, **heterogeneidad**, **desequilibrio** y **tendencia**. Muchas series que son no estacionarias pueden convertirse en series estacionarias mediante la aplicación de transformaciones sencillas.

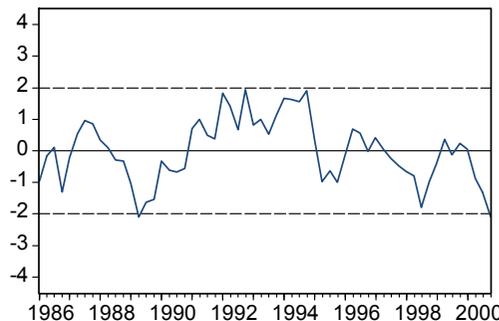
## FIGURA 2.2 Series Temporales Estacionarias

TASA LOGARÍTMICA DE VARIACIÓN MENSUAL DEL IBEX35  
MENSUAL - PORCENTAJE - ST14



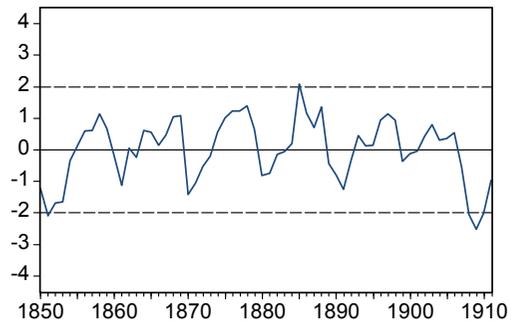
N = 155 - MEDIA = 0.70 - DT = 6.42

DIFERENCIAL DE TIPOS DE INTERÉS B-F EN EEUU  
TRIMESTRAL - PUNTOS PORCENTUALES - ST13



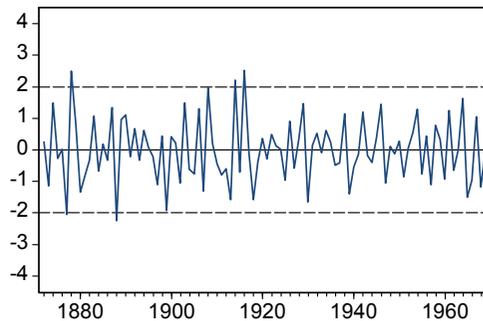
N = 60 - MEDIA = 0.65 - DT = 0.85

VENTAS DE PIELES DE VISÓN - HUDSON'S BAY COMPANY  
ANUAL - LOGARITMOS - ST08



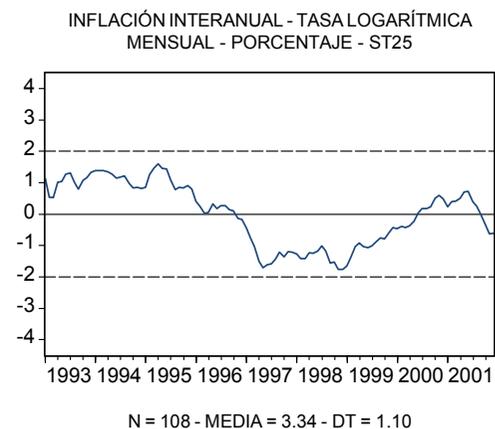
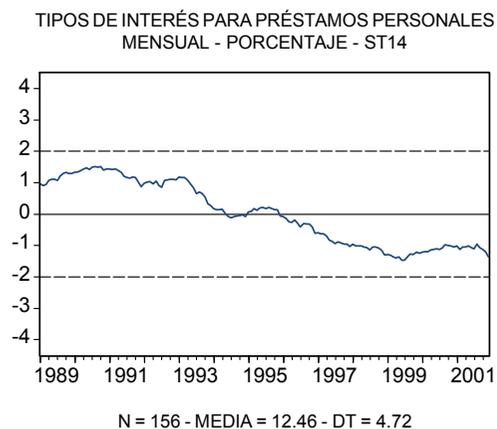
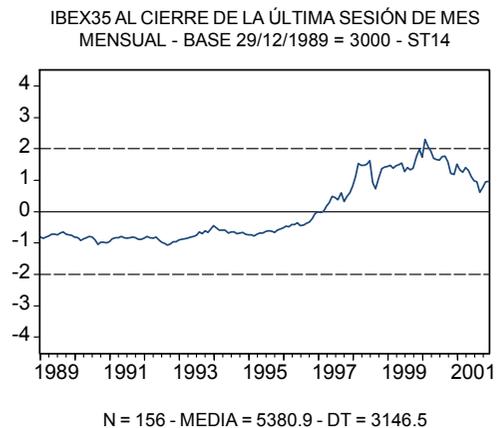
N = 62 - MEDIA = 10.79 - DT = 0.40

VARIACIÓN ANUAL DEL FLUJO DEL RÍO NILO EN ASUÁN  
MILES DE HECTÓMETROS CÚBICOS - ST16

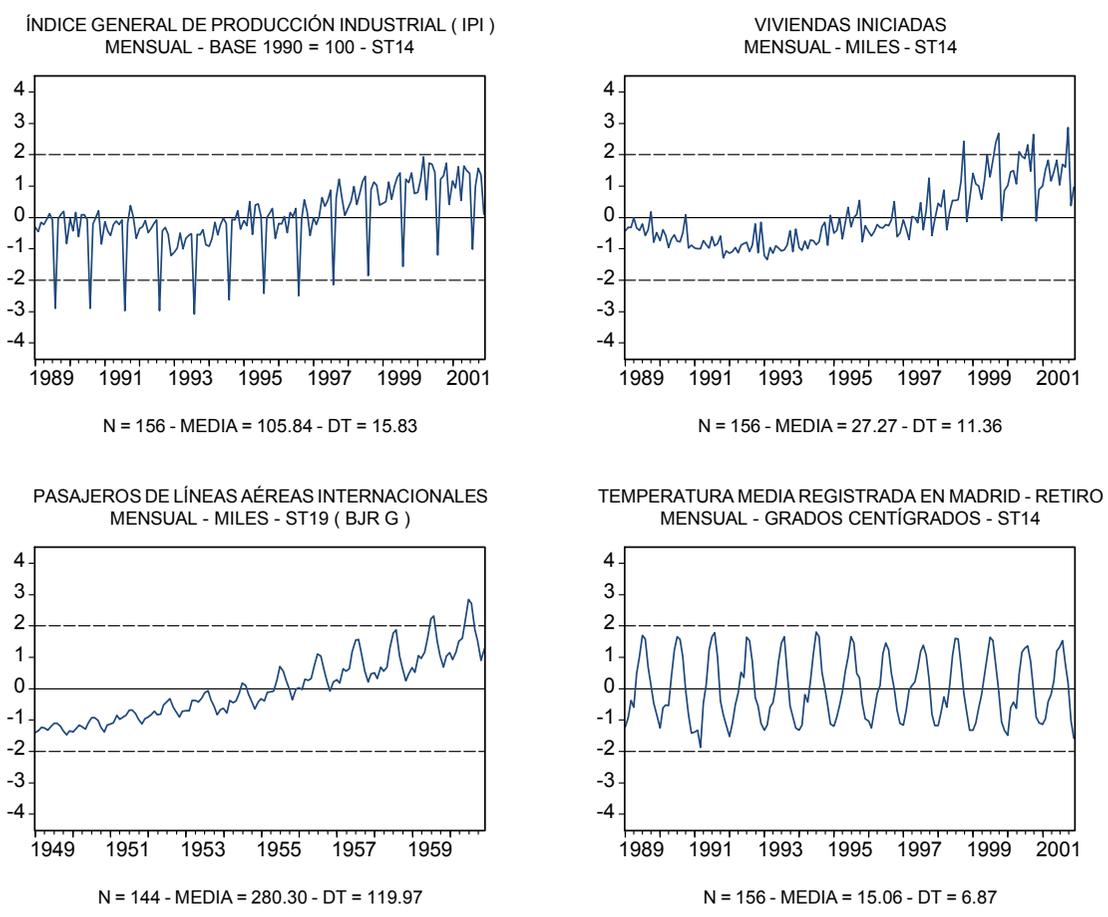


N = 99 - MEDIA = -0.38 - DT = 16.81

**FIGURA 2.3**  
Series Temporales No Estacionarias



## FIGURA 2.4 Series Temporales Estacionales



## 2.4 MODELOS UNIVARIANTES

### Modelo de Ruido Blanco - White Noise

En este modelo se supone que una serie estacionaria  $\mathbf{y} \equiv [y_1, y_2, \dots, y_N]'$  es una realización particular de un vector  $\mathbf{A} \equiv [A_1, A_2, \dots, A_N]'$  de variables aleatorias IID (**idéntica e independientemente distribuidas**) con media 0 y varianza  $\sigma_A^2 > 0$ . En un modelo de ruido blanco **Normal** o **Gaussiano** se supone, además, que cada  $A_t$  sigue una distribución Normal.

**Observación 3:** Una secuencia genérica  $(A_t) \equiv (\dots, A_{-1}, A_0, A_1, \dots)$  de variables aleatorias IID con media 0 y varianza  $\sigma_A^2 > 0$  se denomina un **proceso** de ruido blanco y se representa como  $(A_t) \sim \text{IID}(0, \sigma_A^2)$ . Cuando, además, cada  $A_t$  sigue una distribución Normal, la secuencia  $(A_t)$  es un **proceso** de ruido blanco Normal o Gaussiano, que se representa como  $(A_t) \sim \text{NIID}(0, \sigma_A^2)$ .

### Modelo AR(1) - Autorregresivo de Orden 1

En este modelo se supone que una serie estacionaria  $\mathbf{y} \equiv [y_1, y_2, \dots, y_N]'$  es una realización particular de un vector  $\mathbf{Y} \equiv [Y_1, Y_2, \dots, Y_N]'$  de variables aleatorias tales que

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + A_t \quad (t = 1, 2, \dots, N), \quad [1]$$

donde  $\mu$  y  $\phi_1$  son parámetros,  $|\phi_1| < 1$  (**estacionariedad**), y  $(A_t) \sim \text{IID}(0, \sigma_A^2)$ .

### Modelo AR(2) - Autorregresivo de Orden 2

En este modelo se supone que una serie estacionaria  $\mathbf{y} \equiv [y_1, y_2, \dots, y_N]'$  es una realización particular de un vector  $\mathbf{Y} \equiv [Y_1, Y_2, \dots, Y_N]'$  de variables aleatorias tales que

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + A_t \quad (t = 1, 2, \dots, N), \quad [2]$$

donde  $\mu$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son parámetros, las dos raíces de la ecuación  $1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 = 0$  están fuera del círculo unitario (**estacionariedad**), y  $(A_t) \sim \text{IID}(0, \sigma_A^2)$ .

### Modelo MA(1) - Media-Móvil de Orden 1

En este modelo se supone que una serie estacionaria  $\mathbf{y} \equiv [y_1, y_2, \dots, y_N]'$  es una realización particular de un vector  $\mathbf{Y} \equiv [Y_1, Y_2, \dots, Y_N]'$  de variables aleatorias tales que

$$Y_t = \mu + A_t - \theta_1 A_{t-1} \quad (t = 1, 2, \dots, N), \quad [3]$$

donde  $\mu$  y  $\theta_1$  son parámetros,  $|\theta_1| < 1$  (**invertibilidad**), y  $(A_t) \sim \text{IID}(0, \sigma_A^2)$ .

### Modelo de Paseo Aleatorio - Random Walk

En este modelo se supone que una serie **no** estacionaria  $\mathbf{y} \equiv [y_1, y_2, \dots, y_N]'$  es una

realización particular de un vector  $\mathbf{Y} \equiv [Y_1, Y_2, \dots, Y_N]'$  de variables aleatorias tales que

$$Y_t = \mu + Y_{t-1} + A_t \quad (t = 1, 2, \dots, N), \quad [4]$$

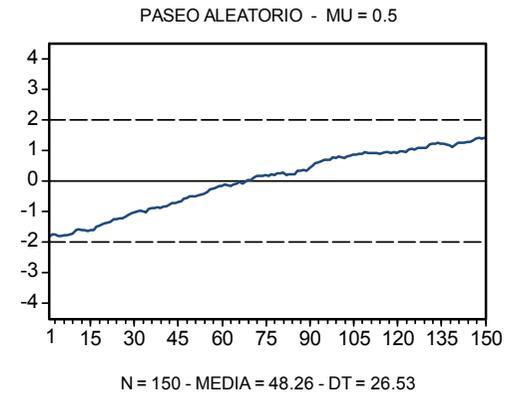
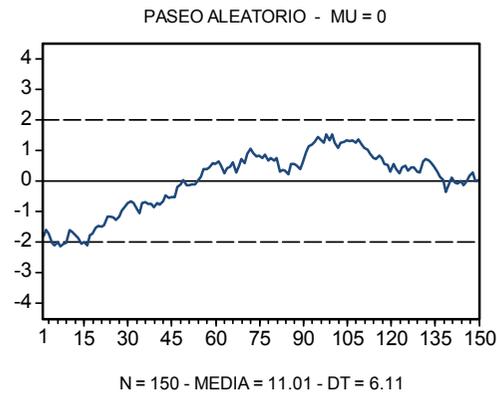
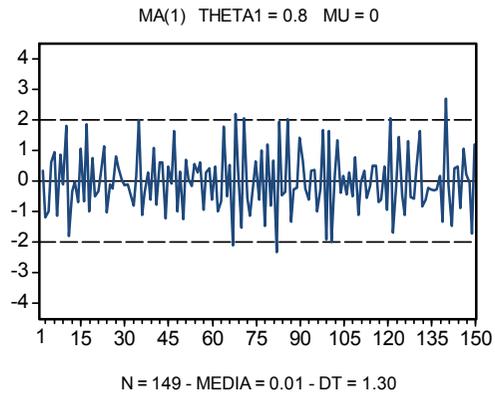
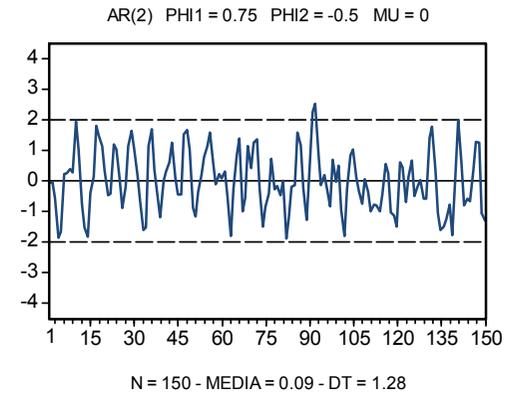
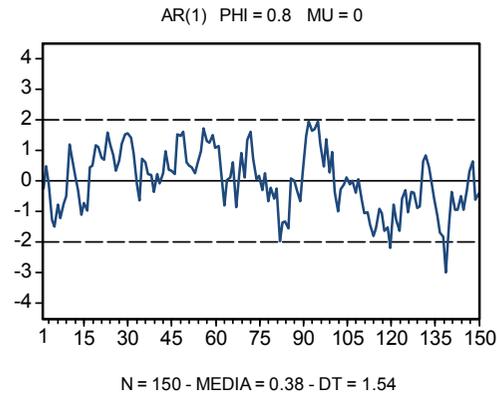
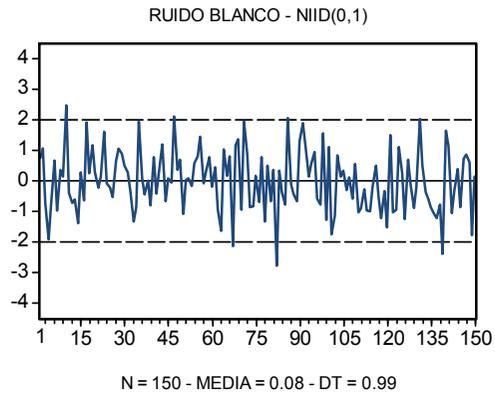
donde  $\mu$  es un parámetro (que puede ser igual a cero), y  $(A_t) \sim \text{IID}(0, \sigma_A^2)$ .

**Observación 4:** Un paseo aleatorio es un modelo AR(1) con  $\phi_1 = 1$ , es decir, un modelo AR(1) **no** estacionario. [Nótese que cuando  $\phi_1 = 1$ , la **ecuación característica**  $1 - \phi_1 x = 0$  asociada con un modelo AR(1) tiene una **raíz unitaria** ( $x^* = 1$ ).] Por otro lado, un paseo aleatorio puede escribirse como  $Y_t - Y_{t-1} = \mu + A_t$ , de manera que una serie temporal  $y_t$  ( $t = 1, \dots, N$ ) **no** estacionaria sigue un paseo aleatorio cuando su **diferencia regular de orden 1**  $w_t \equiv y_t - y_{t-1}$  ( $t = 2, \dots, N$ ) es una realización particular de un vector de variables aleatorias  $\text{IID}(\mu, \sigma_A^2)$  [donde el parámetro  $\mu$  puede valer cero, en cuyo caso la serie  $w_t$  ( $t = 2, \dots, N$ ) seguiría un modelo de ruido blanco].

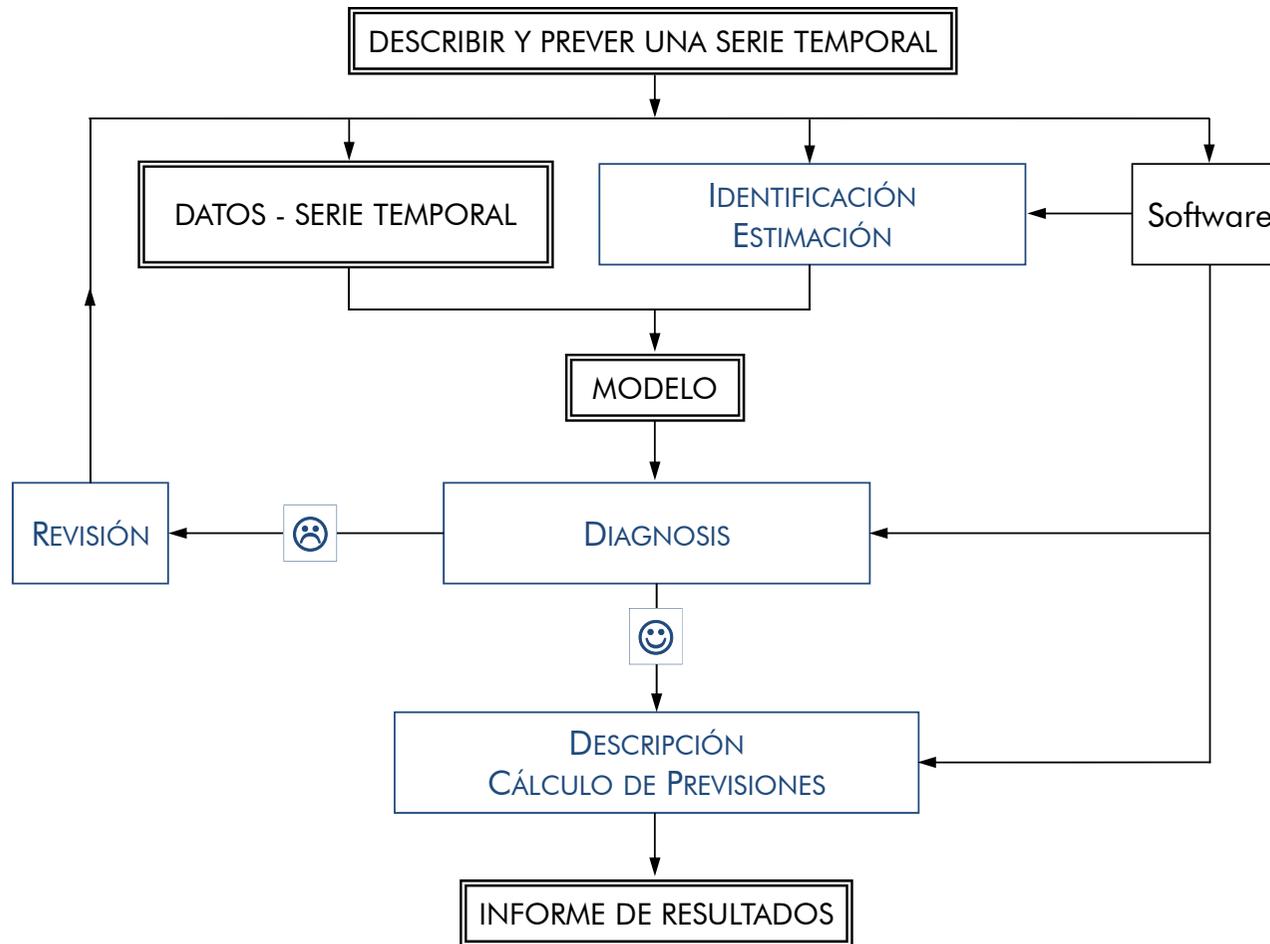
**Observación 5:** Un paseo aleatorio es el modelo más sencillo para una **serie integrada de orden 1**, ó **I(1)** (es decir, una serie no estacionaria cuya diferencia regular de orden 1 es una serie estacionaria); por extensión de esta terminología, una serie estacionaria suele denominarse una serie **serie integrada de orden 0**, ó **I(0)**. La notación  $(y_t) \sim \text{I}(1)$  significa que  $(y_t)_{t=1}^N$  es una serie I(1) (integrada de orden 1), mientras que la notación  $(y_t) \sim \text{I}(0)$  significa que  $(y_t)_{t=1}^N$  es una serie estacionaria (integrada de orden 0).

**Observación 6:** Las seis series de la Figura 2.5 han sido **simuladas** (generadas artificialmente) a partir de la ecuación que define el modelo correspondiente, utilizando como punto de partida una secuencia de 150 números aleatorios independientes generados con EViews a partir de una distribución  $N(0,1)$  (una serie simulada a partir de un modelo de ruido blanco con  $\sigma_A^2 = 1$ ). Todas estas series se encuentran en el archivo **ST26-Sim-Series.wf1**, donde se describe explícitamente la ecuación empleada para generar cada una de ellas.

**FIGURA 2.5**  
Series Temporales Simuladas



**FIGURA 2.6**  
La Metodología del Análisis Univariante de Series Temporales



## IDENTIFICACIÓN

La **identificación** de un modelo provisional o tentativo para una serie temporal consiste en el planteamiento de ciertas hipótesis teóricas (estadísticas y matemáticas) que se espera resuman adecuadamente las **propiedades muestrales** más importantes de dicha serie.

La propiedad fundamental de una serie es la que tiene que ver con su carácter estacionario o no estacionario, según el caso.

Cuando una **serie** es **estacionaria**, sus propiedades muestrales más importantes son [i] su **nivel medio**, [ii] su **dispersión** y [iii] su **dinámica** (**inercia** o **memoria**), que pueden resumirse conjuntamente a través de un **modelo univariante estacionario**.

Cuando una **serie** es **no estacionaria**, un enfoque útil consiste en aplicarle primero ciertas **transformaciones** para convertirla en una serie estacionaria y proceder después como en el caso de series estacionarias. Un modelo que se obtiene al juntar dichas transformaciones con un modelo univariante estacionario para la serie transformada (estacionaria) suele denominarse un **modelo univariante no estacionario** para la serie original.

## 2.5 TRANSFORMACIONES DE SERIES NO ESTACIONARIAS

Aunque existen otras posibilidades, los tipos de no estacionariedad que se observan con más frecuencia en la práctica son los que se indican en la Tabla 2.1.

TABLA 2.1 Tipos Frecuentes de No Estacionariedad			
Nivel Medio General	Estacionalidad	Dispersión No Constante	Dispersión Constante
No Constante	No	A	C
	Si	B	D
Constante	No	F - Poco Frecuente	E - Estacionariedad
	Si	G - Poco Frecuente	H

**Observación 7:** **Ejemplo A:** Figura 2.1 IBEX 35. **Ejemplo B:** Figura 2.4 Viviendas Iniciadas. **Ejemplo C:** Figura 2.3 Inflación Interanual. **Ejemplo D:** Figura 2.1 Tasa de Paro. **Ejemplo H:** Figura 2.4 Temperatura Media en Madrid.

### 2.5.1 Estabilización de la Dispersión - Transformación Logarítmica

Cuando la dispersión de una serie temporal no estacionaria  $y_t$  ( $t = 1, \dots, N$ ) no es constante porque su **dispersión local** es aproximadamente **proporcional** a su **nivel local**, la dispersión de la **serie transformada logarítmicamente**  $\dot{y}_t = \ln y_t$  ( $t = 1, \dots, N$ ) suele ser razonablemente estable.

**Observación 8:** La justificación teórica de esta posibilidad es algo laboriosa, pero se puede ilustrar con ejemplos sobre el efecto de la transformación logarítmica en algunas series reales (Figura 2.7).

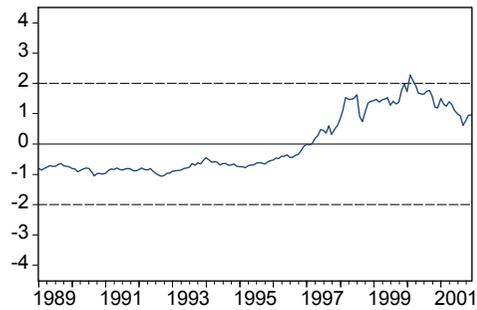
**Observación 9:** La transformación logarítmica es un caso particular de la llamada **Transformación de Box-Cox**, cuya fórmula general puede escribirse como

$$\dot{y}_t \equiv \frac{y_t^m - 1}{m}, \text{ con } |m| \leq 2.$$

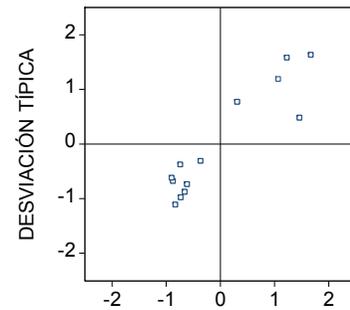
Dado que  $\lim_{m \rightarrow 0} [(y_t^m - 1) / m] = \ln y_t$ , la elección  $m = 0$  proporciona la transformación  $\dot{y}_t = \ln y_t$ . Para otros valores del parámetro  $m$ , la fórmula general suele escribirse simplemente como  $\dot{y}_t = y_t^m$ .

**Observación 10:** Aunque en la transformación general de Box-Cox caben muchas otras posibilidades, con frecuencia la dispersión no constante de series de los tipos A y B en la Tabla 2.1 se puede estabilizar aplicándole a dichas series simplemente una transformación logarítmica. En la práctica, la decisión sobre cómo transformar una serie para estabilizar su dispersión, suele reducirse a decidir si la serie requiere una transformación logarítmica a la vista (Figura 2.7) de su gráfico temporal y de su **gráfico desviación típica-media** (programa PRG05-DTM.prg para EViews).

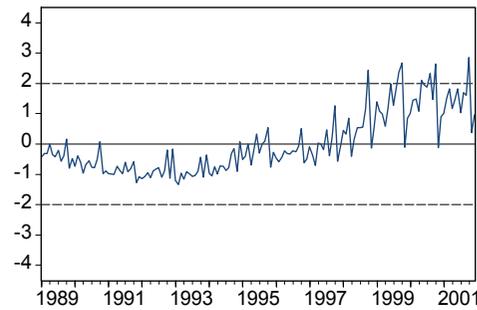
**FIGURA 2.7**  
Transformación Logarítmica - Gráficos Desviación Típica-Media



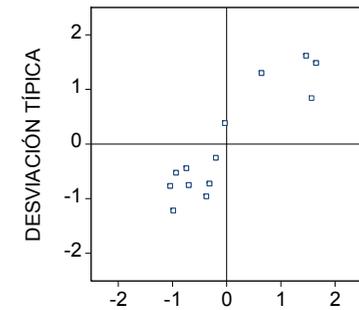
IBEX35 - TIPO A



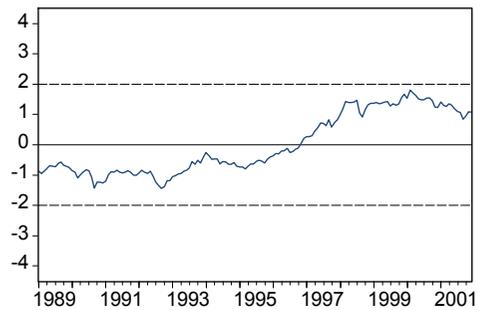
MEDIA



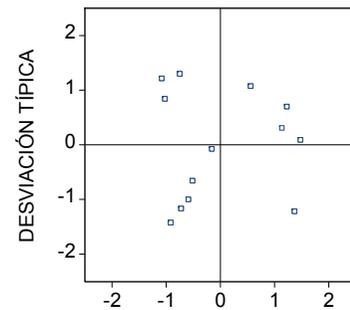
VIVIENDAS INICIADAS - TIPO B



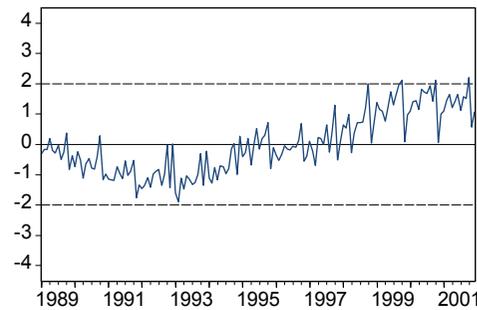
MEDIA



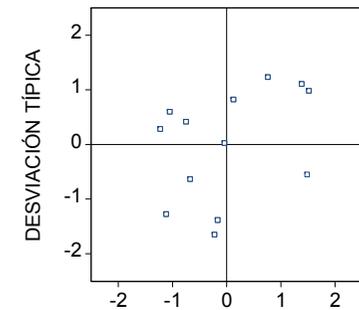
LOG( IBEX35 ) - TIPO C



MEDIA



LOG( VIVIENDAS INICIADAS ) - TIPO D



MEDIA

### 2.5.2 Operador de Retardo

El **operador de retardo** se representa con el símbolo  $B$  (a veces  $L$ , del inglés *Backshift* o *Lag operator*) y se define de acuerdo con que

$$BX_t \equiv X_{t-1}, B^d X_t \equiv X_{t-d} \quad (d \geq 1 \text{ entero}), \quad [5]$$

donde  $X_t$  es una variable (real o aleatoria) referida a un momento  $t$  determinado.

### 2.5.3 Estabilización del Nivel Medio General - Diferenciación Regular

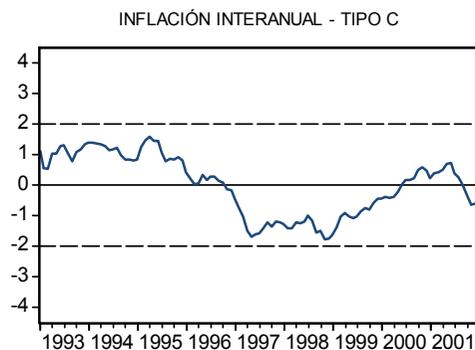
El operador **diferencia regular de orden  $d$**  ( $d \geq 1$  entero) se representa con el símbolo  $\nabla^d$  (a veces  $\Delta^d$ ) y se define como  $\nabla^d \equiv (1 - B)^d$  (donde  $B$  es el operador de retardo de 2.5.2), de manera que

$$\nabla X_t \equiv X_t - X_{t-1}, \nabla^2 X_t \equiv X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}, \dots,$$

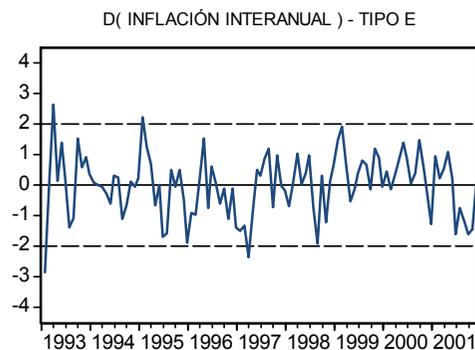
donde  $X_t$  es una variable (real o aleatoria) referida a un momento  $t$  determinado.

**Observación 11:** En muchas ocasiones, la **tendencia** o nivel **medio general no constante** de series de los tipos C y D en la Tabla 2.1, se puede transformar en un nivel medio general razonablemente estable aplicándole a la serie correspondiente  $d \geq 1$  diferencias regulares (en general, no más de 2). La justificación teórica de esta posibilidad es algo laboriosa, pero se puede ilustrar con ejemplos sobre el efecto de la diferenciación regular en algunas series reales.

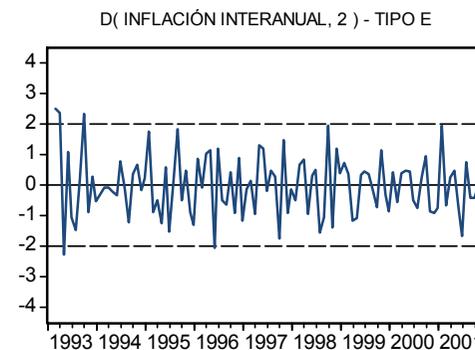
**FIGURA 2.8**  
Diferenciación Regular de Series con Tendencia



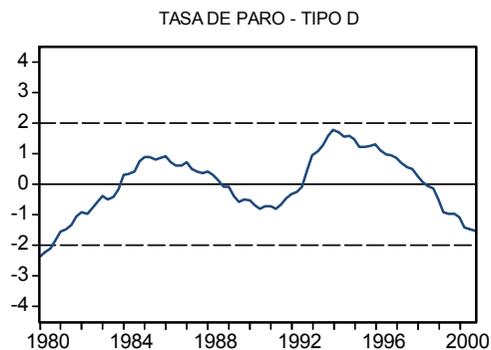
N = 108 - MEDIA = 3.34 - DT = 1.10



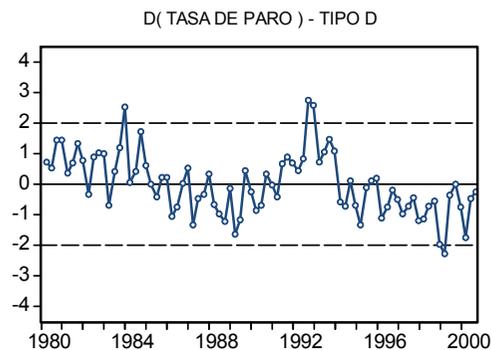
N = 107 - MEDIA = -0.02 - DT = 0.21



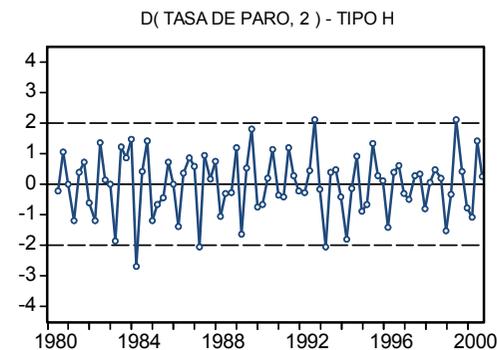
N = 106 - MEDIA = 0.01 - DT = 0.24



N = 84 - MEDIA = 18.56 - DT = 3.35



N = 83 - MEDIA = 0.03 - DT = 0.63



N = 82 - MEDIA = -0.01 - DT = 0.57

### 2.5.4 Desestacionalización - Diferenciación Estacional

El operador **diferencia estacional de periodo  $S$  y orden  $D$**  ( $D \geq 1$  entero) se representa con el símbolo  $\nabla_S^D$  (a veces  $\Delta_S^D$ ) y se define como  $\nabla_S^D \equiv (1 - B^S)^D$  (donde  $B$  es el operador de retardo de 2.5.2), de manera que, en particular (cuando  $D = 1$ ),

$$\nabla_S X_t \equiv X_t - X_{t-S},$$

donde  $X_t$  es una variable (real o aleatoria) referida a un momento  $t$  determinado.

**Observación 12:** En los casos de series estacionales mensuales ( $S = 12$  meses) y trimestrales ( $S = 4$  trimestres),  $\nabla_{12}$  y  $\nabla_4$  suelen denominarse **diferencias anuales**. Nótese que  $\nabla_S \equiv 1 - B^S \neq (1 - B)^S \equiv \nabla^S$  para todo  $S > 1$ .

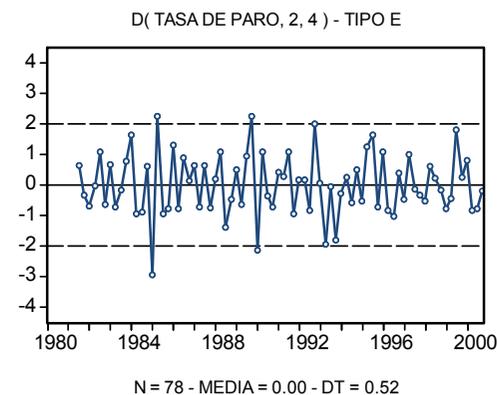
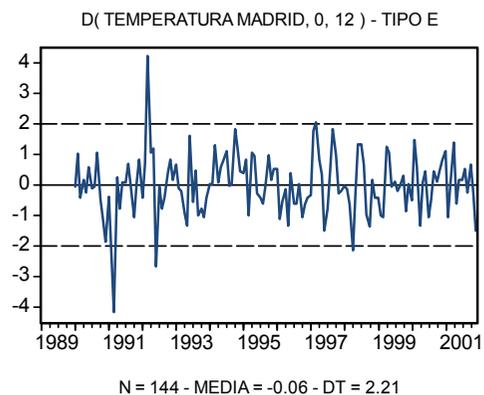
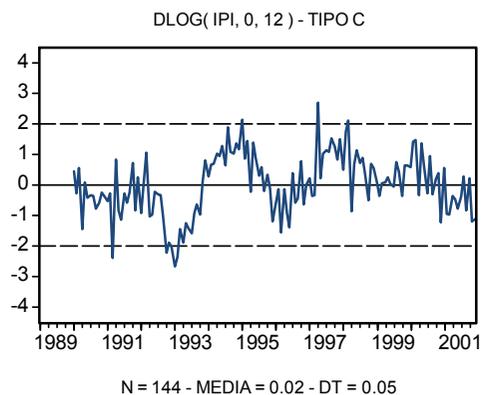
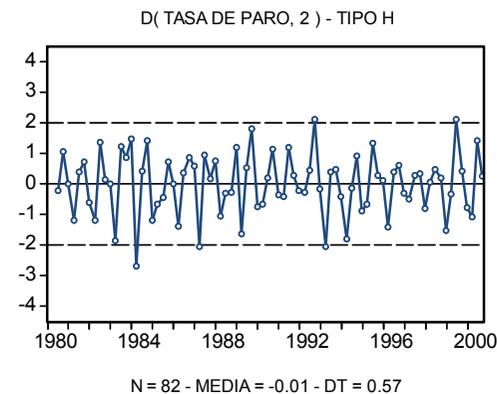
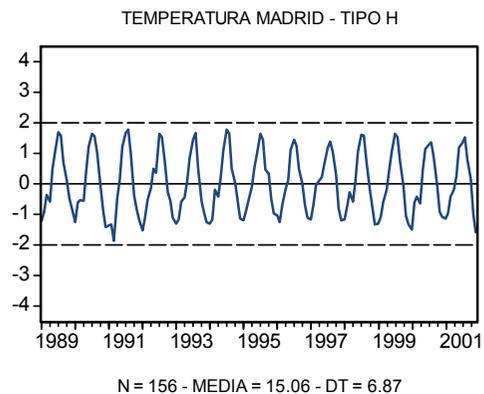
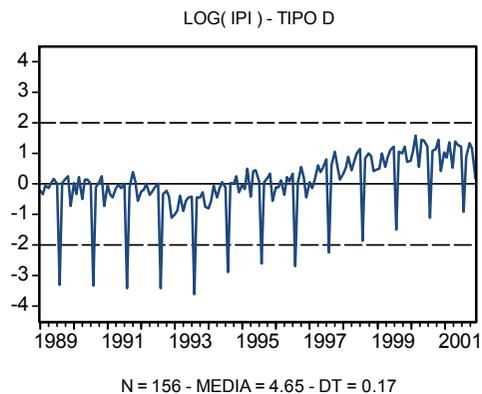
**Observación 13:** Muchas series estacionales de los tipos D y H en la Tabla 2.1, se pueden transformar en series sin estacionalidad aplicándoles una única diferencia estacional. La justificación teórica de esta posibilidad es algo laboriosa, pero se puede ilustrar con ejemplos sobre el efecto de la diferenciación estacional en algunas series reales.

**Observación 14:** En conclusión, si una serie temporal  $y_t$  ( $t = 1, \dots, N$ ) es no estacionaria por diversos motivos, entonces una serie transformada del tipo

$$w_t \equiv \nabla^d \nabla_S^D y_t \quad (\text{que consta de } n \equiv N - d - DS \text{ observaciones})$$

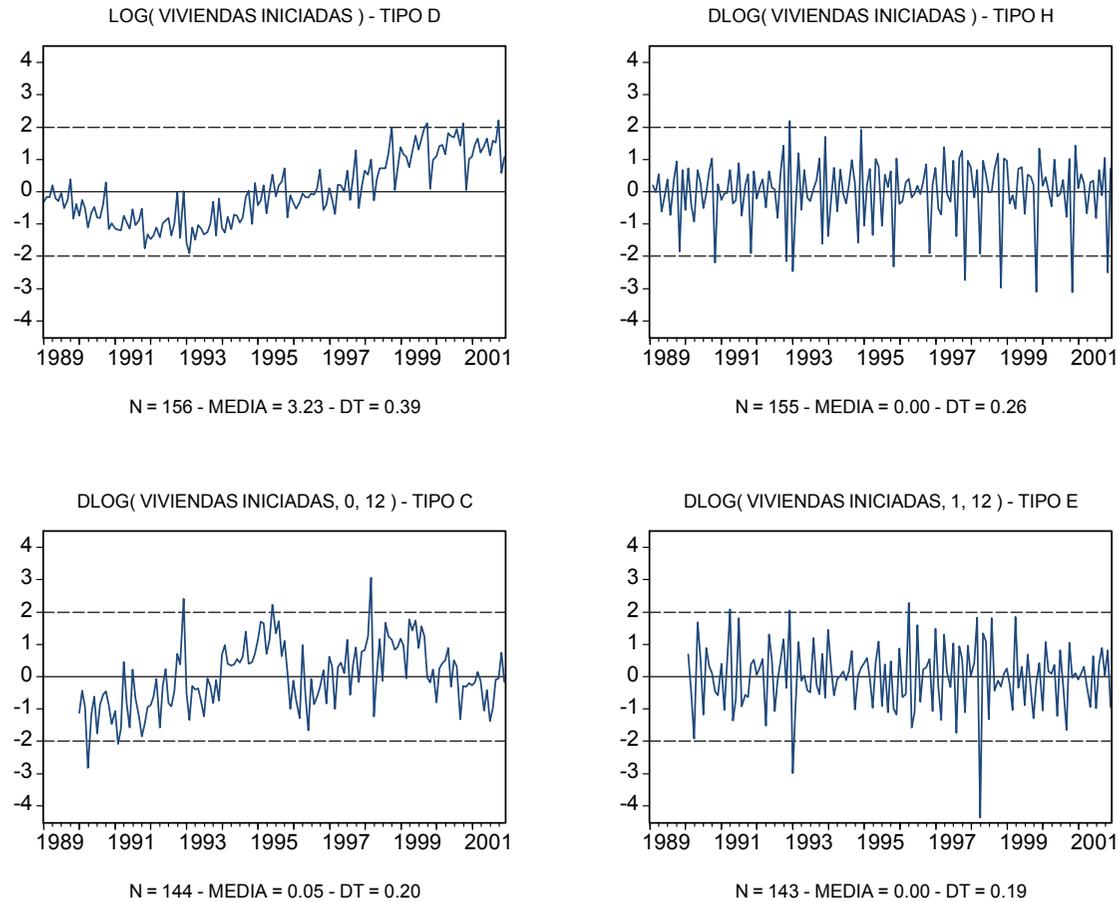
puede ser razonablemente estacionaria si la transformación de Box-Cox (con frecuencia ninguna, o bien un logaritmo neperiano), el número  $d$  de diferencias regulares (en muchos casos 0, 1 ó 2), y el número  $D$  de diferencias estacionales o anuales (en muchos casos 0 ó 1), se escogen adecuadamente (Figura 2.10).

**FIGURA 2.9**  
Diferenciación Anual de Series Estacionales



**FIGURA 2.10**

Efectos de Diferentes Transformaciones sobre una Serie Estacional Mensual



## 2.6 PROPIEDADES MUESTRALES DE SERIES ESTACIONARIAS

### 2.6.1 Nivel y Dispersión

La **media muestral** y la **varianza muestral** de una serie temporal  $\mathbf{y} \equiv [y_1, y_2, \dots, y_N]'$  son

$$\bar{y} \equiv \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y_t \quad \text{y} \quad s_y^2 \equiv \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y_t - \bar{y})^2. \quad [6]$$

La **desviación típica muestral** ( $s_y$ ) de la serie es la raíz cuadrada de la varianza muestral.

**Observación 15:** Cuando en un modelo para una serie temporal estacionaria (Apartados 2.4 y 2.7) se supone que  $\mathbf{y} \equiv [y_1, y_2, \dots, y_N]'$  es una realización particular de un vector  $\mathbf{Y} \equiv [Y_1, Y_2, \dots, Y_N]'$  de variables aleatorias con **media teórica**  $\mu_Y \equiv E[Y_t]$  y **varianza teórica**  $\sigma_Y^2 \equiv \text{Var}[Y_t]$  **constantes**, se puede contrastar la significación de  $\mu_Y$  con un estadístico  $t$  cuyo valor calculado es

$$t = \frac{\bar{y}}{\sqrt{s_y^2 / N}}$$

y cuya distribución (aproximada), bajo la hipótesis nula de que  $\mu_Y = 0$ , es una  $t(N-1)$ .

### 2.6.2 Dinámica I - Autocovarianza

La **autocovarianza muestral de orden  $k$**  ( $k \geq 0$ ) de una serie temporal  $\mathbf{y} \equiv [y_1, y_2, \dots, y_N]'$  es la covarianza muestral entre las series  $y_t$  e  $y_{t+k}$  ( $t = 1, \dots, N-k$ ), o, equivalentemente,

entre las series  $y_{t-k}$  e  $y_t$  ( $t = k + 1, \dots, N$ ):

$$c_k \equiv \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y}) \equiv \frac{1}{N} \sum_{t=k+1}^N (y_{t-k} - \bar{y})(y_t - \bar{y}) \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad [7]$$

**Observación 16:** La autocovarianza muestral de orden cero ( $c_0$ ) es exactamente la varianza muestral ( $s_y^2$ ) de la serie considerada. Para  $k > 0$ , la autocovarianza muestral de orden  $k$  mide el grado medio de asociación lineal entre cualquier par de componentes de una serie separados entre sí por  $k$  períodos (es decir, el grado medio de influencia de cualquier observación  $y_t$  sobre  $y_{t+k}$ , o, equivalentemente, el grado medio de dependencia de cualquier observación  $y_t$  con respecto a  $y_{t-k}$ ). La secuencia  $c_0, c_1, c_2, \dots$  se denomina la **Función de Autocovarianza Muestral** de la serie temporal  $y_1, y_2, \dots, y_N$ .

### 2.6.3 Dinámica II - Autocorrelación Simple

La **autocorrelación simple muestral de orden  $k$**  ( $k > 0$ ) de una serie  $\mathbf{y} \equiv [y_1, y_2, \dots, y_N]'$  es una medida **total** o **bruta** del grado de correlación lineal entre cualquier par de componentes de dicha serie separados entre sí por  $k$  períodos. Habitualmente (Observación 16),

$$r_k \equiv \text{C}\hat{\text{o}}\text{r}\text{r}[y_{t-k}, y_t] = \frac{c_k}{c_0} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (\Rightarrow r_0 = 1). \quad [8]$$

**Observación 17:** A diferencia de las autocovarianzas, las autocorrelaciones carecen de unidades de medida y sus valores están comprendidos entre  $+1$  y  $-1$ . La secuencia  $r_1, r_2, \dots$  se denomina la **Función de Autocorrelación Simple (ACF)**

**Muestral** de la serie temporal  $y_1, y_2, \dots, y_N$ . La representación gráfica de la ACF muestral de una serie se denomina el **correlograma** de dicha serie. La ACF muestral es el instrumento básico para describir en la práctica la **duración** y la **intensidad** de la **dinámica** (**inercia** o **memoria**) de una serie.

**Observación 18:** Cuando en un modelo para una serie temporal estacionaria (Apartados 2.4 y 2.7) se supone que  $\mathbf{y} \equiv [y_1, y_2, \dots, y_N]'$  es una realización particular de un vector  $\mathbf{Y} \equiv [Y_1, Y_2, \dots, Y_N]'$  de variables aleatorias con **media teórica**  $\mu_Y \equiv E[Y_t]$  y **autocovarianzas teóricas**  $\gamma_k \equiv \text{Cov}[Y_t, Y_{t+k}] \equiv \text{Cov}[Y_{t-k}, Y_t]$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) **constantes**, se puede contrastar la significación individual de cualquier **autocorrelación simple teórica**  $\rho_k \equiv \gamma_k / \gamma_0$  utilizando un estadístico cuyo valor calculado es  $r_k / \sqrt{1/N}$  y cuya distribución (aproximada), bajo la hipótesis nula de que  $\rho_k = 0$ , es una  $N(0, 1)$  (por lo que suele considerarse que cualquier  $\rho_k$  ( $k \geq 1$ ) es *individualmente* significativa al 5% cuando  $|r_k| > 1.96/\sqrt{N}$ ). Por otro lado, para decidir si las  $K$  primeras autocorrelaciones simples teóricas son *conjuntamente* significativas, suele emplearse el valor calculado del **estadístico de Ljung-Box**

$$Q_{LB} = N(N+2) \sum_{k=1}^K \frac{r_k^2}{N-k},$$

que, bajo la hipótesis nula de que  $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_K = 0$ , sigue aproximadamente una distribución  $\chi^2(K)$ .

### 2.6.4 Dinámica III - Autocorrelación Parcial

La **autocorrelación parcial muestral de orden  $k$**  ( $k > 0$ ) de una serie  $\mathbf{y} \equiv [y_1, y_2, \dots, y_N]'$  es una medida **parcial** o **neta** del grado de correlación lineal entre cualquier par de componentes de dicha serie separados entre sí por  $k$  períodos, que **no** es debida a la posible correlación entre cada uno de ellos y todos los que se encuentran entre ambos.

**Observación 19:** Formalmente,

$$r_{11} \equiv r_1, \quad r_{kk} \equiv \text{C\hat{o}rr}[\hat{u}_{t-k}, \hat{u}_t] = \frac{\text{C\hat{o}v}[\hat{u}_{t-k}, \hat{u}_t]}{\text{V\hat{a}r}[\hat{u}_{t-k}]} = \frac{\sum_{t=k+1}^N \hat{u}_{t-k} \hat{u}_t}{\sum_{t=k+1}^N \hat{u}_{t-k}^2} \quad (k \geq 2),$$

donde  $\hat{u}_t$  y  $\hat{u}_{t-k}$  son las series de residuos MCO de las regresiones de  $y_t$  e  $y_{t-k}$  ( $t = k+1, \dots, N$ ), respectivamente, sobre las variables intermedias  $y_{t-1}, \dots, y_{t-k+1}$ . (Nótese que  $r_{kk}$  es la estimación MCO de la pendiente en la regresión de  $\hat{u}_t$  sobre  $\hat{u}_{t-k}$ .) De manera equivalente,  $r_{kk}$  ( $k \geq 2$ ) es la estimación MCO del parámetro asociado con  $y_{t-k}$  en la regresión de  $y_t$  sobre  $y_{t-1}, \dots, y_{t-k}$ . Alternativamente, cada  $r_{kk}$  ( $k \geq 2$ ) puede calcularse de manera aproximada como el último elemento en el vector del lado izquierdo de la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} r_{k1} \\ r_{k2} \\ \vdots \\ r_{kk} \end{bmatrix}_{k \times 1} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & \cdots & r_{k-1} \\ r_1 & 1 & \cdots & r_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k-1} & r_{k-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{k \times k}^{-1} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_k \end{bmatrix}_{k \times 1},$$

lo que implica, por ejemplo, con  $k = 2, 3$ , que

$$r_{22} = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2}, \quad r_{33} = \frac{r_1(r_1^2 + r_2^2 - 2r_2) + r_3(1 - r_1^2)}{(1 - r_2)(1 - 2r_1^2 + r_2)}.$$

Con frecuencia, este cálculo aproximado de la PACF muestral a partir de la ACF muestral correspondiente, se lleva a cabo en la práctica mediante el siguiente procedimiento recursivo:

1.  $k = 1$ ,  $r_{11} = r_1$ .
2.  $k = k + 1$ . Calcular la autocorrelación parcial muestral de orden  $k$  como

$$r_{kk} = \frac{r_k - \sum_{i=1}^{k-1} r_{k-1,i} r_{k-i}}{1 - \sum_{i=1}^{k-1} r_{k-1,i} r_i}.$$

3. Si  $k = K$  (retardo máximo que se desea calcular), parar. En caso contrario, calcular las cantidades auxiliares

$$r_{ki} = r_{k-1,i} - r_{kk} r_{k-1,k-i} \quad (i = 1, 2, \dots, k-1).$$

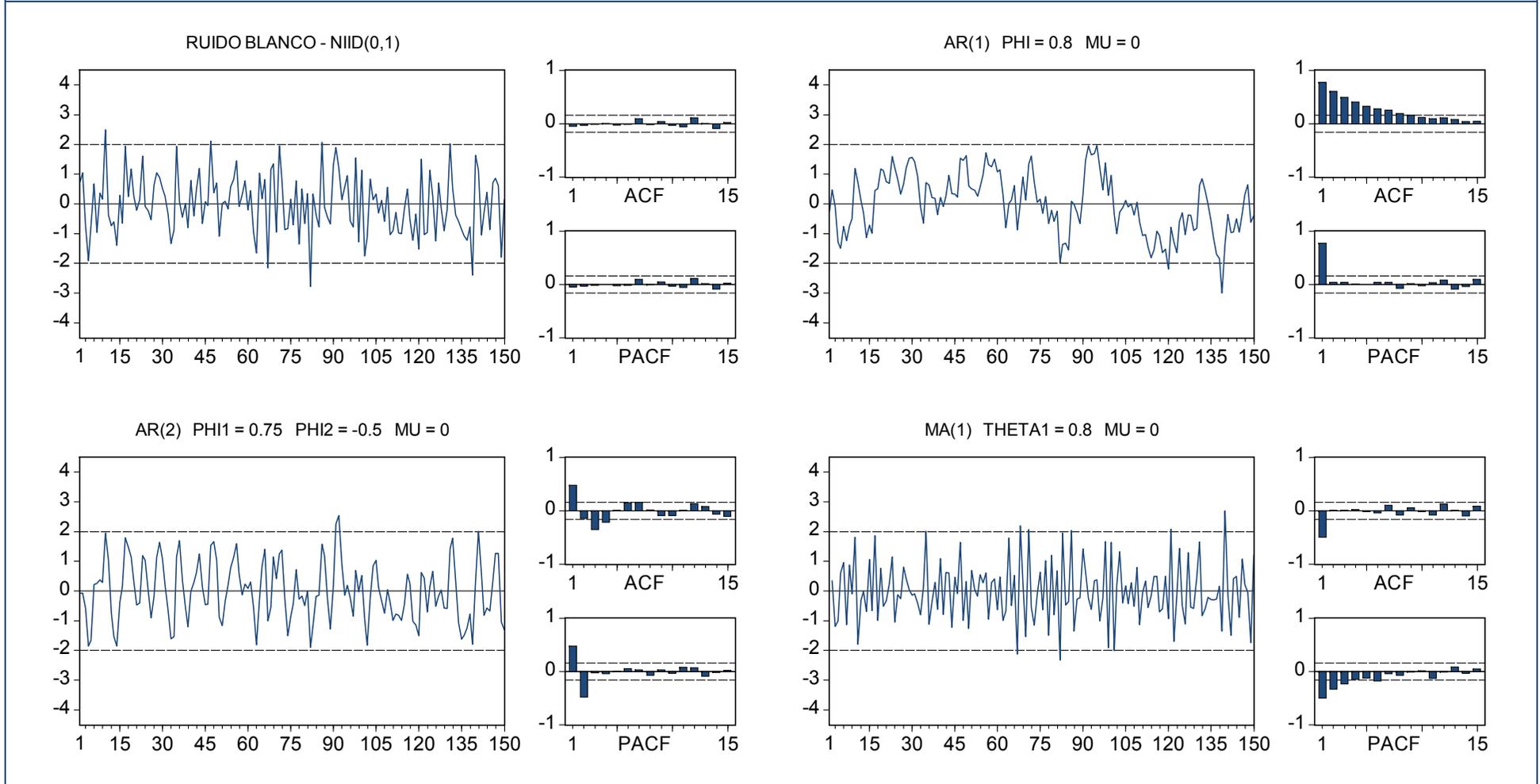
4. Volver al paso 2.

De esta manera, cada coeficiente de autocorrelación parcial muestral  $r_{kk}$  se calcula como una función determinada de los coeficientes de autocorrelación simple muestrales  $r_1, \dots, r_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ).

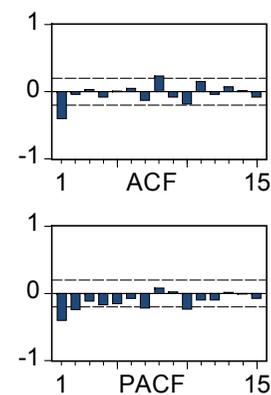
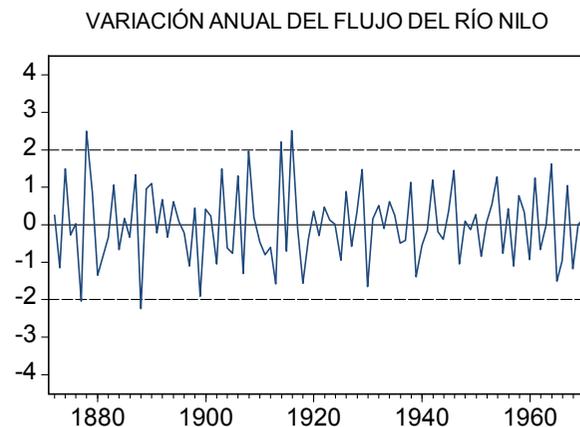
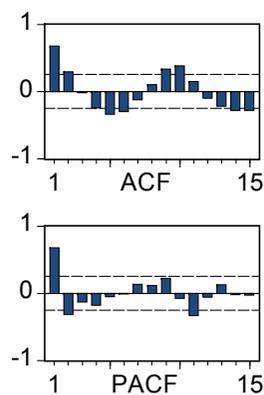
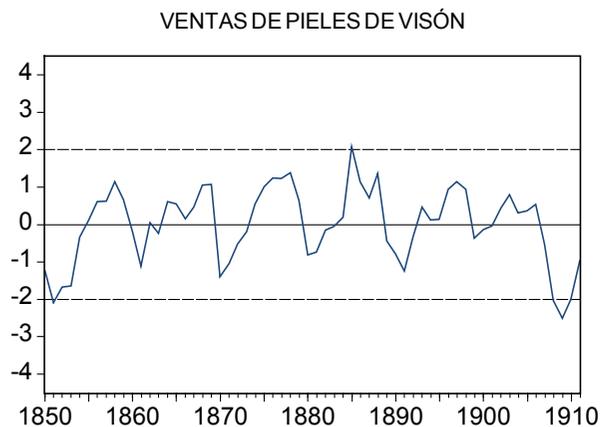
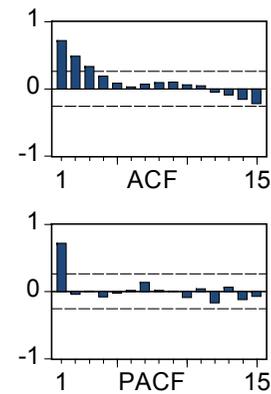
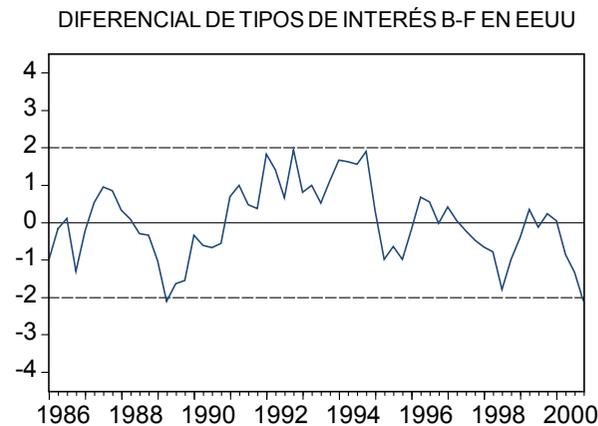
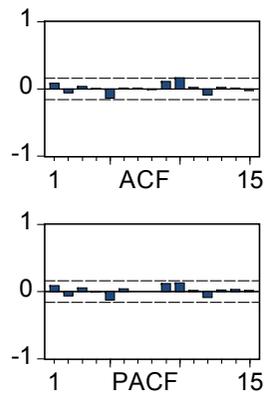
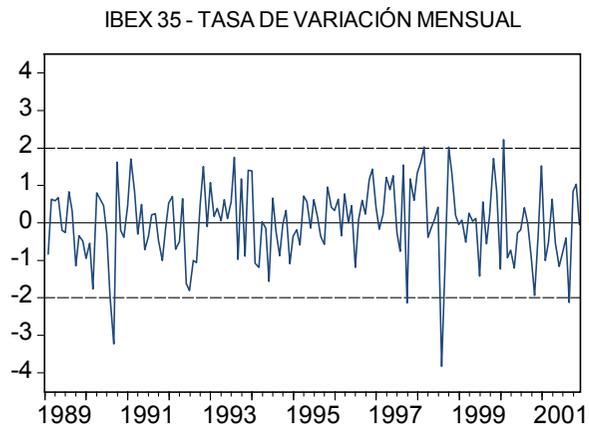
**Observación 20:** La secuencia  $r_{11}, r_{22}, \dots$  se denomina la **Función de Autocorrelación Parcial (PACF) Muestral** de la serie temporal  $y_1, y_2, \dots, y_N$ . La ACF y la PACF muestrales constituyen en conjunto el instrumento fundamental para describir en la práctica la **duración** y la **intensidad** de la **dinámica** (**inercia** o **memoria**) de una serie temporal.

**Observación 21:** Cuando en un modelo para una serie temporal estacionaria (Apartados 2.4 y 2.7) se supone que  $\mathbf{y} \equiv [y_1, y_2, \dots, y_N]'$  es una realización particular de un vector  $\mathbf{Y} \equiv [Y_1, Y_2, \dots, Y_N]'$  de variables aleatorias con **media teórica** y **autocovarianzas teóricas constantes**, suele considerarse que cualquier **autocorrelación parcial teórica** (Observación 22) es *individualmente* significativa al 5% si  $|r_{kk}| > 1.96/\sqrt{N}$  (igual que en la Observación 18 para el caso de cualquier autocorrelación simple teórica).

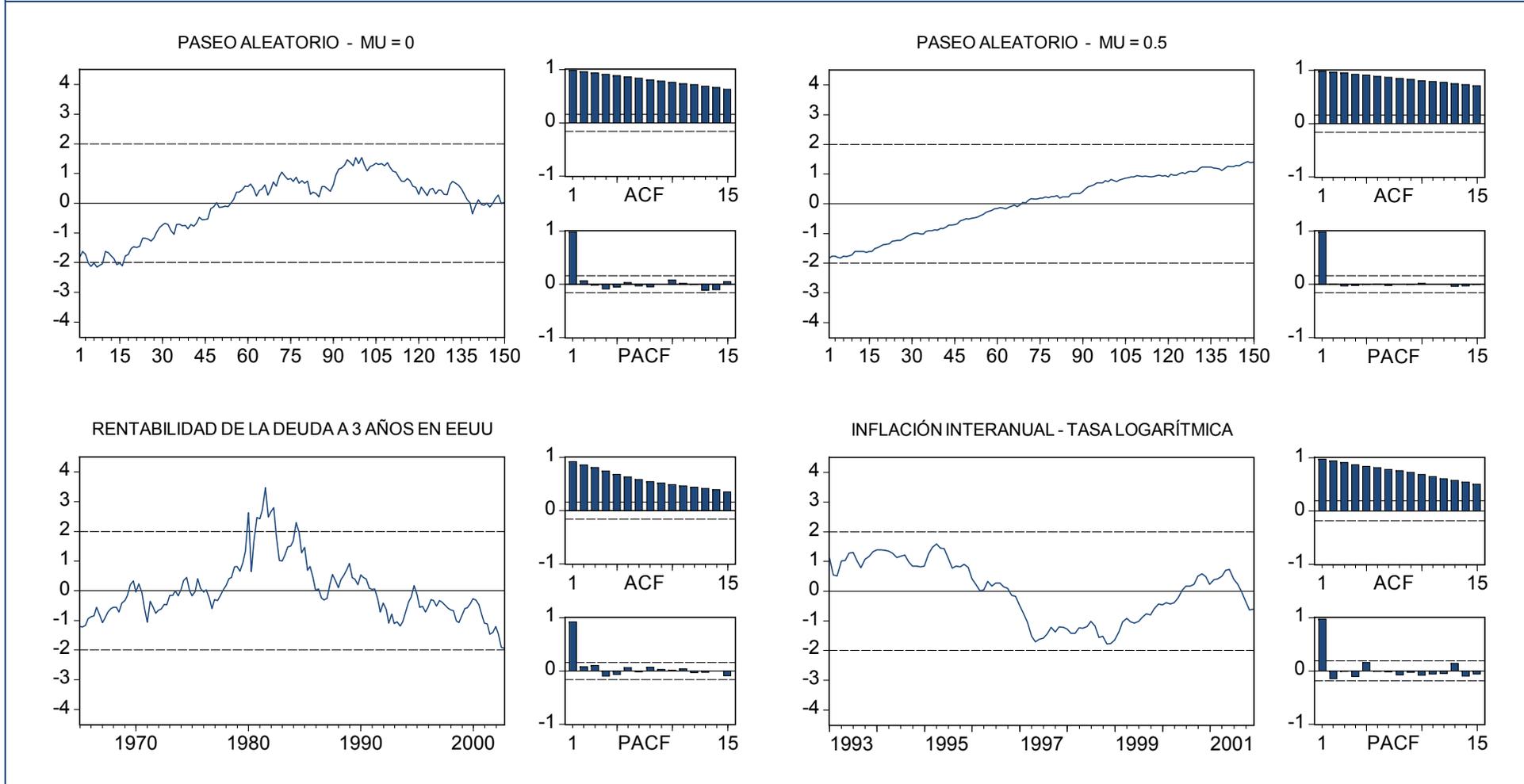
**FIGURA 2.11**  
Autocorrelaciones Muestrales de Series Estacionarias Simuladas



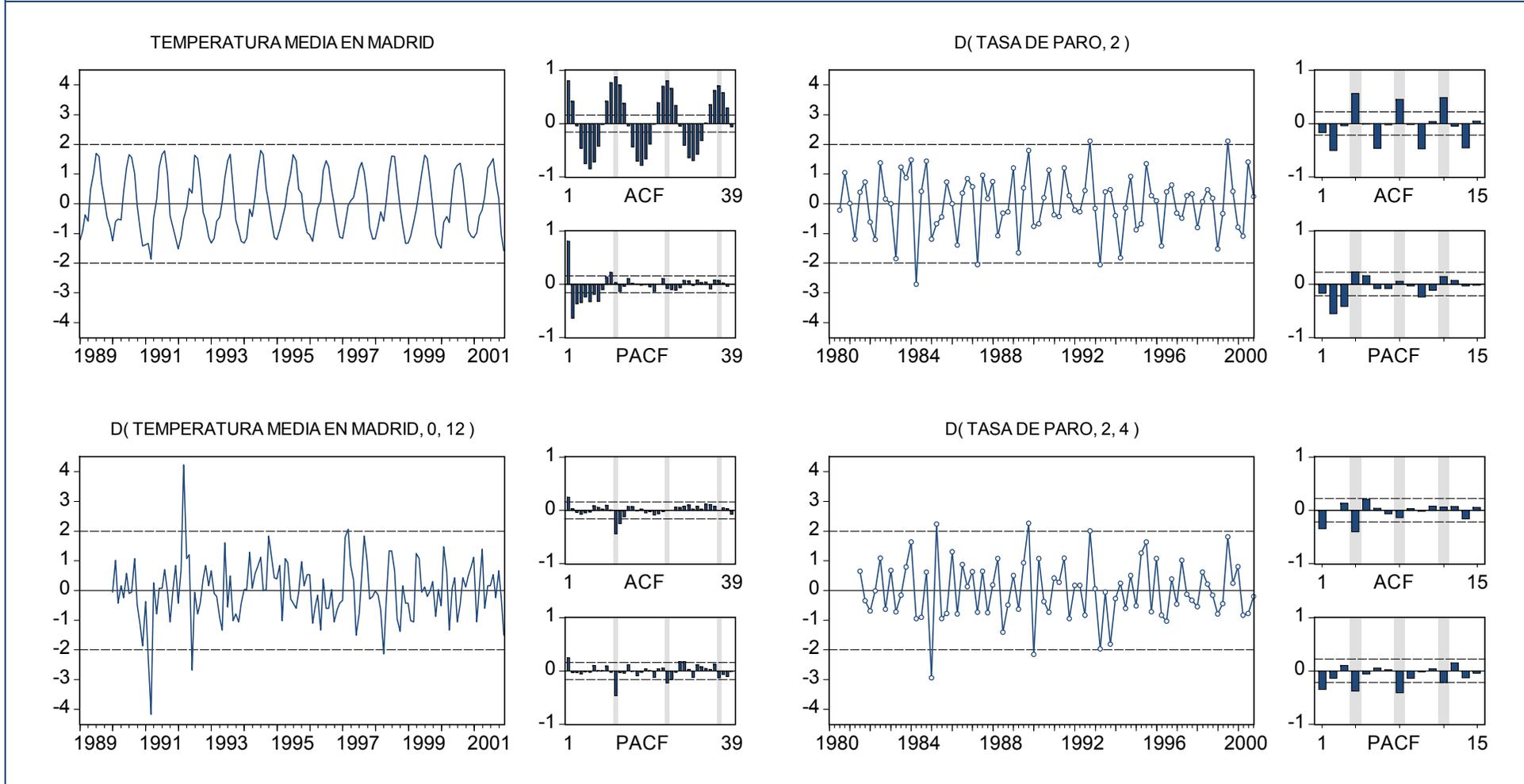
**FIGURA 2.12**  
Autocorrelaciones Muestrales de Series Estacionarias Reales



**FIGURA 2.13**  
Autocorrelaciones Muestrales de Series con Tendencia



**FIGURA 2.14**  
Autocorrelaciones Muestrales de Series Estacionales



### 2.6.5 Ejemplo

En este ejemplo se ilustran todas las operaciones mencionadas en esta sección para resumir numéricamente las propiedades muestrales de la serie temporal (Num06-Series.wf1)

$$\mathbf{y} = [2.82, 0.09, -0.97, -1.13, -1.21, -0.81, -0.37, 2.02, 1.52, 2.44]'$$

considerada como una realización particular de un vector  $\mathbf{Y} \equiv [Y_1, Y_2, \dots, Y_{10}]'$  de variables aleatorias con media  $\mu_Y$ , varianza  $\sigma_Y^2$ , y autocovarianzas  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  ( $\gamma_0 = \sigma_Y^2$ ) constantes.

**Observación:** Algunos de los resultados numéricos que figuran en este ejemplo se han obtenido con EViews. Si los cálculos se hacen a mano (con una calculadora) empleando sólo uno o dos decimales, los resultados pueden variar.

#### Nivel y Dispersión

$$\bar{y} \equiv \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y_t = \frac{1}{10} (2.82 + \dots + 2.44) = 0.440.$$

$$s_y^2 \equiv \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y_t - \bar{y})^2 = \frac{1}{10} [(2.82 - 0.440)^2 + \dots + (2.44 - 0.440)^2] = 2.284.$$

El valor calculado del estadístico  $t$  para el contraste al que se refiere la Observación 15 es

$$t = \bar{y} \times [s_y^2 \div N]^{-1/2} = 0.440 \times [2.284 \div 10]^{-1/2} = 0.921,$$

con un  $p$ -value (bilateral) calculado a partir de una distribución  $t(N - 1)$  igual a

$$\alpha^* = 2 \times (1 - \Pr[t(9) \leq 0.921]) = 0.381,$$

por lo que no se puede rechazar la hipótesis nula de que la media teórica  $\mu_Y$  sea cero.

**Observación:** Algunos programas (como EViews) emplean como medida de la dispersión de una serie la *cuasivarianza* muestral de dicha serie. Para la serie de este ejemplo, la cuasivarianza muestral es

$$cs_y^2 \equiv \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N (y_t - \bar{y})^2 \equiv \frac{N}{N-1} s_y^2 = 2.538.$$

Utilizando  $cs_y^2$  (cuasivarianza) como estimación de  $\sigma_Y^2$  en lugar de  $s_y^2$ ,

$$t = \bar{y} \times [cs_y^2 \div N]^{-1/2} = 0.440 \times [2.538 \div 10]^{-1/2} = 0.873 \Rightarrow \alpha^* = 2 \times (1 - \Pr[t(9) \leq 0.873]) = 0.405.$$

Por lo tanto, la conclusión del contraste de significación de  $\mu_Y$  es la misma que al utilizar  $s_y^2$ .

## Dinámica I - Autocovarianza

Las autocovarianzas muestrales de órdenes 1, 2, ..., 6 calculadas para la serie  $y$  son:

$$\begin{aligned} c_1 &\equiv \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-1} (y_t - \bar{y})(y_{t+1} - \bar{y}) = \frac{1}{10} [(y_1 - \bar{y})(y_2 - \bar{y}) + \dots + (y_9 - \bar{y})(y_{10} - \bar{y})] \\ &= \frac{1}{10} [(2.82 - 0.440)(0.09 - 0.440) + \dots + (1.52 - 0.440)(2.44 - 0.440)] = 1.013. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_2 &\equiv \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-2} (y_t - \bar{y})(y_{t+2} - \bar{y}) = \frac{1}{10} [(y_1 - \bar{y})(y_3 - \bar{y}) + \dots + (y_8 - \bar{y})(y_{10} - \bar{y})] \\
 &= \frac{1}{10} [(2.82 - 0.440)(-0.97 - 0.440) + \dots + (2.02 - 0.440)(2.44 - 0.440)] = 0.313.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_3 &\equiv \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-3} (y_t - \bar{y})(y_{t+3} - \bar{y}) = \frac{1}{10} [(y_1 - \bar{y})(y_4 - \bar{y}) + \dots + (y_7 - \bar{y})(y_{10} - \bar{y})] \\
 &= \frac{1}{10} [(2.82 - 0.440)(-1.13 - 0.440) + \dots + (-0.37 - 0.440)(2.44 - 0.440)] = -0.570.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_4 &\equiv \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-4} (y_t - \bar{y})(y_{t+4} - \bar{y}) = \frac{1}{10} [(y_1 - \bar{y})(y_5 - \bar{y}) + \dots + (y_6 - \bar{y})(y_{10} - \bar{y})] \\
 &= \frac{1}{10} [(2.82 - 0.440)(-1.21 - 0.440) + \dots + (-0.81 - 0.440)(2.44 - 0.440)] = -0.911.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_5 &\equiv \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-5} (y_t - \bar{y})(y_{t+5} - \bar{y}) = \frac{1}{10} [(y_1 - \bar{y})(y_6 - \bar{y}) + \dots + (y_5 - \bar{y})(y_{10} - \bar{y})] \\
 &= \frac{1}{10} [(2.82 - 0.440)(-0.81 - 0.440) + \dots + (-1.21 - 0.440)(2.44 - 0.440)] = -0.991.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_6 &\equiv \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-6} (y_t - \bar{y})(y_{t+6} - \bar{y}) = \frac{1}{10} [(y_1 - \bar{y})(y_7 - \bar{y}) + \dots + (y_4 - \bar{y})(y_{10} - \bar{y})] \\
 &= \frac{1}{10} [(2.82 - 0.440)(-0.37 - 0.440) + \dots + (-1.13 - 0.440)(2.44 - 0.440)] = -0.714.
 \end{aligned}$$

**Observación:** La autocovarianza muestral de orden cero  $c_0$  es idéntica a la varianza muestral  $s_y^2 = 2.284$ .

## Dinámica II - Autocorrelación Simple

Teniendo en cuenta que  $c_0 = s_y^2 = 2.284$ , la ACF muestral de la serie  $y$  es:

$$r_1 \equiv \frac{c_1}{c_0} = \frac{1.013}{2.284} = 0.443, \quad r_2 \equiv \frac{c_2}{c_0} = \frac{0.313}{2.284} = 0.137, \quad r_3 \equiv \frac{c_3}{c_0} = -\frac{0.570}{2.284} = -0.250,$$

$$r_4 \equiv \frac{c_4}{c_0} = -\frac{0.911}{2.284} = -0.399, \quad r_5 \equiv \frac{c_5}{c_0} = -\frac{0.991}{2.284} = -0.434, \quad r_6 \equiv \frac{c_6}{c_0} = -\frac{0.714}{2.284} = -0.313.$$

El valor del estadístico  $Q_{LB}$  para el contraste al que se refiere la Observación 18 es

$$Q_{LB} = N(N + 2) \sum_{k=1}^K \frac{r_k^2}{N-k} = 10 \times 12 \times \sum_{k=1}^6 \frac{r_k^2}{10-k}$$

$$= 120 \times \left[ \frac{0.443^2}{10-1} + \frac{0.137^2}{10-2} + \frac{(-0.250)^2}{10-3} + \frac{(-0.399)^2}{10-4} + \frac{(-0.434)^2}{10-5} + \frac{(-0.313)^2}{10-6} \right] = 14.6,$$

con un *p-value* calculado a partir de una distribución  $\chi^2(K)$  igual a

$$1 - \Pr[\chi^2(6) \leq 14.6] = 0.024,$$

por lo que no puede rechazarse al 1% la hipótesis de que las seis primeras autocorrelaciones simples teóricas sean cero (aunque dicha hipótesis debe rechazarse, por ejemplo, al 5%).

## Dinámica III - Autocorrelación Parcial

Los tres primeros valores de la PACF muestral pueden calcularse a partir de la relación aproximada entre la PACF y la ACF muestrales que se menciona en la Observación 19:

$$r_{11} = r_1 = 0.443,$$

$$r_{22} = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2} = \frac{0.137 - 0.443^2}{1 - 0.443^2} = -0.074,$$

$$r_{33} = \frac{r_1(r_1^2 + r_2^2 - 2r_2) + r_3(1 - r_1^2)}{(1 - r_2)(1 - 2r_1^2 + r_2)} = \frac{0.443(0.443^2 + 0.137^2 - 2 \times 0.137) - 0.250(1 - 0.443^2)}{(1 - 0.137)(1 - 2 \times 0.443^2 + 0.137)} = -0.353.$$

Para  $k \geq 4$ , las expresiones de  $r_{kk}$  análogas a éstas son muy complicadas. El procedimiento recursivo de la Observación 19 (utilizado por EViews) proporciona lo siguiente:

⇨ Para  $k = 2$ :

$$r_{22} = \frac{r_2 - \sum_{i=1}^1 r_{1i}r_{2-i}}{1 - \sum_{i=1}^1 r_{1i}r_i} = \frac{r_2 - r_{11}r_1}{1 - r_{11}r_1} = \frac{0.137 - 0.443 \times 0.443}{1 - 0.443 \times 0.443} = -0.074,$$

$$r_{21} = r_{11} - r_{22}r_{11} = 0.443 + 0.074 \times 0.443 = 0.476.$$

⇒ Para  $k = 3$ :

$$r_{33} = \frac{r_3 - \sum_{i=1}^2 r_{2i}r_{3-i}}{1 - \sum_{i=1}^2 r_{2i}r_i} = \frac{r_3 - r_{21}r_2 - r_{22}r_1}{1 - r_{21}r_1 - r_{22}r_2} = \frac{-0.250 - 0.476 \times 0.137 + 0.074 \times 0.443}{1 - 0.476 \times 0.443 + 0.074 \times 0.137} = -0.353,$$

$$r_{31} = r_{21} - r_{33}r_{22} = 0.476 - 0.353 \times 0.074 = 0.450,$$

$$r_{32} = r_{22} - r_{33}r_{21} = -0.074 + 0.353 \times 0.476 = 0.094.$$

⇒ Para  $k = 4$ :

$$\begin{aligned} r_{44} &= \frac{r_4 - \sum_{i=1}^3 r_{3i}r_{4-i}}{1 - \sum_{i=1}^3 r_{3i}r_i} = \frac{r_4 - r_{31}r_3 - r_{32}r_2 - r_{33}r_1}{1 - r_{31}r_1 - r_{32}r_2 - r_{33}r_3} \\ &= \frac{-0.399 + 0.450 \times 0.250 - 0.094 \times 0.137 + 0.353 \times 0.443}{1 - 0.450 \times 0.443 - 0.094 \times 0.137 - 0.353 \times 0.250} = -0.204, \end{aligned}$$

$$r_{41} = r_{31} - r_{44}r_{33} = 0.450 - 0.204 \times 0.353 = 0.378,$$

$$r_{42} = r_{32} - r_{44}r_{32} = 0.094 + 0.204 \times 0.094 = 0.113,$$

$$r_{43} = r_{33} - r_{44}r_{31} = -0.353 + 0.204 \times 0.450 = -0.261.$$

⇒ Para  $k = 5$ :

$$\begin{aligned}
 r_{55} &= \frac{r_5 - \sum_{i=1}^4 r_{4i} r_{5-i}}{1 - \sum_{i=1}^4 r_{4i} r_i} = \frac{r_5 - r_{41} r_4 - r_{42} r_3 - r_{43} r_2 - r_{44} r_1}{1 - r_{41} r_1 - r_{42} r_2 - r_{43} r_3 - r_{44} r_4} \\
 &= \frac{-0.434 + 0.378 \times 0.399 + 0.113 \times 0.250 + 0.261 \times 0.137 + 0.204 \times 0.443}{1 - 0.378 \times 0.443 - 0.113 \times 0.137 - 0.261 \times 0.250 - 0.204 \times 0.399} = -0.192,
 \end{aligned}$$

$$r_{51} = r_{41} - r_{55} r_{44} = 0.378 - 0.192 \times 0.204 = 0.339,$$

$$r_{52} = r_{42} - r_{55} r_{43} = 0.113 - 0.192 \times 0.261 = 0.063,$$

$$r_{53} = r_{43} - r_{55} r_{42} = -0.261 + 0.192 \times 0.113 = -0.239,$$

$$r_{54} = r_{44} - r_{55} r_{41} = -0.204 + 0.192 \times 0.378 = -0.131.$$

⇒ Para  $k = 6$ :

$$\begin{aligned}
 r_{66} &= \frac{r_6 - \sum_{i=1}^5 r_{5i} r_{6-i}}{1 - \sum_{i=1}^5 r_{5i} r_i} = \frac{r_6 - r_{51} r_5 - r_{52} r_4 - r_{53} r_3 - r_{54} r_2 - r_{55} r_1}{1 - r_{51} r_1 - r_{52} r_2 - r_{53} r_3 - r_{54} r_4 - r_{55} r_5} \\
 &= \frac{-0.313 + 0.339 \times 0.434 + 0.063 \times 0.399 - 0.239 \times 0.250 + 0.131 \times 0.137 + 0.192 \times 0.443}{1 - 0.339 \times 0.443 - 0.063 \times 0.137 - 0.239 \times 0.250 - 0.131 \times 0.399 - 0.192 \times 0.434} = -0.150.
 \end{aligned}$$

La ACF y la PACF muestrales que proporciona EViews para la serie  $y$  de este ejemplo son las que se muestran a continuación:

	Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1			0.443	0.443	2.6200	0.106
2			0.137	-0.074	2.9015	0.234
3			-0.250	-0.353	3.9695	0.265
4			-0.399	-0.204	7.1503	0.128
5			-0.434	-0.192	11.671	0.040
6			-0.313	-0.150	14.605	0.024

Las bandas de significación individual en esta figura son  $\pm \frac{2.0}{\sqrt{N}} = \pm \frac{2.0}{\sqrt{10}} = \pm 0.63$ , ya que EViews emplea para dibujar dichas bandas un 2.0 en lugar del valor crítico bilateral al 5% de una  $N(0,1)$ , que es igual a 1.96 (Observaciones 18 y 21).

## 2.7 MODELOS ESTACIONARIOS

La hipótesis inicial en cualquier modelo estacionario consiste en suponer que una serie temporal estacionaria  $\mathbf{y} \equiv [y_1, y_2, \dots, y_N]'$  es una realización particular de un vector de variables aleatorias  $\mathbf{Y} \equiv [Y_1, Y_2, \dots, Y_N]'$  con **media teórica**  $\mu_Y \equiv E[Y_t]$ , **varianza teórica**  $\sigma_Y^2 \equiv \text{Var}[Y_t]$ , y **autocovarianzas teóricas**  $\gamma_k \equiv \text{Cov}[Y_t, Y_{t+k}] \equiv \text{Cov}[Y_{t-k}, Y_t]$  ( $k \geq 1$ ) **constantes**, de manera que (i)  $\mu_Y$  y  $\sigma_Y^2$  ( $= \gamma_0$ ) no dependen de  $t$ , y (ii) cada  $\gamma_k$  ( $k \geq 1$ ) puede depender del retardo  $k$  pero tampoco depende de  $t$ .

Cada tipo de modelo tiene asociada una expresión matemática concreta de la que se derivan una media, una varianza, unas autocovarianzas, y, en especial, unas **autocorrelaciones simples** (ACF) y **parciales** (PACF) teóricas determinadas.

**Observación 22:** Una **ACF teórica** es la secuencia  $\rho_1, \rho_2, \dots$  que puede derivarse a partir de la expresión matemática concreta asociada con un modelo determinado, donde  $\rho_k \equiv \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$  (y, en su caso,  $\rho_0 = 1$ ) mide el grado de correlación lineal **total** o **bruta** entre dos componentes cualesquiera del vector  $\mathbf{Y} \equiv [Y_1, Y_2, \dots, Y_N]'$  separados entre sí por un retardo  $k \geq 1$  dado (como  $Y_t$  e  $Y_{t-k}$ ). Una **PACF teórica** es la secuencia  $\rho_{11}, \rho_{22}, \dots$  que puede derivarse a partir de la expresión matemática concreta asociada con un modelo determinado, donde  $\rho_{kk}$  mide el grado de correlación lineal **directa** o **neto** entre dos componentes cualesquiera de  $\mathbf{Y}$  separados entre sí por un retardo  $k \geq 1$  dado (como  $Y_t$  e  $Y_{t-k}$ ), que **no** es debida a la presencia de los componentes de  $\mathbf{Y}$  que se encuentran entre ambos ( $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-k+1}$ ). Análogamente a la PACF muestral de una serie temporal (Observación 19),  $\rho_{11} \equiv \rho_1$  y  $\rho_{kk}$  ( $k \geq 2$ ) es el parámetro asociado con  $Y_{t-k}$  en  $Y_t = \rho_{k0} + \rho_{k1}Y_{t-1} + \rho_{k2}Y_{t-2} + \dots + \rho_{kk}Y_{t-k} + U_{tk}$ , con  $U_{tk}$  independiente de  $Y_{t-i}$  para todo  $i \geq 1$  y  $E[U_{tk}] = 0$ . La regresión anterior puede escribirse como

$$\tilde{Y}_t = \rho_{k1}\tilde{Y}_{t-1} + \rho_{k2}\tilde{Y}_{t-2} + \dots + \rho_{kk}\tilde{Y}_{t-k} + U_{tk}, \text{ con } \tilde{Y}_{t-i} \equiv Y_{t-i} - E[Y_t] \text{ (} i = 0, 1, \dots, k \text{),}$$

de manera que multiplicando por  $\tilde{Y}_{t-i}$  ( $i \geq 1$ ) y tomando valores esperados:

$$E[\tilde{Y}_{t-i}\tilde{Y}_t] = \rho_{k1}E[\tilde{Y}_{t-i}\tilde{Y}_{t-1}] + \rho_{k2}E[\tilde{Y}_{t-i}\tilde{Y}_{t-2}] + \dots + \rho_{kk}E[\tilde{Y}_{t-i}\tilde{Y}_{t-k}] + E[\tilde{Y}_{t-i}U_{tk}],$$

es decir,

$$\gamma_i = \rho_{k1}\gamma_{i-1} + \rho_{k2}\gamma_{i-2} + \dots + \rho_{kk}\gamma_{i-k}.$$

Dividiendo la expresión anterior por  $\gamma_0$ :

$$\rho_i = \rho_{k1}\rho_{i-1} + \rho_{k2}\rho_{i-2} + \dots + \rho_{kk}\rho_{i-k} \quad (i \geq 1).$$

Escribiendo esta expresión para  $i = 1, \dots, k$ , con ( $k \geq 2$ ), resulta finalmente que  $\rho_{kk}$  ( $k \geq 2$ ) es el último elemento en el vector del lado izquierdo de la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{k1} \\ \rho_{k2} \\ \vdots \\ \rho_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix},$$

lo que implica, por ejemplo, con  $k = 2, 3$ , que

$$\rho_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}, \quad \rho_{33} = \frac{\rho_1(\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_2) + \rho_3(1 - \rho_1^2)}{(1 - \rho_2)(1 - 2\rho_1^2 + \rho_2)}.$$

De esta manera, cada coeficiente de autocorrelación parcial  $\rho_{kk}$  en un modelo estacionario puede expresarse como una función determinada de los coeficientes de autocorrelación simple  $\rho_1, \dots, \rho_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) correspondientes.

En última instancia, la **identificación** de un modelo univariante para una serie estacionaria consiste en la **elección** (tentativa) de un **modelo** cuyas **propiedades teóricas** resuman adecuadamente las **propiedades muestrales** de la serie considerada.

### 2.7.1 Modelo AR(1) - Autorregresivo de Orden 1

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + A_t, \text{ o bien} \quad [9]$$

$$(1 - \phi_1 B)Y_t = \mu + A_t, \quad [10]$$

donde  $\mu$  y  $\phi_1$  son parámetros,  $|\phi_1| < 1$  (**estacionariedad**), y  $(A_t) \sim \text{IID}(0, \sigma_A^2)$ .

**Observación 23:** La condición de estacionariedad de un modelo AR(1) puede enunciarse así: "La **raíz** de la **ecuación característica**  $1 - \phi_1 x = 0$  ( $x^* = \phi_1^{-1}$ ) es en valor absoluto mayor que 1 (o bien tiene **módulo** superior a la unidad, o bien se encuentra **fuera del círculo unitario**)".

Un modelo AR(1) estacionario tiene las propiedades teóricas siguientes:

Media 
$$\mu_Y = \frac{\mu}{1 - \phi_1}. \quad [11]$$

Varianza 
$$\sigma_Y^2 (= \gamma_0) = \frac{\sigma_A^2}{1 - \phi_1^2}. \quad [12]$$

ACF 
$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} \quad (k \geq 1). \quad [13]$$

**Observación 24:** Esta ecuación para  $\rho_k$  puede resolverse recursivamente a partir de la condición inicial  $\rho_0 = 1$  (Observación 22), lo que proporciona  $\rho_k = \phi_1^k$  para todo  $k \geq 0$  (una **exponencial amortiguada**). Por otro lado, dado

que  $\rho_1 = \phi_1$ , la varianza [12] de un AR(1) puede escribirse como

$$\sigma_Y^2 = \frac{\sigma_A^2}{1 - \phi_1 \rho_1}.$$

PACF

$$\rho_{kk} = \begin{cases} \rho_1 = \phi_1 & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{para todo } k > 1. \end{cases} \quad [14]$$

**Observación 25:** La demostración de las propiedades [11]-[14] se basa en las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu + \phi_1 \overbrace{(\mu + \phi_1 Y_{t-2} + A_{t-1})}^{Y_{t-1}} + A_t \\ &= (1 + \phi_1)\mu + (A_t + \phi_1 A_{t-1}) + [\phi_1^2 Y_{t-2}] \\ &= (1 + \phi_1)\mu + A_t + \phi_1 A_{t-1} + \phi_1^2 \overbrace{(\mu + \phi_1 Y_{t-3} + A_{t-2})}^{Y_{t-2}} \\ &= (1 + \phi_1 + \phi_1^2)\mu + (A_t + \phi_1 A_{t-1} + \phi_1^2 A_{t-2}) + [\phi_1^3 Y_{t-3}] \\ &= \vdots \\ &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i \right) \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i A_{t-i} \\ &= \frac{\mu}{1 - \phi_1} + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i A_{t-i} = \frac{\mu}{1 - \phi_1} + A_t + \phi_1 A_{t-1} + \phi_1^2 A_{t-2} + \phi_1^3 A_{t-3} + \dots \end{aligned} \quad (A)$$

$$\mu_Y \equiv E[Y_t] = E\left[\frac{\mu}{1-\phi_1} + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i A_{t-i}\right] = \frac{\mu}{1-\phi_1}. \quad (\text{B})$$

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 (= \gamma_0) &\equiv \text{Var}[Y_t] = \text{Var}\left[\frac{\mu}{1-\phi_1} + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i A_{t-i}\right] = \sum_{i=0}^{\infty} \text{Var}[\phi_1^i A_{t-i}] = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} \sigma_A^2 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i}\right) \sigma_A^2 = \frac{\sigma_A^2}{1-\phi_1^2}. \end{aligned} \quad (\text{C})$$

$$\begin{aligned} Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + A_t &\Leftrightarrow Y_t - \frac{\mu}{1-\phi_1} = \mu - \frac{\mu}{1-\phi_1} + \phi_1 Y_{t-1} + A_t = \\ &= \frac{\mu - \phi_1 \mu - \mu}{1-\phi_1} + \phi_1 Y_{t-1} + A_t = \phi_1 Y_{t-1} - \frac{\phi_1 \mu}{1-\phi_1} + A_t = \phi_1 \left(Y_{t-1} - \frac{\mu}{1-\phi_1}\right) + A_t \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \tilde{Y}_t = \phi_1 \tilde{Y}_{t-1} + A_t \Leftrightarrow (1 - \phi_1 B) \tilde{Y}_t = A_t, \text{ con } \tilde{Y}_t \equiv Y_t - \mu_Y (= \frac{\mu}{1-\phi_1}). \end{aligned} \quad (\text{D})$$

$$\begin{aligned} \gamma_k &\equiv \text{Cov}[Y_{t-k}, Y_t] \equiv E[\tilde{Y}_{t-k} \tilde{Y}_t] = E[\tilde{Y}_{t-k} (\phi_1 \tilde{Y}_{t-1} + A_t)] = \\ &= \phi_1 \underbrace{E[\tilde{Y}_{t-k} \tilde{Y}_{t-1}]}_{\text{Cov}[Y_{t-k}, Y_{t-1}]} + \underbrace{E[\tilde{Y}_{t-k} A_t]}_{\text{Cov}[Y_{t-k}, A_t]} = \phi_1 \gamma_{k-1} + \underbrace{\text{Cov}[Y_{t-k}, A_t]}_{=0 \text{ para } k \geq 1} = \phi_1 \gamma_{k-1} \quad (k \geq 1). \end{aligned} \quad (\text{E})$$

$$\begin{aligned} \rho_k &\equiv \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\phi_1 \gamma_{k-1}}{\gamma_0} = \phi_1 \rho_{k-1} \quad (k \geq 1) \Rightarrow \rho_1 = \phi_1 \rho_0 = \phi_1, \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 = \phi_1^2, \dots \Rightarrow \rho_k = \phi_1^k \quad (k \geq 0). \end{aligned} \quad (\text{F})$$

$$\sigma_Y^2 (= \gamma_0) = \frac{\sigma_A^2}{1-\phi_1^2} = \frac{\sigma_A^2}{1-\phi_1 \rho_1}. \quad (\text{G})$$

La PACF [14] puede calcularse a partir de la ACF [13] de acuerdo con la Observación 22. Por otro lado, la llamada **representación PSI** o **MA** (Wold) de  $\tilde{Y}_t$  en términos de  $A_t, A_{t-1}, A_{t-2}, \dots$  es, en relación con (A) y (D):

$$\tilde{Y}_t = \underbrace{A_t + \phi_1 A_{t-1} + \phi_1^2 A_{t-2} + \dots}_{\psi(B)A_t} = \underbrace{(1 - \phi_1 B)^{-1}}_{\phi(B)} A_t \Rightarrow \psi(B) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i B^i = \underbrace{(1 - \phi_1 B)^{-1}}_{\phi(B)}. \quad (\text{H})$$

Por último, la llamada **representación PI** o **AR** de  $\tilde{Y}_t$  en términos de  $\tilde{Y}_{t-1}, \tilde{Y}_{t-2}, \dots$  es, en relación con (D):

$$\tilde{Y}_t = \phi_1 \tilde{Y}_{t-1} + A_t \Leftrightarrow \underbrace{\tilde{Y}_t - \phi_1 \tilde{Y}_{t-1}}_{\pi(B)\tilde{Y}_t} = A_t \Rightarrow \pi(B) = \underbrace{(1 - \phi_1 B)}_{\phi(B)}. \quad (\text{I})$$

### 2.7.2 Modelo AR(2) - Autorregresivo de Orden 2

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + A_t, \text{ o bien} \quad [15]$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) Y_t = \mu + A_t, \quad [16]$$

donde  $\mu$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son parámetros, las raíces de la ecuación  $1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 = 0$  están fuera del círculo unitario (**estacionariedad**), y  $(A_t) \sim \text{IID}(0, \sigma_A^2)$ .

**Observación 26:** La condición de estacionariedad de un modelo AR(2) implica que  $\phi_2 + \phi_1 < 1$ ,  $\phi_2 - \phi_1 < 1$ , y  $|\phi_2| < 1$  (aunque, en general, la implicación en sentido inverso no es cierta). Ver Figura 2.15.

Un modelo AR(2) estacionario tiene las propiedades teóricas siguientes:

Media 
$$\mu_Y = \frac{\mu}{1 - \phi_1 - \phi_2}. \quad [17]$$

Varianza 
$$\sigma_Y^2 = \frac{\sigma_A^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2}. \quad [18]$$

ACF 
$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \quad (k \geq 1). \quad [19]$$

**Observación 27:** Esta ecuación para  $\rho_k$  puede resolverse recursivamente a partir de las condiciones iniciales  $\rho_0 = 1$  (Observación 22) y  $\rho_1 = \phi_1 / (1 - \phi_2)$  (que se obtiene de [19] con  $k = 1$ ; por otro lado, las dos ecuaciones que resultan de [19] con  $k = 1$  y  $k = 2$  se denominan **ecuaciones de Yule-Walker**). En particular, si las dos raíces de la ecuación característica de un AR(2) son complejas, la solución de [19] es

$$\rho_k = \frac{D^k \operatorname{sen}(2\pi f k + F)}{\operatorname{sen}(F)} \quad \text{para todo } k \geq 0,$$

cuyo numerador representa una **oscilación armónica amortiguada** de **amplitud**  $D^k$ , **período**  $1/f$ , **frecuencia**  $f$ , **fase inicial**  $-F / (2\pi f)$  y **factor de amortiguamiento**  $D$ ; estas características de  $\rho_k$  son funciones de los parámetros  $\phi_1$  y  $\phi_2$  de acuerdo con que  $D = \sqrt{-\phi_2}$ ,  $\cos(2\pi f) = \phi_1 / (2\sqrt{-\phi_2})$  y  $\tan(F) = [(1 - \phi_2) / (1 + \phi_2)] \tan(2\pi f)$ .

**Observación 28:** Con  $\rho_1 = \phi_1 / (1 - \phi_2)$  y  $\rho_2 = \phi_2 + \phi_1^2 / (1 - \phi_2)$  (ver [19]), la varianza [18] de un AR(2) queda

$$\sigma_Y^2 = \left[ \frac{1 - \phi_2}{1 + \phi_2} \right] \left[ \frac{\sigma_A^2}{(1 - \phi_1 - \phi_2)(1 + \phi_1 - \phi_2)} \right].$$

$$\text{PACF} \quad \rho_{kk} = \begin{cases} \rho_1 = \phi_1 / (1 - \phi_2) & \text{si } k = 1, \\ \phi_2 & \text{si } k = 2, \\ 0 & \text{para todo } k > 2. \end{cases} \quad [20]$$

**Observación 29:** Las propiedades [17]-[20] son extensiones de las propiedades [11]-[14] del AR(1). Por ejemplo, la PACF [20] puede calcularse a partir de la ACF [19] [con  $\rho_1 = \phi_1 / (1 - \phi_2)$ ,  $\rho_2 = \phi_2 + \phi_1^2 / (1 - \phi_2)$ , ...] de acuerdo con la Observación 22. En el mismo sentido, la representación inicial [15]-[16] del AR(2) puede escribirse como

$$\tilde{Y}_t = \phi_1 \tilde{Y}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Y}_{t-2} + A_t \Leftrightarrow (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) \tilde{Y}_t = A_t, \text{ con } \tilde{Y}_t \equiv Y_t - \mu_Y (= \frac{\mu}{1 - \phi_1 - \phi_2}), \quad (\text{A})$$

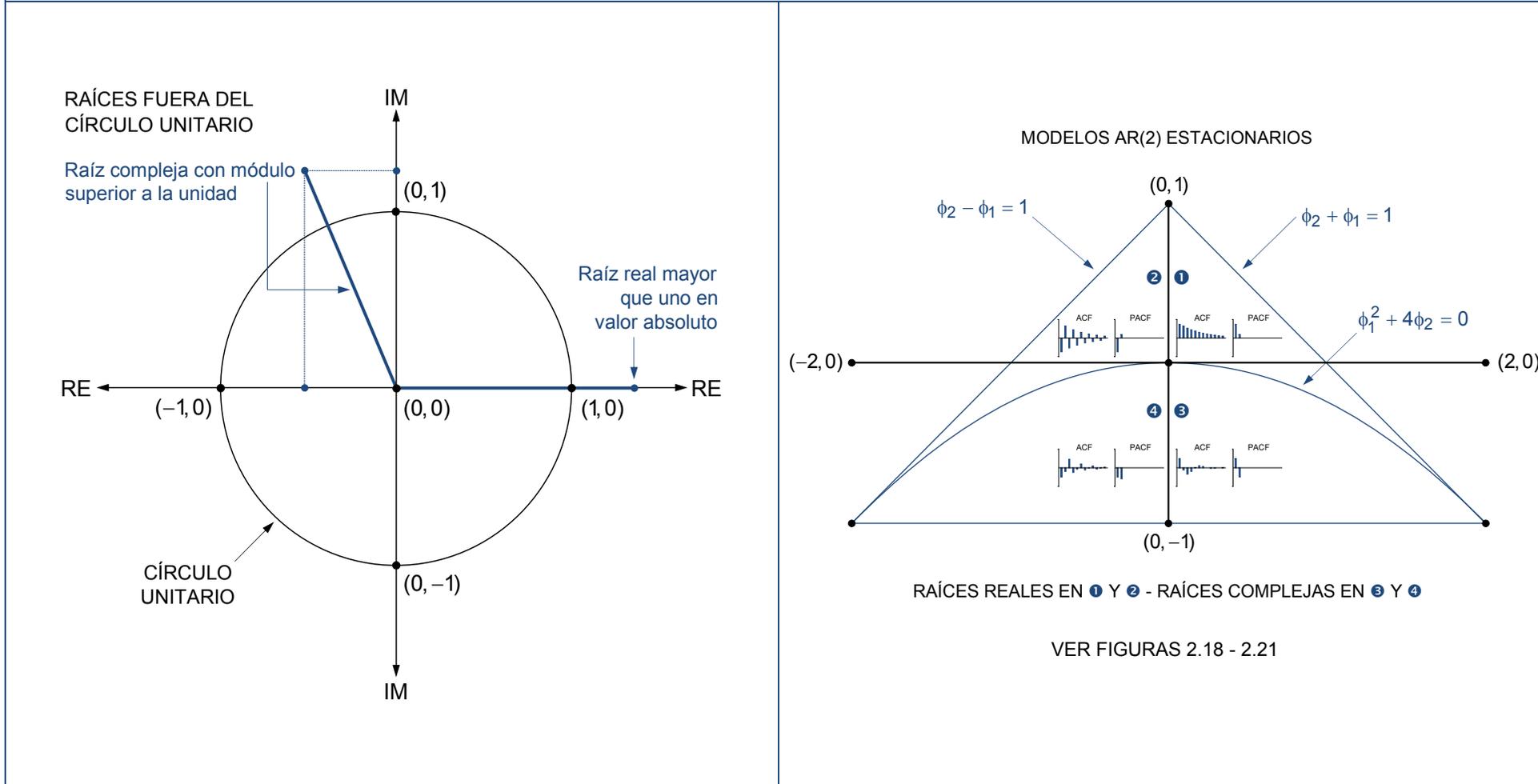
por lo que las representaciones PSI (MA) y PI (AR) del AR(2) son, respectivamente:

$$\tilde{Y}_t = \underbrace{A_t + \psi_1 A_{t-1} + \psi_2 A_{t-2} + \dots}_{\psi(B)A_t} \Rightarrow \underbrace{\psi(B) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i B^i}_{\text{General, con } \psi_0 \equiv 1} = \underbrace{(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)^{-1}}_{\phi(B)}, \quad (\text{B})$$

$$\tilde{Y}_t = \phi_1 \tilde{Y}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Y}_{t-2} + A_t \Leftrightarrow \underbrace{\tilde{Y}_t - \phi_1 \tilde{Y}_{t-1} - \phi_2 \tilde{Y}_{t-2}}_{\pi(B)\tilde{Y}_t} = A_t \Rightarrow \pi(B) = \underbrace{(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)}_{\phi(B)}. \quad (\text{C})$$

En la representación (B), cada coeficiente o “peso”  $\psi_i$  puede calcularse a partir de los parámetros  $\phi_1$  y  $\phi_2$  de acuerdo con que  $\phi(B)\psi(B) = 1$  con  $\psi_0 \equiv 1$ , de manera que  $(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) = 1$ . Esta relación proporciona  $\psi_1 = \phi_1$  y  $\psi_i = \phi_1 \psi_{i-1} + \phi_2 \psi_{i-2}$  para todo  $i \geq 2$ .

**FIGURA 2.15**  
Condiciones de Estacionariedad



### 2.7.3 Modelo AR(p) - Autorregresivo de Orden p

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + A_t, \text{ o bien} \quad [21]$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) Y_t = \mu + A_t, \quad [22]$$

donde  $\mu, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  son parámetros, las raíces de  $1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \dots - \phi_p x^p = 0$  están fuera del círculo unitario (**estacionariedad**), y  $(A_t) \sim \text{IID}(0, \sigma_A^2)$ .

Media 
$$\mu_Y = \mu \left( 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i \right)^{-1}. \quad [23]$$

Varianza 
$$\sigma_Y^2 = \sigma_A^2 \left( 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i \rho_i \right)^{-1}. \quad [24]$$

ACF 
$$\rho_k = \sum_{i=1}^p \phi_i \rho_{k-i} \quad (k \geq 1). \quad [25]$$

PACF 
$$\rho_{kk} = \begin{cases} \rho_1 & \text{si } k = 1, \\ \vdots & \\ \phi_p & \text{si } k = p, \\ 0 & \text{para todo } k > p. \end{cases} \quad [26]$$

**Observación 30:** La solución general de [25] consiste en una mezcla de exponenciales amortiguadas (asociadas con las

raíces reales de la ecuación característica) y oscilaciones armónicas amortiguadas (asociadas con las raíces complejas). Por último, las representaciones mencionadas en la Observación 29 son fácilmente generalizables al caso de un  $AR(p)$ .

### 2.7.4 Modelo MA(1) - Media-Móvil de Orden 1

$$Y_t = \mu + A_t - \theta_1 A_{t-1}, \text{ o bien} \quad [27]$$

$$Y_t = \mu + (1 - \theta_1 B)A_t, \quad [28]$$

donde  $\mu$  y  $\theta_1$  son parámetros, y  $(A_t) \sim \text{IID}(0, \sigma_A^2)$ . Cualquier modelo MA(1) tiene las propiedades teóricas siguientes:

Media  $\mu_Y = \mu.$  [29]

Varianza  $\sigma_Y^2 = (1 + \theta_1^2)\sigma_A^2.$  [30]

ACF  $\rho_k = \begin{cases} -\theta_1 / (1 + \theta_1^2) & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{para todo } k > 1. \end{cases}$  [31]

PACF  $\rho_{kk} = - \left[ \frac{1}{\sum_{i=0}^k \theta_1^{2i}} \right] \theta_1^k = - \left[ \frac{1 - \theta_1^2}{1 - \theta_1^{2(k+1)}} \right] \theta_1^k$  para todo  $k \geq 1.$  [32]

**Observación 31:** Nótese la **simetría** o **dualidad** entre la formulación y las propiedades de un modelo MA(1) y las de un modelo AR(1). En este mismo sentido, dado que [29]-[32] son cantidades constantes, un modelo MA(1) es estacionario independientemente de lo que valgan sus parámetros. La demostración de las propiedades [29]-[32] se basa en las expresiones siguientes:

$$\mu_Y \equiv E[Y_t] = E[\mu + A_t - \theta_1 A_{t-1}] = \mu. \quad (\text{A})$$

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 (= \gamma_0) &\equiv \text{Var}[Y_t] = \text{Var}[\mu + A_t - \theta_1 A_{t-1}] = \\ &\text{Var}[A_t] + \theta_1^2 \text{Var}[A_{t-1}] - 2\theta_1 \text{Cov}[A_t, A_{t-1}] = (1 + \theta_1^2) \sigma_A^2. \end{aligned} \quad (\text{B})$$

$$\begin{aligned} Y_t = \mu + A_t - \theta_1 A_{t-1} &\Leftrightarrow Y_t - \mu = A_t - \theta_1 A_{t-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \tilde{Y}_t = A_t - \theta_1 A_{t-1} &\Leftrightarrow \tilde{Y}_t = (1 - B\theta_1)A_t, \text{ con } \tilde{Y}_t \equiv Y_t - \mu_Y (= \mu). \end{aligned} \quad (\text{C})$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\equiv \text{Cov}[Y_{t-1}, Y_t] \equiv E[\tilde{Y}_{t-1} \tilde{Y}_t] = E[(A_{t-1} - \theta_1 A_{t-2})(A_t - \theta_1 A_{t-1})] = \\ &= \underbrace{E[A_{t-1} A_t]}_{\text{Cov}[A_{t-1}, A_t]=0} - \theta_1 \underbrace{E[A_{t-1}^2]}_{\text{Var}[A_t]} - \theta_1 \underbrace{E[A_{t-2} A_t]}_{\text{Cov}[A_{t-2}, A_t]=0} + \theta_1^2 \underbrace{E[A_{t-2} A_{t-1}]}_{\text{Cov}[A_{t-2}, A_{t-1}]=0} = -\theta_1 \sigma_A^2. \end{aligned} \quad (\text{D})$$

$$\gamma_k \equiv \text{Cov}[Y_{t-k}, Y_t] \equiv E[\tilde{Y}_{t-k} \tilde{Y}_t] = E[(A_{t-k} - \theta_1 A_{t-k-1})(A_t - \theta_1 A_{t-1})] = 0 \quad (k \geq 2). \quad (\text{E})$$

$$\rho_1 \equiv \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-\theta_1 \sigma_A^2}{(1 + \theta_1^2) \sigma_A^2} = -\theta_1 / (1 + \theta_1^2), \quad \rho_k \equiv \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = 0 \quad (k \geq 2). \quad (\text{F})$$

Por su parte, la PACF de un MA(1) se puede calcular a partir de la Observación 22, con la ACF dada en [31]. El hecho de que un modelo MA(1) sea estacionario independientemente de lo que valgan sus parámetros, sugiere la conclusión general de que la estacionariedad es un asunto que requiere atención sólo cuando un modelo contiene términos de tipo AR. No obstante, en un modelo MA(1) debe ocurrir que  $|\theta_1| < 1$  para que el modelo tenga ciertas propiedades adicionales importantes (análogas a algunas de las que tiene automáticamente un modelo de tipo AR).

Cuando  $|\theta_1| < 1$  (**invertibilidad**) en un modelo MA(1), puede comprobarse lo siguiente:

⇒ El modelo admite una representación inversa (PI o AR) bien definida. [33]

⇒ Dado un valor para  $\rho_1$ , existe un único valor de  $\theta_1$  tal que  $\rho_1 = -\theta_1 / (1 + \theta_1^2)$ . [34]

**Observación 32:** Cuando  $|\theta_1| < 1$  en un MA(1) [ver (C) en la Observación 31]:

$$\begin{aligned}
 A_t &= \tilde{Y}_t + \theta_1 A_{t-1} \\
 &= \tilde{Y}_t + \theta_1 \overbrace{(\tilde{Y}_{t-1} + \theta_1 A_{t-2})}^{A_{t-1}} = \tilde{Y}_t + \theta_1 \tilde{Y}_{t-1} + [\theta_1^2 A_{t-2}] \\
 &= \tilde{Y}_t + \theta_1 \tilde{Y}_{t-1} + \theta_1^2 \overbrace{(\tilde{Y}_{t-2} + \theta_1 A_{t-3})}^{A_{t-2}} = \tilde{Y}_t + \theta_1 \tilde{Y}_{t-1} + \theta_1^2 \tilde{Y}_{t-2} + [\theta_1^3 A_{t-3}] \\
 &= \vdots \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \theta_1^i \tilde{Y}_{t-i} \Leftrightarrow \tilde{Y}_t = -\theta_1 \tilde{Y}_{t-1} - \theta_1^2 \tilde{Y}_{t-2} - \theta_1^3 \tilde{Y}_{t-3} - \dots + A_t.
 \end{aligned} \tag{A}$$

Por lo tanto, la representación PI (AR) de un MA(1) invertible es la siguiente:

$$\underbrace{\tilde{Y}_t + \theta_1 \tilde{Y}_{t-1} + \theta_1^2 \tilde{Y}_{t-2} + \dots}_{\pi(B)\tilde{Y}_t} = A_t \Rightarrow \pi(B) = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_1^i B^i = \underbrace{(1 - \theta_1 B)^{-1}}_{\theta(B)}. \quad (B)$$

Por su parte, la representación PSI (MA) de un MA(1) es simplemente [ver (C) en la Observación 31]

$$\tilde{Y}_t = \underbrace{A_t - \theta_1 A_{t-1}}_{\psi(B)A_t} = \underbrace{(1 - \theta_1 B)}_{\theta(B)} A_t \Rightarrow \psi(B) = \underbrace{1 - \theta_1 B}_{\theta(B)}. \quad (C)$$

**Observación 33:** Por ejemplo,  $\theta_1 = 0.5$  y  $\theta_1 = 2$  dan el mismo  $\rho_1 = -0.4$ , pero sólo  $\theta_1 = 0.5$  es invertible. La condición de invertibilidad  $|\theta_1| < 1$  de un modelo MA(1) puede enunciarse así: "La raíz de la **ecuación característica**  $1 - \theta_1 x = 0$  ( $x^* = \theta_1^{-1}$ ) tiene módulo superior a la unidad (se encuentra fuera del círculo unitario)". Consideraciones semejantes a las relacionadas con las propiedades [33]-[34] son también aplicables a modelos MA de cualquier orden. Dado que un modelo AR estacionario satisface automáticamente ese tipo de propiedades, la invertibilidad es un asunto que requiere atención sólo cuando un modelo contiene términos MA.

### 2.7.5 Modelo MA(2) - Media-Móvil de Orden 2

$$Y_t = \mu + A_t - \theta_1 A_{t-1} - \theta_2 A_{t-2}, \text{ o bien} \quad [35]$$

$$Y_t = \mu + (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) A_t, \quad [36]$$

donde  $\mu$ ,  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son parámetros, y  $(A_t) \sim \text{IID}(0, \sigma_A^2)$ .

**Observación 34:** Un modelo MA(2) es invertible cuando las dos raíces de su ecuación característica  $1 - \theta_1 x - \theta_2 x^2 = 0$  están fuera del círculo unitario, para lo cual es necesario que  $\theta_2 + \theta_1 < 1$ ,  $\theta_2 - \theta_1 < 1$ , y  $|\theta_2| < 1$ .

Cualquier modelo MA(2) tiene las propiedades teóricas siguientes:

$$\text{Media} \quad \mu_Y = \mu. \quad [37]$$

$$\text{Varianza} \quad \sigma_Y^2 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \sigma_A^2. \quad [38]$$

$$\text{ACF} \quad \rho_k = \begin{cases} -[\theta_1(1 - \theta_2)] / (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) & \text{si } k = 1, \\ -\theta_2 / (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) & \text{si } k = 2, \\ 0 & \text{para todo } k > 2. \end{cases} \quad [39]$$

**Observación 35:** La expresión analítica de la PACF en un modelo MA(2) depende de la naturaleza de las dos raíces de su ecuación característica. Dicha expresión es muy complicada. No obstante, la PACF de un MA(2) sigue las mismas pautas que la ACF (**dualidad**) de un modelo AR(2) [lo mismo que la ACF de un MA(2) y la PACF de un AR(2)]. Las propiedades [37]-[39] son extensiones de las propiedades [29]-[31] del MA(1). En el mismo sentido, la representación inicial [35]-[36] del MA(2) puede escribirse como

$$\tilde{Y}_t = A_t - \theta_1 A_{t-1} - \theta_2 A_{t-2} \Leftrightarrow \tilde{Y}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) A_t, \text{ con } \tilde{Y}_t \equiv Y_t - \mu_Y (= \mu), \quad (\text{A})$$

por lo que las representaciones PSI (MA) y PI (AR) del MA(2) son, respectivamente:

$$\tilde{Y}_t = \underbrace{A_t - \theta_1 A_{t-1} - \theta_2 A_{t-2}}_{\psi(B)A_t} = \underbrace{(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)}_{\theta(B)} A_t \Rightarrow \psi(B) = \underbrace{1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2}_{\theta(B)}, \quad (\text{B})$$

$$\tilde{Y}_t = \pi_1 \tilde{Y}_{t-1} + \pi_2 \tilde{Y}_{t-2} + \dots + A_t, \text{ o bien}$$

$$\underbrace{\tilde{Y}_t - \pi_1 \tilde{Y}_{t-1} - \pi_2 \tilde{Y}_{t-2} - \dots}_{\pi(B)\tilde{Y}_t} = A_t \Rightarrow \underbrace{\pi(B) \equiv -\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i B^i}_{\text{General, con } \pi_0 \equiv -1} = \underbrace{(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)^{-1}}_{\theta(B)}. \quad (C)$$

En la representación (C), cada coeficiente o “peso”  $\pi_i$  puede calcularse a partir de los parámetros  $\theta_1$  y  $\theta_2$  de acuerdo con que  $\theta(B)\pi(B) = 1$  con  $\pi_0 \equiv -1$ , de manera que  $(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots) = 1$ . Esta relación proporciona  $\pi_1 = -\theta_1$  y  $\pi_i = \theta_1 \pi_{i-1} + \theta_2 \pi_{i-2}$  para todo  $i \geq 2$ .

### 2.7.6 Modelo MA(q) - Media-Móvil de Orden q

$$Y_t = \mu + A_t - \theta_1 A_{t-1} - \theta_2 A_{t-2} - \dots - \theta_q A_{t-q}, \text{ o bien} \quad [40]$$

$$Y_t = \mu + (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)A_t, \quad [41]$$

donde  $\mu, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  son parámetros, y  $(A_t) \sim \text{IID}(0, \sigma_A^2)$ .

**Observación 36:** Un modelo MA( $q$ ) es invertible cuando las raíces de la ecuación  $1 - \theta_1 x - \theta_2 x^2 - \dots - \theta_q x^q = 0$  están fuera del círculo unitario.

Cualquier modelo MA( $q$ ) tiene las propiedades teóricas siguientes:

Media  $\mu_Y = \mu.$  [42]

Varianza  $\sigma_Y^2 = (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2)\sigma_A^2.$  [43]

**Observación 37:** Las expresiones analíticas de la ACF y la PACF en un modelo MA general dependen de la naturaleza de las raíces de su ecuación característica. Dichas expresiones son muy complicadas. No obstante, la ACF y la PACF de un modelo MA general siguen las mismas pautas que la PACF y la ACF, respectivamente (**dualidad**), de un modelo AR general (ver [25]-[26]). Por último, las representaciones mencionadas en la Observación 35 para un MA(2) son fácilmente generalizables al caso de un MA( $q$ ).

### 2.7.7 Modelo ARMA(1,1) - Autorregresivo Media-Móvil de Orden 1,1

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + A_t - \theta_1 A_{t-1}, \text{ o bien} \quad [44]$$

$$(1 - \phi_1 B)Y_t = \mu + (1 - \theta_1 B)A_t, \quad [45]$$

donde  $\mu$ ,  $\phi_1$  y  $\theta_1$  son parámetros (con  $\phi_1 \neq \theta_1$ ), y  $(A_t) \sim \text{IID}(0, \sigma_A^2)$ .

Un modelo ARMA(1,1) estacionario ( $|\phi_1| < 1$ ) tiene las propiedades teóricas siguientes:

Media 
$$\mu_Y = \frac{\mu}{1 - \phi_1}. \quad [46]$$

Varianza 
$$\sigma_Y^2 = \frac{1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2}{1 - \phi_1^2} \sigma_A^2 = \left[ 1 + \frac{(\phi_1 - \theta_1)^2}{1 - \phi_1^2} \right] \sigma_A^2. \quad [47]$$

$$\text{ACF} \quad \rho_k = \begin{cases} [(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1\theta_1)] / (1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2) & \text{si } k = 1, \\ \rho_1\phi_1^{k-1} & \text{para todo } k > 1. \end{cases} \quad [48]$$

**Observación 38:** La PACF de un modelo ARMA(1,1) consiste en un valor inicial  $\rho_{11} = \rho_1$  seguido de una secuencia de valores que siguen exactamente la pauta de la PACF de un MA(1). Esto mismo ocurre con la ACF [48], que consiste en un valor inicial  $\rho_1$  seguido de una secuencia de valores que siguen exactamente la pauta de la ACF en un AR(1). En general, la ACF (PACF) de un modelo ARMA sigue las pautas de la ACF (PACF) de su parte AR (MA). Por otro lado, la representación inicial [45]-[45] del ARMA(1,1) puede escribirse como

$$\tilde{Y}_t = \phi_1\tilde{Y}_{t-1} + A_t - \theta_1A_{t-1} \Leftrightarrow (1 - \phi_1B)\tilde{Y}_t = (1 - \theta_1B)A_t, \text{ con } \tilde{Y}_t \equiv Y_t - \mu_Y (= \frac{\mu}{1-\phi_1}), \quad (\text{A})$$

por lo que las representaciones PSI (AR) y PI (MA) del ARMA(1,1) **estacionario** ( $|\phi_1| < 1$ ) e **invertible** ( $|\theta_1| < 1$ ) son, respectivamente:

$$\tilde{Y}_t = \underbrace{A_t + \psi_1A_{t-1} + \psi_2A_{t-2} + \dots}_{\psi(B)A_t} \Rightarrow \underbrace{\psi(B) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i B^i}_{\text{General, con } \psi_0 \equiv 1} = \underbrace{(1 - \phi_1B)^{-1}}_{\phi(B)} \underbrace{(1 - \theta_1B)}_{\theta(B)}, \quad (\text{B})$$

$$\tilde{Y}_t = \pi_1\tilde{Y}_{t-1} + \pi_2\tilde{Y}_{t-2} + \dots + A_t, \text{ o bien}$$

$$\underbrace{\tilde{Y}_t - \pi_1\tilde{Y}_{t-1} - \pi_2\tilde{Y}_{t-2} - \dots}_{\pi(B)\tilde{Y}_t} = A_t \Rightarrow \underbrace{\pi(B) \equiv -\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i B^i}_{\text{General, con } \pi_0 \equiv -1} = \underbrace{(1 - \theta_1B)^{-1}}_{\theta(B)} \underbrace{(1 - \phi_1B)}_{\phi(B)}. \quad (\text{C})$$

En la representación (B), cada coeficiente o “peso”  $\psi_i$  puede calcularse a partir de los parámetros  $\phi_1$  y  $\theta_1$  de acuerdo

con que  $\phi(B)\psi(B) = \theta(B)$  con  $\psi_0 \equiv 1$ , de manera que  $(1 - \phi_1 B)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 - \dots) = (1 - \theta_1 B)$ . Esta relación proporciona  $\psi_1 = \phi_1 - \theta_1$  y  $\psi_i = \phi_1 \psi_{i-1}$  para todo  $i \geq 2$ , o bien  $\psi_i = \phi_1^{i-1}(\phi_1 - \theta_1)$  para todo  $i \geq 1$ , de manera que la secuencia  $\psi_1, \psi_2, \dots$  sigue una pauta semejante a la de la ACF de un AR(1). Por su parte, en la representación (C), cada coeficiente o “peso”  $\pi_i$  puede calcularse a partir de los parámetros  $\phi_1$  y  $\theta_1$  de acuerdo con que  $\theta(B)\pi(B) = \phi(B)$  con  $\pi_0 \equiv -1$ , de manera que  $(1 - \theta_1 B)(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots) = (1 - \phi_1 B)$ . Esta relación proporciona  $\pi_1 = \phi_1 - \theta_1$  y  $\pi_i = \theta_1 \pi_{i-1}$  para todo  $i \geq 2$ , o bien  $\pi_i = \theta_1^{i-1}(\phi_1 - \theta_1)$  para todo  $i \geq 1$ , de manera que la secuencia  $\pi_1, \pi_2, \dots$  sigue una pauta semejante a la de la PACF de un MA(1).

### 2.7.8 Modelo ARMA(p,q) - Autorregresivo Media-Móvil de Orden p,q

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + A_t - \theta_1 A_{t-1} - \theta_2 A_{t-2} - \dots - \theta_q A_{t-q}, \text{ o bien} \quad [49]$$

$$\phi(B)Y_t = \mu + \theta(B)A_t, \quad [50]$$

donde

$$\phi(B) \equiv 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \quad [51]$$

es el **operador o polinomio autorregresivo** (AR) del modelo,

$$\theta(B) \equiv 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q \quad [52]$$

es el **operador** o **polinomio media móvil** (MA),  $(A_t) \sim \text{IID}(0, \sigma_A^2)$ , y  $\mu, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  son parámetros tales que todas las raíces de la ecuación característica AR

$$1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \dots - \phi_p x^p = 0 \quad [53]$$

están fuera del círculo unitario (**condición de estacionariedad**). Un modelo ARMA( $p, q$ ) es **invertible** si todas las raíces de la ecuación característica MA

$$1 - \theta_1 x - \theta_2 x^2 - \dots - \theta_q x^q = 0 \quad [54]$$

están fuera del círculo unitario (**condición de invertibilidad**).

Algunas propiedades teóricas de cualquier modelo ARMA( $p, q$ ) estacionario e invertible son las siguientes:

⇒ La media del modelo es

$$\mu_Y \equiv E[Y_t] = \frac{\mu}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p} = \frac{\mu}{\phi(1)}, \quad [55]$$

donde  $\phi(1)$  es el valor del operador AR [51] evaluado en  $B = 1$ .

⇒ El modelo puede escribirse como en [49]-[50], o bien como

$$\phi(B)\tilde{Y}_t = \theta(B)A_t \quad (\text{con } \tilde{Y}_t \equiv Y_t - \mu_Y). \quad [56]$$

⇒ La condición de **estacionariedad** de un modelo ARMA garantiza que los parámetros o pesos  $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$  del polinomio de orden infinito

$$\psi(B) \equiv \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \equiv 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i B^i \quad (\psi_0 \equiv 1) \quad [57]$$

satisfacen la condición  $\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| < \infty$ , de manera que la representación  $\tilde{Y}_t = \psi(B)A_t$  (PSI o MA) del modelo está bien definida.

⇒ La condición de **invertibilidad** de un modelo ARMA garantiza que los parámetros o pesos  $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots$  del polinomio de orden infinito

$$\pi(B) \equiv \frac{\phi(B)}{\theta(B)} \equiv 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots \equiv - \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i B^i \quad (\pi_0 \equiv -1) \quad [58]$$

satisfacen la condición  $\sum_{i=0}^{\infty} |\pi_i| < \infty$ , de manera que la representación  $\pi(B)\tilde{Y}_t = A_t$  (PI o AR) del modelo está bien definida y tiene un sentido práctico adecuado.

**Observación 39:** En modelos  $AR(p)$ ,  $\psi(B)$  es un polinomio infinito (como la ACF) con cada  $\psi_i$  ( $i \geq 1$ ) expresable en función de  $\phi_1, \dots, \phi_p$ , mientras que  $\pi(B)$  es un polinomio finito (como la PACF) de grado  $p$  con  $\pi_i = \phi_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ). En modelos  $MA(q)$ ,  $\psi(B)$  es un polinomio finito (como la ACF) de grado  $q$  con  $\psi_i = -\theta_i$  ( $i = 1, \dots, q$ ), mientras que  $\pi(B)$  es un polinomio infinito (como la PACF) con cada  $\pi_i$  ( $i \geq 1$ ) expresable en función de  $\theta_1, \dots, \theta_q$ . En modelos  $ARMA(p, q)$ , tanto  $\psi(B)$  como  $\pi(B)$  son polinomios infinitos (como la ACF y la PACF), con cada  $\psi_i$  y cada  $\pi_i$  ( $i \geq 1$ ) expresables en función de  $\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$ . En general, los pesos (coeficientes)  $\psi_i$  y  $\pi_i$  de [57]-[58] pueden calcularse recursivamente teniendo en cuenta que  $\phi(B)\psi(B) = \theta(B)$  y que  $\theta(B)\pi(B) = \phi(B)$ , de manera que, por un lado,

$$\psi_i = \phi_1\psi_{i-1} + \phi_2\psi_{i-2} + \dots + \phi_p\psi_{i-p} - \theta_i$$

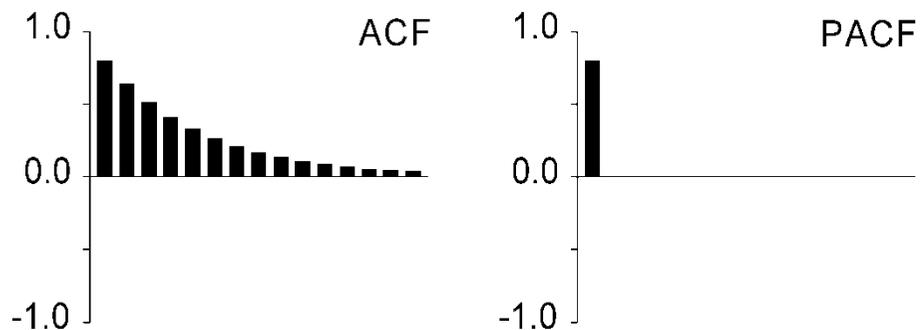
para todo  $i > 0$  (donde  $\psi_0 = 1$ ,  $\psi_i = 0$  si  $i < 0$  y  $\theta_i = 0$  si  $i > q$ ), y, por otro lado,

$$\pi_i = \theta_1\pi_{i-1} + \theta_2\pi_{i-2} + \dots + \theta_q\pi_{i-q} + \phi_i$$

para todo  $i > 0$  (donde  $\pi_0 = -1$ ,  $\pi_i = 0$  si  $i < 0$  y  $\phi_i = 0$  si  $i > p$ ). Por último, de la relación  $\psi(B)\pi(B) = 1$  implícita en [57]-[58] se deduce que

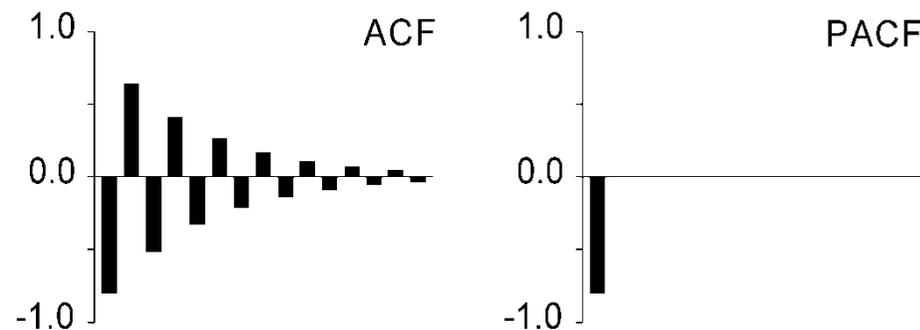
$$\pi_i = -\sum_{j=0}^{i-1} \pi_j\psi_{i-j} \quad (\pi_0 = -1), \quad \psi_i = \sum_{j=0}^{i-1} \psi_j\pi_{i-j} \quad (\psi_0 = 1) \quad \text{para todo } i \geq 1.$$

Las secuencias  $\psi_1, \psi_2, \dots$  y  $\pi_1, \pi_2, \dots$  calculadas a partir de un modelo ARMA siguen pautas semejantes a las de la ACF y la PACF, respectivamente, del modelo (Observación 38). [El cálculo de la ACF y la PACF teóricas de cualquier modelo de tipo ARMA puede llevarse a cabo en EViews con el programa PRG07-ACF-PACF.prg. Por su parte, el cálculo de los pesos  $\psi_i$  y  $\pi_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) está programado en PRG08-PSI-PI.prg.]



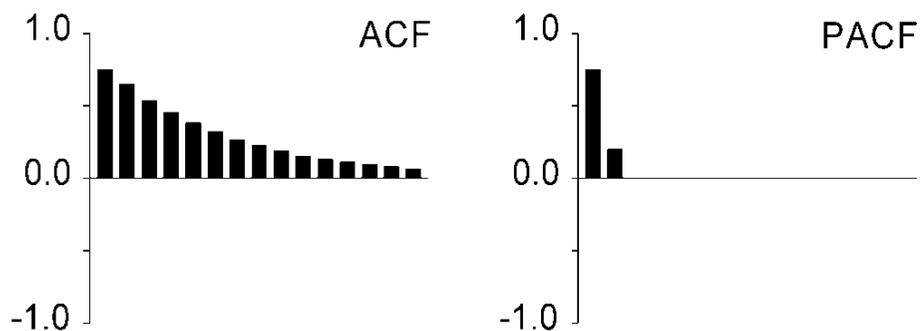
**Figura 2.16**

AR(1):  $Y_t = 0.8Y_{t-1} + A_t$ .  
Parámetro positivo.



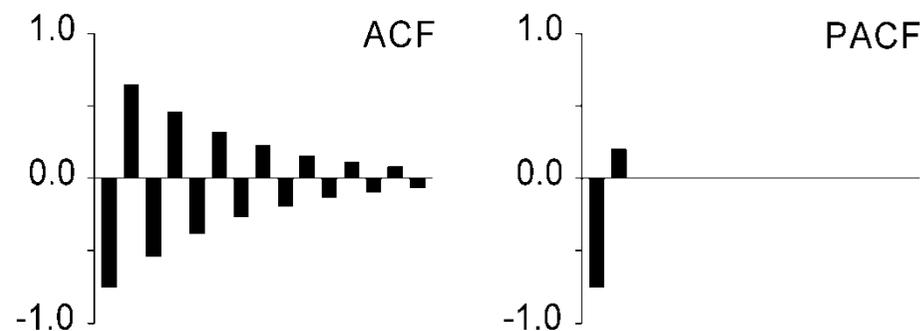
**Figura 2.17**

AR(1):  $Y_t = -0.8Y_{t-1} + A_t$ .  
Parámetro negativo.



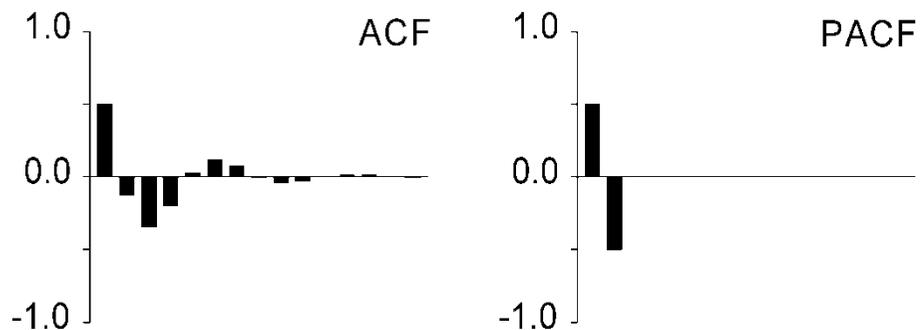
**Figura 2.18**

AR(2):  $Y_t = 0.6Y_{t-1} + 0.2Y_{t-2} + A_t$ .  
Raíces de [56] reales: -4.19, +1.19 (dominante).



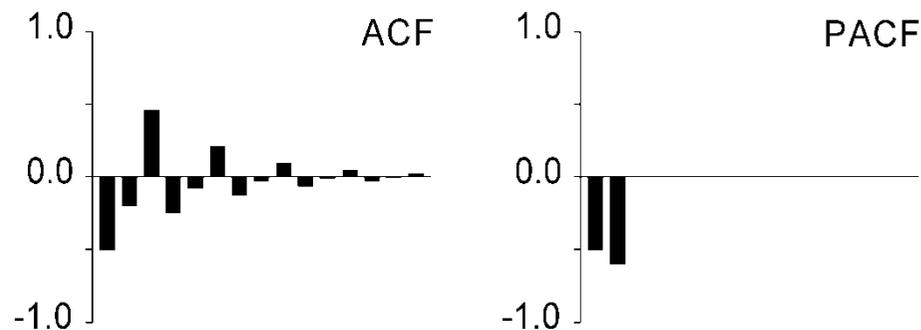
**Figura 2.19**

AR(2):  $Y_t = -0.6Y_{t-1} + 0.2Y_{t-2} + A_t$ .  
Raíces de [56] reales: +4.19, -1.19 (dominante).



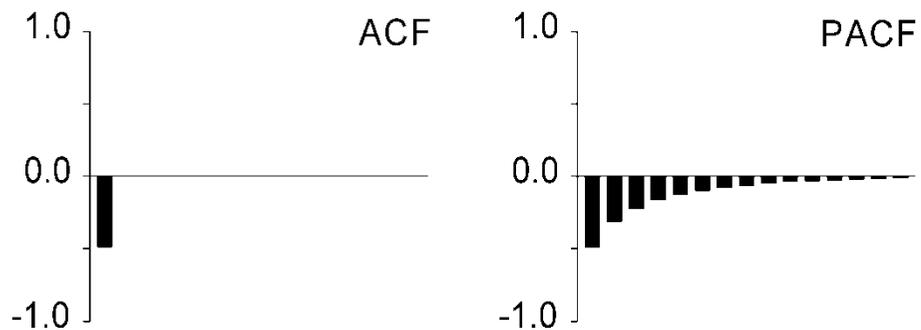
**Figura 2.20**

AR(2):  $Y_t = 0.75Y_{t-1} - 0.5Y_{t-2} + A_t$ .  
 Raíces de [56] complejas:  $+0.75 \pm 1.20i$ .



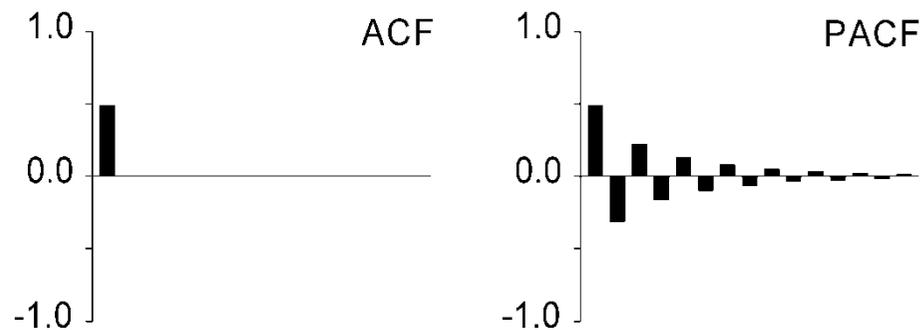
**Figura 2.21**

AR(2):  $Y_t = -0.8Y_{t-1} - 0.6Y_{t-2} + A_t$ .  
 Raíces de [56] complejas:  $-0.67 \pm 1.11i$ .



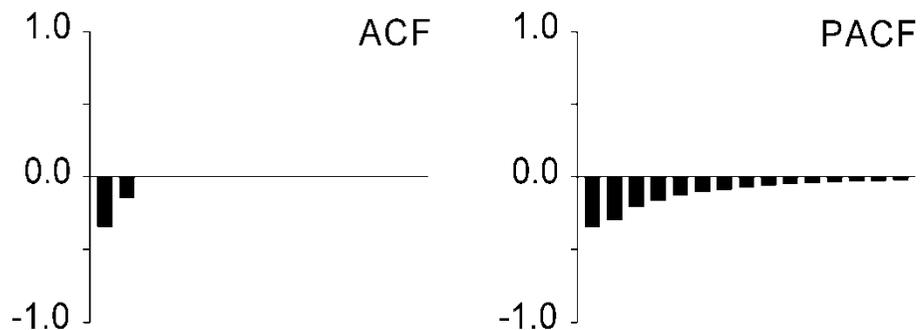
**Figura 2.22**

MA(1):  $Y_t = A_t - 0.8A_{t-1}$ .  
 Parámetro positivo.



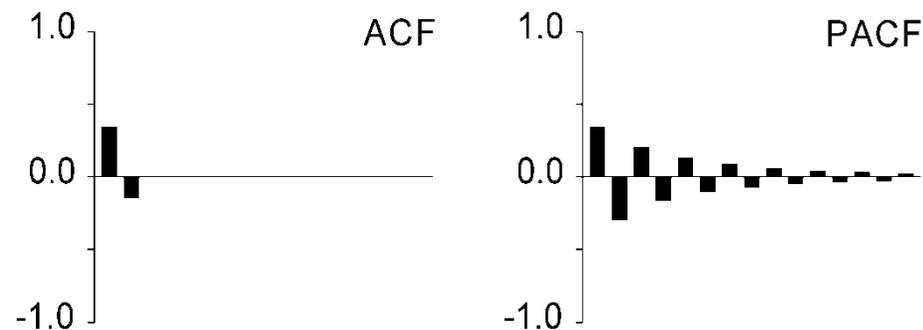
**Figura 2.23**

MA(1):  $Y_t = A_t + 0.8A_{t-1}$ .  
 Parámetro negativo.



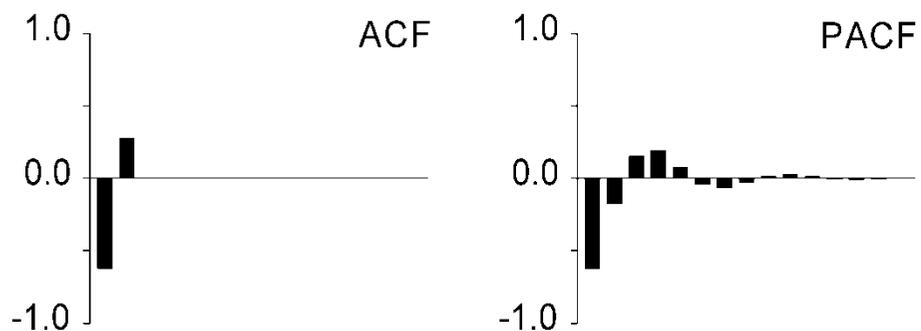
**Figura 2.24**

MA(2):  $Y_t = A_t - 0.6A_{t-1} - 0.2A_{t-2}$ .  
 Raíces de [57] reales:  $-4.19, +1.19$  (dominante).



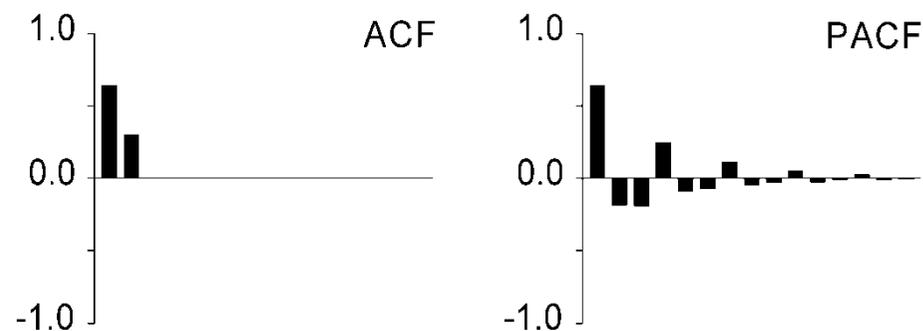
**Figura 2.25**

MA(2):  $Y_t = A_t + 0.6A_{t-1} - 0.2A_{t-2}$ .  
 Raíces de [57] reales:  $+4.19, -1.19$  (dominante).



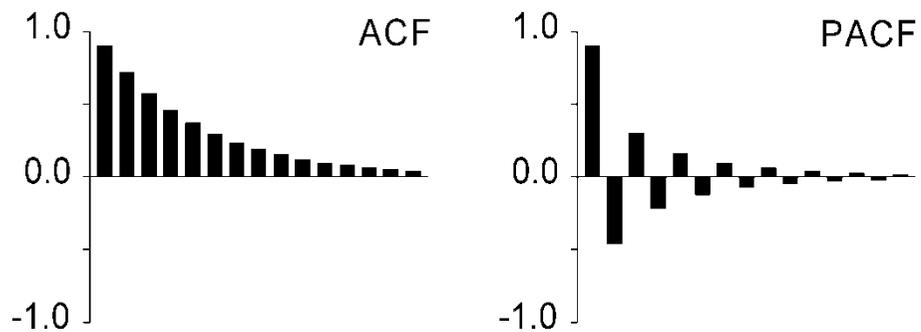
**Figura 2.26**

MA(2):  $Y_t = A_t - 0.75A_{t-1} + 0.5A_{t-2}$ .  
 Raíces de [57] complejas:  $+0.75 \pm 1.20i$ .



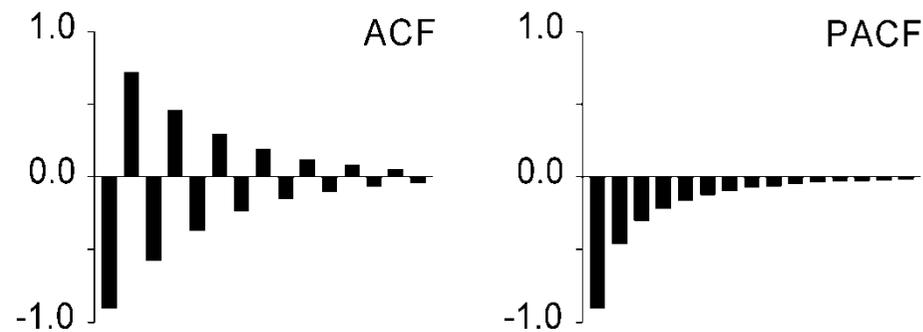
**Figura 2.27**

MA(2):  $Y_t = A_t + 0.8A_{t-1} + 0.6A_{t-2}$ .  
 Raíces de [57] complejas:  $-0.67 \pm 1.11i$ .



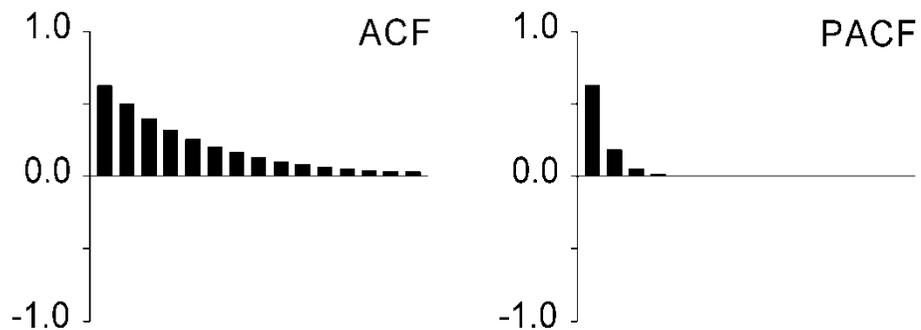
**Figura 2.28**

ARMA(1,1):  $Y_t = 0.8Y_{t-1} + A_t + 0.8A_{t-1}$ .



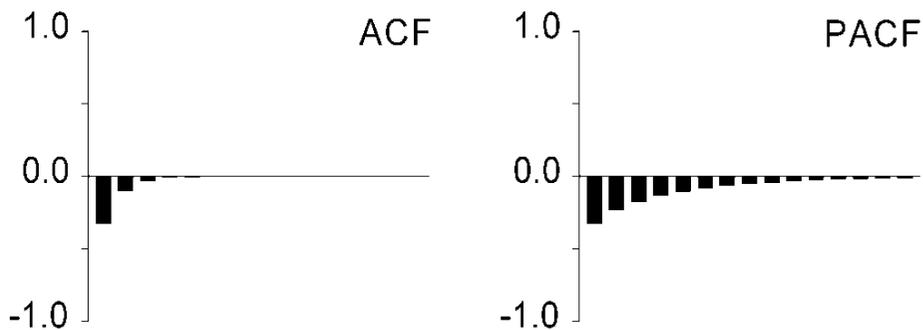
**Figura 2.29**

ARMA(1,1):  $Y_t = -0.8Y_{t-1} + A_t - 0.8A_{t-1}$ .



**Figura 2.30**

ARMA(1,1):  $Y_t = 0.8Y_{t-1} + A_t - 0.3A_{t-1}$ .



**Figura 2.31**

ARMA(1,1):  $Y_t = 0.3Y_{t-1} + A_t - 0.8A_{t-1}$ .

**TABLA 2.2**  
**Algunas Propiedades Teóricas de Modelos Univariantes**

Propiedades	Modelo AR(p)	Modelo MA(q)	Modelo ARMA(p,q)
Condición de estacionariedad	Raíces de $\phi(x) = 0$ fuera del círculo unitario	Siempre estacionario	Raíces de $\phi(x) = 0$ fuera del círculo unitario
Condición de invertibilidad	Siempre invertible	Raíces de $\theta(x) = 0$ fuera del círculo unitario	Raíces de $\theta(x) = 0$ fuera del círculo unitario
$\tilde{Y}_t$ en términos de $A_{t-i}$	$\tilde{Y}_t = \phi^{-1}(B)A_t$	$\tilde{Y}_t = \theta(B)A_t$	$\tilde{Y}_t = \phi^{-1}(B)\theta(B)A_t$
$\tilde{Y}_t$ en términos de $\tilde{Y}_{t-i}$	$\phi(B)\tilde{Y}_t = A_t$	$\theta^{-1}(B)\tilde{Y}_t = A_t$	$\theta^{-1}(B)\phi(B)\tilde{Y}_t = A_t$
Operador $\psi(B)$	$\psi(B) = \phi^{-1}(B)$ (infinito)	$\psi(B) = \theta(B)$ (finito)	$\psi(B) = \phi^{-1}(B)\theta(B)$ (infinito)
Operador $\pi(B)$	$\pi(B) = \phi(B)$ (finito)	$\pi(B) = \theta^{-1}(B)$ (infinito)	$\pi(B) = \theta^{-1}(B)\phi(B)$ (infinito)
ACF	Infinita: Mezcla de exponenciales y oscilaciones amortiguadas	Finita: Igual a 0 después de $k = q$	Infinita: Mezcla de exponenciales y oscilaciones amortiguadas después de $k = q - p$
PACF	Finita: Igual a 0 después de $k = p$	Infinita: Dominada por mezcla de exponenciales y oscilaciones amortiguadas	Infinita: Dominada por mezcla de exponenciales y oscilaciones amortiguadas después de $k = p - q$

## 2.8 MODELOS MULTIPLICATIVOS

Con mucha frecuencia, la ACF y la PACF muestrales de series estacionarias obtenidas a partir de series estacionales, presentan pautas significativas en sus retardos múltiplos del período estacional (**retardos estacionales**, como 12, 24, 36, ... para series mensuales, ó 4, 8, 12, ... para series trimestrales) y alrededor de dichos retardos.

Estas pautas representan la **dinámica estacional** (un periodo con respecto al mismo periodo en estaciones anteriores) de la serie original que aún está presente en la serie transformada (estacionaria), y que acompaña a (e interactúa con) la **dinámica regular** (un periodo con respecto a los anteriores en la misma estación) de dicha serie.

### 2.8.1 Ejemplo - Modelo $AR(1) \times AR(1)_{12}$ para Series Mensuales

$$(1 - \phi_1 B)(1 - \Phi_1 B^{12})\tilde{Y}_t = A_t, \quad [59]$$

donde  $\phi_1$  y  $\Phi_1$  son parámetros (con  $|\phi_1| < 1, |\Phi_1| < 1$ ), y  $(A_t) \sim \text{IID}(0, \sigma_A^2)$ .

Los términos  $AR(1)$  **regular**  $(1 - \phi_1 B)$  y  $AR(1)$  **anual**  $(1 - \Phi_1 B^{12})$  describen la dinámica regular y anual, respectivamente, de una serie estacionaria.

### 2.8.2 Ejemplo - Modelo MA(1) × MA(1)<sub>12</sub> para Series Mensuales

$$\tilde{Y}_t = (1 - \theta_1 B)(1 - \Theta_1 B^{12})A_t, \quad [60]$$

donde  $\theta_1$  y  $\Theta_1$  son parámetros (con  $|\theta_1| < 1, |\Theta_1| < 1$ ), y  $(A_t) \sim \text{IID}(0, \sigma_A^2)$ .

Los términos MA(1) **regular**  $(1 - \theta_1 B)$  y MA(1) **anual**  $(1 - \Theta_1 B^{12})$  describen la dinámica regular y anual, respectivamente, de una serie estacionaria.

### 2.8.3 Ejemplo - Modelo MA(1) × AR(2)<sub>12</sub> para Series Mensuales

$$(1 - \Phi_1 B^{12} - \Phi_2 B^{24})\tilde{Y}_t = (1 - \theta_1 B)A_t, \quad [61]$$

donde  $\Phi_1, \Phi_2$  y  $\theta_1$  son parámetros (con las raíces de  $1 - \Phi_1 x - \Phi_2 x^2 = 0$  fuera del círculo unitario, y  $|\theta_1| < 1$ ), y  $(A_t) \sim \text{IID}(0, \sigma_A^2)$ .

Los términos MA(1) **regular**  $(1 - \theta_1 B)$  y AR(2) **anual**  $(1 - \Phi_1 B^{12} - \Phi_2 B^{24})$  describen la dinámica regular y anual, respectivamente, de una serie estacionaria.

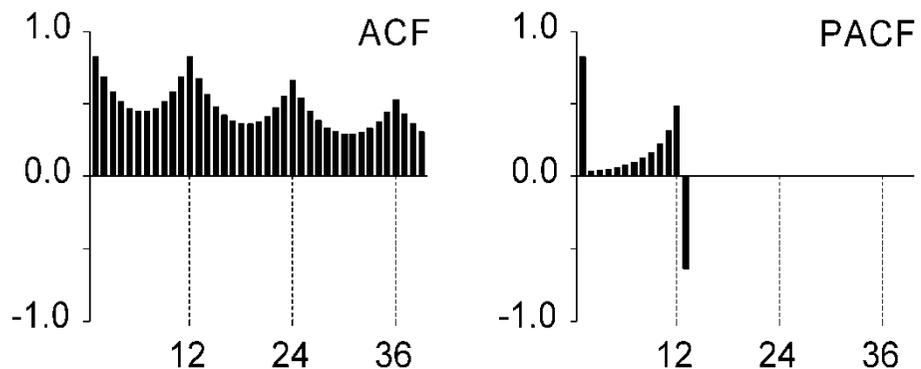
### 2.8.4 Modelo Multiplicativo General ARMA(p, q) × ARMA(P, Q)<sub>S</sub>

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^S)\tilde{Y}_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^S)A_t. \quad [62]$$

- ⇒ Comparar con [56] y [49]-[50]. En particular,  $\phi_p(B)$  y  $\theta_q(B)$  son los operadores AR (estacionario) y MA (invertible) habituales (que se denominan **operadores regulares**).
- ⇒  $\Phi_P(B^S) \equiv 1 - \Phi_1 B^S - \Phi_2 B^{2S} - \dots - \Phi_P B^{PS} \equiv 1 - \sum_{i=1}^P \Phi_i B^{iS}$  es el **operador AR estacional o anual**, con las raíces de  $\Phi_P(x) = 0$  fuera del círculo unitario.
- ⇒  $\Theta_Q(B^S) \equiv 1 - \Theta_1 B^S - \Theta_2 B^{2S} - \dots - \Theta_Q B^{QS} \equiv 1 - \sum_{i=1}^Q \Theta_i B^{iS}$  es el **operador MA estacional o anual**, con las raíces de  $\Theta_Q(x) = 0$  fuera del círculo unitario.

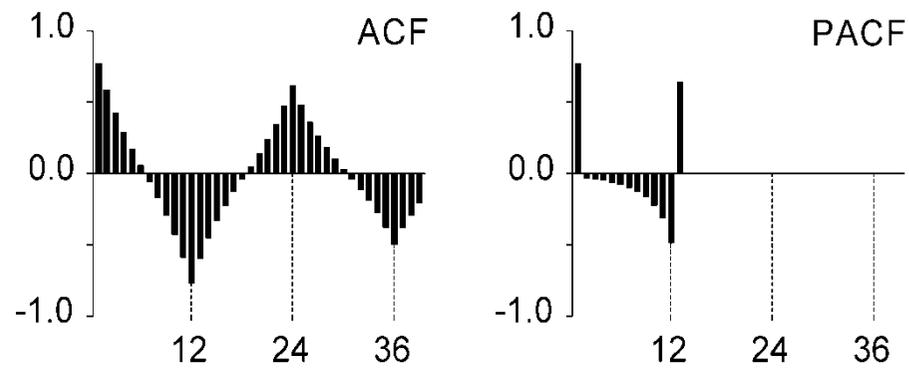
**Observación 40:** La **ACF teórica** de un modelo  $\text{ARMA}(p, q) \times \text{ARMA}(P, Q)_S$  presenta las pautas siguientes: [i] en los primeros retardos (1, 2, 3, ...) aparece la ACF de la parte regular  $\text{ARMA}(p, q)$ , [ii] en los retardos anuales ( $S, 2S, 3S, \dots$ ) aparece la ACF de la parte anual  $\text{ARMA}(P, Q)_S$ , [iii] la pauta de la ACF de la parte regular se repite a la izquierda (en el sentido  $\leftarrow$ ) y a la derecha (en el sentido  $\rightarrow$ ) de cada coeficiente anual, con signo igual al producto de los signos del coeficiente anual y de los coeficientes regulares correspondientes.

Por su parte, la **PACF teórica** de un modelo  $\text{ARMA}(p, q) \times \text{ARMA}(P, Q)_S$  presenta las pautas siguientes: [i] en los primeros retardos (1, 2, 3, ...) aparece la PACF de la parte regular  $\text{ARMA}(p, q)$ , [ii] en los retardos anuales ( $S, 2S, 3S, \dots$ ) aparece la PACF de la parte anual  $\text{ARMA}(P, Q)_S$ , [iii] a la derecha de cada coeficiente anual se repite (en el sentido  $\rightarrow$ ) la pauta de la PACF de la parte regular, con el signo cambiado si el coeficiente anual es positivo, o con su signo si dicho coeficiente es negativo, [iv] a la izquierda de cada coeficiente anual se repite (en el sentido  $\leftarrow$ ) la pauta de la ACF de la parte regular, con signo igual al producto de los signos del coeficiente anual y de los coeficientes regulares correspondientes.



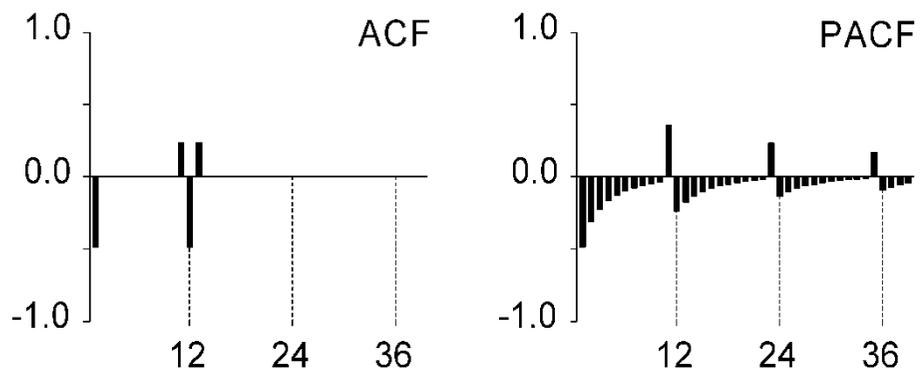
**Figura 2.32**

$AR(1) \times AR(1)_{12}$ , con  $\phi_1 = 0.8$ ,  $\Phi_1 = 0.8$ .



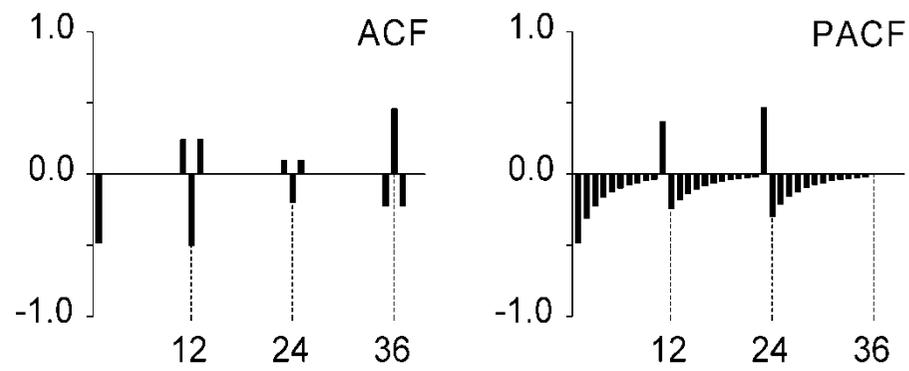
**Figura 2.33**

$AR(1) \times AR(1)_{12}$ , con  $\phi_1 = 0.8$ ,  $\Phi_1 = -0.8$ .



**Figura 2.34**

$MA(1) \times MA(1)_{12}$ , con  $\theta_1 = 0.8$ ,  $\Theta_1 = 0.8$ .



**Figura 2.35**

$MA(1) \times AR(2)_{12}$ , con  $\theta_1 = 0.8$ ,  $\Phi_1 = -0.8$ ,  $\Phi_2 = -0.6$ .

## 2.9 MODELOS NO ESTACIONARIOS

Un modelo univariante no estacionario para una serie no estacionaria es el modelo que resulta de considerar conjuntamente [i] las transformaciones que requiere dicha serie para hacerla estacionaria y [ii] un modelo univariante estacionario para la serie transformada.

### 2.9.1 Modelo Multiplicativo General $\text{ARIMA}(p, d, q) \times \text{ARIMA}(P, D, Q)_S$

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^S)[\nabla^d\nabla_S^D\dot{Y}_t - \mu_W] = \theta_q(B)\Theta_Q(B^S)A_t, \quad [63]$$

donde  $\mu_W \equiv E[W_t]$  con  $W_t \equiv \nabla^d\nabla_S^D\dot{Y}_t$  (comparar con [62]).

### 2.9.2 Dos Interpretaciones Equivalentes

El modelo general [63] puede interpretarse como un **modelo no estacionario** para una serie (original) no estacionaria que requiere [i] una transformación de Box-Cox, [ii]  $d$  diferencias regulares y [iii]  $D$  diferencias estacionales de periodo  $S$  para hacerla estacionaria, o bien como un **modelo estacionario** para una serie estacionaria que se obtiene aplicándole una secuencia de transformaciones [i]-[iii] a una serie (original) no estacionaria.

## 2.10 IDENTIFICACIÓN - RESUMEN

**ENTRADA:**  $\mathbf{y} \equiv [y_1, \dots, y_N]'$  (serie temporal original);  $S$  (período estacional).

1. Elegir  $m$  en la transformación de Box-Cox – Gráfico desviación típica-media. Se obtiene  $\dot{y}_t$  ( $t = 1, \dots, N$ ), con  $\dot{y}_t = \ln y_t$  si  $m = 0$ ,  $\dot{y}_t = y_t^m$  si  $m \neq 0$ .
2. Elegir  $d$  y  $D$  – Gráfico temporal (tendencia, estacionalidad) y ACF (amortiguamiento) de  $\dot{y}_t$  ( $t = 1, \dots, N$ ). Se obtiene una **serie transformada** (tentativamente **estacionaria**) con  $n \equiv N - d - DS$  observaciones del tipo  $w_t = \nabla^d \nabla_S^D \dot{y}_t$ .
3. Incluir o no  $\mu_W$  – Contraste de significación a partir de la serie transformada.
4. Elegir  $p$ ,  $P$ ,  $q$  y  $Q$  – ACF y PACF muestrales de la serie transformada comparadas con ACF y PACF teóricas de modelos  $\text{ARMA}(p, q) \times \text{ARMA}(P, Q)_S$  estacionarios:
  - ⇒ Considerar siempre en primer lugar lo más obvio, empezando con la parte regular.
  - ⇒ Un valor grande en la ACF o en la PACF muestrales en un retardo  $k$  dado, puede **no** ser relevante si se encuentra aislado y  $k$  es grande.
  - ⇒ Una configuración reconocible de valores pequeños **sí** puede ser relevante.

**SALIDA:** Modelo tentativo de tipo  $ARIMA(p, d, q) \times ARIMA(P, D, Q)_S$  para la serie original [o, equivalentemente, de tipo  $ARMA(p, q) \times ARMA(P, Q)_S$  para la serie transformada].

**Observación 41 - Contrastes Formales de Raíces Unitarias:** A veces pueden ayudar a elegir  $d$  (el número de diferencias regulares que requiere una serie para estabilizar su nivel medio general) en el paso 2 anterior. Ver, por ejemplo, en EViews 4.1 el enlace a Unit Root Test en Help → EViews Help Topics ... → Series.

**Observación 42 - Tasas de Variación:** La **tasa convencional de variación (neta)** de  $y_t$  es (en proporción, o en tanto por 1)

$$tcv_t(k) \equiv \frac{y_t}{y_{t-k}} - 1 = \frac{y_t - y_{t-k}}{y_{t-k}} = \frac{(1 - B^k)y_t}{y_{t-k}},$$

mientras que la **tasa logarítmica de variación** de  $y_t$  es (en proporción, o en tanto por 1)

$$tlv_t(k) \equiv \ln[1 + tcv_t(k)] = \ln \frac{y_t}{y_{t-k}} = \ln y_t - \ln y_{t-k} = (1 - B^k) \ln y_t,$$

que es aproximadamente igual a  $tcv_t(k)$  para valores de  $tcv_t(k)$  pequeños. La tasa convencional es **multiplicativa**, en el sentido que

$$[1 + tcv_t(k)] = \frac{y_t}{y_{t-k}} = \frac{y_t}{y_{t-1}} \frac{y_{t-1}}{y_{t-2}} \dots \frac{y_{t-k+1}}{y_{t-k}} = \prod_{i=0}^{k-1} [1 + tcv_{t-i}(1)],$$

por lo que la tasa logarítmica es **aditiva**:

$$tlv_t(k) = \ln \prod_{i=0}^{k-1} [1 + tcv_{t-i}(1)] = \sum_{i=0}^{k-1} \ln tlv_{t-i}(1).$$

Dado que muchas series temporales requieren en la práctica una transformación logarítmica y algún tipo de diferenciación para hacerlas estacionarias, las series resultantes pueden interpretarse en términos de diferentes tasas de variación. Por ejemplo, si  $y_1, \dots, y_N$  es una serie mensual, entonces:

⇒  $w_{t1} = \nabla \ln y_t$  es una tasa logarítmica de variación mensual.

⇒  $w_{t2} = \nabla_{12} \ln y_t$  es una tasa logarítmica de variación interanual.

⇒  $w_{t3} = \nabla^2 \ln y_t$  es una variación (absoluta) mensual de una tasa logarítmica de variación mensual.

⇒  $w_{t4} = \nabla \nabla_{12} \ln y_t$  es una variación (absoluta) mensual de una tasa logarítmica de variación interanual, o bien una variación (absoluta) interanual de una tasa logarítmica de variación mensual.

## Ejemplos de Identificación

1. ST02: Serie TVPIB.
2. ST14: Serie VIVIN.
3. ST19: Serie AIRLINE.
4. ST20: Serie TPARO.

## ESTIMACIÓN

### 2.11 ESTIMACIÓN - RESUMEN

**ENTRADA:**  $\mathbf{w} \equiv [w_1, \dots, w_n]'$  (serie estacionara con  $n \equiv N - d - DS$  observaciones del tipo  $w_t = \nabla^d \nabla_S^D \dot{y}_t$ ); modelo de tipo  $\text{ARMA}(p, q) \times \text{ARMA}(P, Q)_S$  para la serie  $\mathbf{w}$ .

1. Estimación de los **parámetros** del modelo (máxima verosimilitud, mínimos cuadrados).
2. Cálculo de los **residuos** del modelo estimado.

**SALIDA:** Estimaciones de los parámetros ( $\hat{\mu}_W$ ,  $\hat{\Phi} \equiv [\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_p]'$ ,  $\hat{\Phi} \equiv [\hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_P]'$ ,  $\hat{\Theta} \equiv [\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_q]'$ ,  $\hat{\Theta} \equiv [\hat{\Theta}_1, \dots, \hat{\Theta}_Q]'$ ,  $\hat{\sigma}_A^2$ ); estimación de la matriz de varianzas-covarianzas del estimador utilizado ( $\mathbf{V}$ ); serie de **residuos** ( $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n$ ).

**Observación 43 - Estimación de modelos univariantes:** La **función de verosimilitud exacta** (FVE) asociada con el modelo univariante [63] es la función de densidad de un vector  $\mathbf{W} \equiv [W_1, \dots, W_n]'$  (con  $W_t \equiv \nabla^d \nabla_S^D \dot{Y}_t$ ) del que se supone procede la serie (estacionaria)  $\mathbf{w} \equiv [w_1, \dots, w_n]'$ , considerada como función de los parámetros que figuran en [63]. Si  $\mathbf{W}$  sigue una distribución Normal multivariante [es decir, bajo la hipótesis de que  $(A_t) \sim \text{NIID}(0, \sigma_A^2)$ ], entonces la FVE asociada con el modelo univariante [63] es

$$L(\boldsymbol{\beta}, \sigma_A^2) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\boldsymbol{\Gamma}_n|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{w}}' \boldsymbol{\Gamma}_n^{-1} \tilde{\mathbf{w}}\right), \quad (1)$$

donde  $\boldsymbol{\beta}$  contiene todos los parámetros del modelo [63] excepto  $\sigma_A^2$ ,  $\boldsymbol{\Gamma}_n \equiv \text{Var}[\mathbf{W}]$ , y  $\tilde{\mathbf{w}} \equiv \mathbf{w} - \text{E}[\mathbf{W}]$ , con  $\text{E}[\mathbf{W}] = [\mu_W, \dots, \mu_W]'$ . Dado que  $\boldsymbol{\Gamma}_n$  siempre puede escribirse como  $\boldsymbol{\Gamma}_n = \sigma_A^2 \boldsymbol{\Omega}$  (definiendo  $\boldsymbol{\Omega} \equiv \sigma_A^{-2} \boldsymbol{\Gamma}_n$ ), el logaritmo neperiano (ln) de la FVE (1) puede escribirse como

$$\ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma_A^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \sigma_A^2 - \frac{1}{2} \ln |\boldsymbol{\Omega}| - \frac{\sigma_A^{-2}}{2} \tilde{\mathbf{w}}' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \tilde{\mathbf{w}}. \quad (2)$$

Por ejemplo, para modelos AR(1) (ver 2.7.1) y MA(1) (ver 2.7.4),

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{1-\phi_1^2} \begin{bmatrix} 1 & \phi_1 & \phi_1^2 & \dots & \phi_1^{n-2} & \phi_1^{n-1} \\ \phi_1 & 1 & \phi_1 & \dots & \phi_1^{n-3} & \phi_1^{n-2} \\ \phi_1^2 & \phi_1 & 1 & \dots & \phi_1^{n-4} & \phi_1^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi_1^{n-2} & \phi_1^{n-3} & \phi_1^{n-4} & \dots & 1 & \phi_1 \\ \phi_1^{n-1} & \phi_1^{n-2} & \phi_1^{n-3} & \dots & \phi_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 + \theta_1^2 & -\theta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\theta_1 & 1 + \theta_1^2 & -\theta_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\theta_1 & 1 + \theta_1^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 + \theta_1^2 & -\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\theta_1 & 1 + \theta_1^2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

En todos los casos, los elementos de  $\boldsymbol{\Omega} \equiv \sigma_A^{-2} \boldsymbol{\Gamma}_n$  en (2) sólo dependen [como se ilustra en (3)] de los parámetros AR y MA del modelo [63] (recogidos en  $\boldsymbol{\phi} \equiv [\phi_1, \dots, \phi_p]'$ ,  $\boldsymbol{\Phi} \equiv [\Phi_1, \dots, \Phi_P]'$ ,  $\boldsymbol{\theta} \equiv [\theta_1, \dots, \theta_q]'$  y  $\boldsymbol{\Theta} \equiv [\Theta_1, \dots, \Theta_Q]'$ ); el cálculo de dichos elementos es semejante al de las ACFs teóricas de las Secciones 2.7-2.8.

Para obtener estimaciones por **Máxima Verosimilitud** (MV) de  $\boldsymbol{\beta}$  y  $\sigma_A^2$ , se requiere maximizar numéricamente (1) ó

(2) con respecto a  $\beta$  y a  $\sigma_A^2$ . Si  $\hat{\beta}$  y  $\hat{\sigma}_A^2$  son las estimaciones numéricas de  $\beta$  y  $\sigma_A^2$  que maximizan (localmente) (2), entonces ocurre necesariamente que

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\beta}, \hat{\sigma}_A^2)}{\partial \sigma_A^2} = 0 \Leftrightarrow \hat{\sigma}_A^2 = \frac{S(\hat{\beta})}{n}, \quad (4)$$

donde  $S(\hat{\beta})$  es el valor de la suma de cuadrados  $S(\beta) \equiv \tilde{w}'\Omega^{-1}\tilde{w}$  evaluada en  $\beta = \hat{\beta}$ . Sustituyendo  $\sigma_A^2$  por  $\frac{S(\beta)}{n}$  en (2), se obtiene el ln de la FVE **concentrada** en  $\beta$ :

$$\ln L_*(\beta) = -\frac{n}{2} [\ln(2\pi) + 1 - \ln n] - \frac{n}{2} \ln \left( \tilde{w}'\Omega^{-1}\tilde{w} \times |\Omega|^{\frac{1}{n}} \right),$$

de manera que

$$\text{MAX } L(\beta, \sigma_A^2) \Leftrightarrow \text{MAX } \ln L(\beta, \sigma_A^2) \Leftrightarrow \text{MAX } \ln L_*(\beta) \Leftrightarrow \text{MIN } \tilde{w}'\Omega^{-1}\tilde{w} \times |\Omega|^{\frac{1}{n}}.$$

En resumen, para estimar  $\beta$  y  $\sigma_A^2$  por MV se requiere (i) minimizar numéricamente con respecto a  $\beta$  la función

$$F(\beta) \equiv \tilde{w}'\Omega^{-1}\tilde{w} \times |\Omega|^{\frac{1}{n}} \quad (5)$$

(lo que proporciona una estimación puntual  $\hat{\beta}$  de  $\beta$ ), y (ii) estimar posteriormente  $\sigma_A^2$  como, por ejemplo,

$$\hat{\sigma}_A^2 = \frac{S(\hat{\beta})}{n-m}, \quad (6)$$

donde  $m \equiv 1 + p + P + q + Q$  es el número de parámetros contenidos en  $\beta$ . [Nótese que la estimación (6), que no coincide con la que figura en (4), es análoga a la estimación de mínimos cuadrados de  $\sigma^2$  en modelos de regresión.]

El problema fundamental para calcular una estimación MV de  $\beta$  consiste en que (5) es una función no lineal complicada de  $\beta$ . Por ejemplo, para un modelo AR(1), a partir de (3) puede comprobarse que

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\phi_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\phi_1 & 1 + \phi_1^2 & -\phi_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_1 & 1 + \phi_1^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 + \phi_1^2 & -\phi_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\phi_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} (1 - \phi_1^2)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\phi_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\phi_1 & 1 \end{bmatrix},$$

donde  $\mathbf{P}$  es tal que  $\mathbf{P}'\mathbf{P} = \mathbf{\Omega}^{-1}$ ; por lo tanto, en este caso el primer factor de  $F(\boldsymbol{\beta})$  en (5) es

$$\tilde{\mathbf{w}}'\mathbf{\Omega}^{-1}\tilde{\mathbf{w}} = (\mathbf{P}\tilde{\mathbf{w}})'(\mathbf{P}\tilde{\mathbf{w}}) = (1 - \phi_1^2)(w_1 - \mu_W)^2 + \sum_{t=2}^n [(w_t - \mu_W) - \phi_1(w_{t-1} - \mu_W)]^2,$$

mientras que el segundo factor de  $F(\boldsymbol{\beta})$  en (5) es

$$|\mathbf{\Omega}|^{\frac{1}{n}} = |\mathbf{\Omega}^{-1}|^{-\frac{1}{n}} = |\mathbf{P}'\mathbf{P}|^{-\frac{1}{n}} = |\mathbf{P}|^{-\frac{2}{n}} = \left[ (1 - \phi_1^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{2}{n}} = (1 - \phi_1^2)^{-\frac{1}{n}}.$$

En general, no posible obtener analíticamente una expresión para  $\boldsymbol{\beta}$  que minimice (5), por lo que en la práctica, para obtener una estimación MV de  $\boldsymbol{\beta}$ , es necesario minimizar (5) mediante algún **método de cálculo iterativo** para minimizar numéricamente funciones de varias variables (como el método de *Gauss-Newton*, el de *Newton-Raphson*, el de *Levenberg-Marquardt*, o algún método *cuasi-Newton*). Las características de cualquier método de este tipo son:

⇒ Partiendo de una **estimación inicial**  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_0$  proporcionada por el usuario, un método iterativo genera una secuencia de estimaciones  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1, \hat{\boldsymbol{\beta}}_2, \dots$  que, bajo ciertas condiciones, converge a un **mínimo local** de (5). En general, no puede asegurarse que dicho mínimo sea un **mínimo global**.

- ⇒ Si (5) tiene varios mínimos locales, el mínimo al que converge la secuencia anterior depende crucialmente de la estimación inicial  $\hat{\beta}_0$ .
- ⇒ Si (5) es una función relativamente **plana**, puede resultar difícil localizar numéricamente un mínimo. Esta situación es análoga a la **multicolinealidad aproximada** en modelos de regresión lineal, e indica la posible presencia de términos redundantes (sobrantes) en el modelo [66].

Los detalles sobre el funcionamiento de este tipo de métodos y muchos otros aplicables a la resolución de diversos problemas numéricos, pueden consultarse, por ejemplo, en [i] Monahan, J.F. (2001), *Numerical Methods of Statistics*, Cambridge University Press, y [ii] Press, W.H.; Teukolsky, S.A.; Vetterling, W.T.; Flannery, B.P. (2002), *Numerical Recipes in C - The Art of Scientific Computing (Second Edition)*, Cambridge University Press.

Aunque en la actualidad no existen razones objetivas para hacerlo, en la práctica a veces se estima un modelo como [63] por **Mínimos Cuadrados** (MC) (lo que se justifica suponiendo que  $|\Omega|^{1/n}$  en (5) tiende a 1 para  $n$  suficientemente grande), incluso considerando alguna aproximación al término  $\tilde{\mathbf{w}}'\Omega^{-1}\tilde{\mathbf{w}}$  en (5) en lugar de su expresión exacta [como la aproximación basada en el cálculo de *retroprevisiones* de Box, Jenkins y Reinsel (2008), Capítulo 7, o la aproximación empleada por EViews en Help → EViews Help Topics ... → Time Series Regression → Estimating ARIMA Models]. En teoría, todos los estimadores de  $\beta$  definidos implícitamente a través de las estimaciones que minimizan numéricamente  $F(\beta)$  en (5) o alguna aproximación a  $F(\beta)$ , tienen las mismas propiedades asintóticas (consistencia, Normalidad y eficiencia asintóticas); sin embargo, cuando  $n$  no es grande, o cuando los verdaderos valores de los parámetros AR y MA están próximos a la no estacionariedad o a la no invertibilidad, pueden darse diferencias importantes entre las propiedades de unos y otros estimadores, que son en general favorables al estimador MV.

Por último, la estimación  $\mathbf{V}$  de la matriz de covarianzas del estimador de  $\beta$ , se puede calcular a partir de la matriz de derivadas segundas (matriz *hessiana*) de la función que se haya minimizado para calcular  $\hat{\beta}$ . Por ejemplo, si  $\hat{\beta}$  es una estimación obtenida por MV [es decir, un mínimo local de (5)], entonces  $\mathbf{V}$  se calcula a partir de la matriz

$[\nabla^2 F(\hat{\beta})]^{-1}$  [la inversa de la matriz hessiana de  $F(\beta)$  evaluada en  $\beta = \hat{\beta}$ ]; teniendo en cuenta que  $\nabla^2 F(\hat{\beta})$  representa la **curvatura** de  $F(\beta)$  en  $\beta = \hat{\beta}$ , cuanto mayor sea dicha curvatura, con mayor precisión (menor varianza) estará localizado el verdadero valor de  $\beta$ ; por el contrario, si  $F(\beta)$  en  $\beta = \hat{\beta}$  tiene poca curvatura, el verdadero valor de  $\beta$  estará localizado con poca precisión (muchas varianzas).

**Observación 44 - Cálculo de los residuos:** Igual que en un modelo de regresión, la serie de residuos  $(\hat{a}_t)_{t=1}^n$  asociada con la estimación del modelo [63] contiene las diferencias entre los valores observados y los valores ajustados para la variable dependiente  $W_t \equiv \nabla^d \nabla_S^D \dot{Y}_t$  de [63]. Una vez estimado (como se describe en la Observación 43 anterior), [63] puede escribirse como  $\hat{\Phi}'(B)(w_t - \hat{\mu}_W) = \hat{\Theta}'(B)\hat{a}_t$ , o bien como  $\hat{\Phi}'(B)w_t = \hat{\mu} + \hat{\Theta}'(B)\hat{a}_t$ , donde

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}'(B) &\equiv \hat{\phi}_p(B) \times \hat{\Phi}_P(B^S) \equiv 1 - \sum_{i=1}^{p'} \hat{\Phi}'_i B^i \quad (p' \equiv p + PS), \\ \hat{\Theta}'(B) &\equiv \hat{\theta}_q(B) \times \hat{\Theta}_Q(B^S) \equiv 1 - \sum_{i=1}^{q'} \hat{\Theta}'_i B^i \quad (q' \equiv q + QS), \\ \hat{\mu} &\equiv \hat{\Phi}'(1) \times \hat{\mu}_W.\end{aligned}$$

De manera más explícita, el modelo [63] estimado puede escribirse, por lo tanto, como

$$w_t - \sum_{i=1}^{p'} \hat{\Phi}'_i w_{t-i} = \hat{\mu} + \hat{a}_t - \sum_{i=1}^{q'} \hat{\Theta}'_i \hat{a}_{t-i} \quad (t = 1, \dots, n).$$

En consecuencia, cada residuo  $\hat{a}_t$  se calcula como

$$\hat{a}_t = w_t - \left[ \hat{\mu} + \sum_{i=1}^{p'} \hat{\Phi}'_i w_{t-i} - \sum_{i=1}^{q'} \hat{\Theta}'_i \hat{a}_{t-i} \right] \quad (t = 1, \dots, n), \quad (7)$$

donde el término entre corchetes es el **valor ajustado** o **previsto** para  $W_t \equiv \nabla^d \nabla_S^D \dot{Y}_t$  correspondiente al valor observado  $w_t$  (de manera que  $\hat{a}_t$  puede interpretarse como un **error de previsión** intramuestral).

Para evaluar (7), se requieren algunos valores de  $w_t$  y de  $\hat{a}_t$  para  $t < 1$  (es decir, algunos *valores premuestrales*). Por ejemplo, en un modelo con  $p = 2$ ,  $q = 1$ ,  $P = 0$  y  $Q = 0$ , (7) queda

$$\hat{a}_t = w_t - \left[ \hat{\mu} + \hat{\phi}_1 w_{t-1} + \hat{\phi}_2 w_{t-2} - \hat{\theta}_1 \hat{a}_{t-1} \right] \quad (t = 1, \dots, n),$$

de manera que para calcular  $\hat{a}_1$  hacen falta  $w_0$ ,  $w_{-1}$  y  $\hat{a}_0$  (también hace falta  $w_0$  para calcular  $\hat{a}_2$ ). En la práctica, dichos valores pueden estimarse utilizando la serie estacionaria  $(w_t)_{t=1}^n$  y el modelo [63] estimado (lo cual suele hacerse de forma automática cuando el modelo se ha estimado por MV), o bien (aunque no es recomendable, especialmente cuando  $n$  no es grande) se puede suponer que  $w_t = \hat{\mu}_W$  (la media estimada de  $W_t \equiv \nabla^d \nabla_S^D \dot{Y}_t$ ) y que  $\hat{a}_t = 0$  (el valor esperado de  $A_t$ ) para  $t < 1$ .

## Ejemplos de Estimación

1. ST02: Serie TVPIB.
2. ST14: Serie VIVIN.
3. ST19: Serie AIRLINE.
4. ST20: Serie TPARO.

## DIAGNOSIS

### 2.12 DIAGNOSIS - RESUMEN

**ENTRADA:** Modelo estimado; residuos.

1. Diagnósis de **parámetros**: significación (individual y conjunta); correlaciones estimadas entre estimadores; estacionariedad e invertibilidad.
2. Diagnósis de **residuos** (reemplazan a las perturbaciones en el modelo estimado): gráfico temporal; Normalidad; media muestral; ACF y PACF residuales (Ljung-Box).
3. Posible revisión del modelo según las conclusiones de los dos pasos anteriores.

**SALIDA:** Si modelo revisado  $\Rightarrow$  Volver a estimación. Si modelo adecuado  $\Rightarrow$  Utilizar para describir y prever la serie original.

**Observación 45 - Diagnósis de parámetros:** Las operaciones siguientes se refieren a los **parámetros** AR y MA incluidos en el modelo identificado y estimado:

$\Rightarrow$  Contrastar la **significación individual** de cada parámetro, o la **significación conjunta** de varios parámetros, según

interese. A veces, estos contrastes indican que pueden eliminarse algunos parámetros no significativos.

- ⇒ Examinar la matriz  $\mathbf{R}$  de **correlaciones** estimadas entre los estimadores de los parámetros, que puede calcularse a partir de  $\mathbf{V}$  como  $\mathbf{R} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{D}^{-1}$ , donde  $\mathbf{D}$  es una matriz diagonal cuyos elementos son las raíces cuadradas de los elementos en la diagonal principal de  $\mathbf{V}$ . La presencia de correlaciones elevadas suele indicar que el modelo está **sobreparametrizado**.
- ⇒ Factorizar los operadores AR y MA estimados y comprobar que no tienen **factores comunes**. Si dichos operadores tienen factores aproximadamente comunes, en general deben cancelarse.
- ⇒ Comprobar que los operadores AR y MA estimados satisfacen las condiciones de estacionariedad y de invertibilidad, respectivamente. La presencia de una raíz de  $\hat{\phi}(x) = 0$  o de  $\hat{\Phi}(x) = 0$  próxima o igual a 1 indica **subdiferenciación**, por lo que es conveniente aplicar una diferencia regular o estacional, respectivamente, a la serie  $(w_t)$ . Por su parte, la presencia de una raíz de  $\hat{\theta}(x) = 0$  o de  $\hat{\Theta}(x) = 0$  próxima o igual a 1 indica **sobrediferenciación**, por lo que es conveniente eliminar una diferencia regular o estacional, respectivamente, de la serie  $(w_t)$  (además, quizás, de reconsiderar la presencia de un término constante en el modelo revisado).
- ⇒ Cuando en la etapa de identificación no está claro si  $d$  (el número de diferencias regulares) debe ser igual a uno o igual a dos (también cuando se duda entre  $d = 1$  y  $d = 0$ ), una buena práctica consiste en escoger  $d = 2$  y añadir un factor MA(1) regular (**testigo de sobrediferenciación**) al modelo identificado con  $d = 2$ ; si el modelo estimado resulta tal que  $\hat{\theta}(x) = 0$  tiene una raíz unitaria, se reformula el modelo con  $d = 1$  y sin el factor MA(1) no invertible (reconsiderando, además, la presencia de un término constante en el modelo revisado).
- ⇒ Aunque en muchos casos es suficiente llevar a cabo las operaciones descritas en los dos puntos anteriores de manera informal, en ocasiones se requiere **contrastar formalmente** la presencia de **raíces unitarias** en los operadores AR y MA del modelo considerado. Una dificultad asociada con esta cuestión es que los estadísticos habituales para

contrastar hipótesis sobre los parámetros no siguen distribuciones estándar (Normal o  $t$  de Student) cuando se emplean para contrastar la presencia de raíces unitarias. Ver Brockwell y Davis (2002), páginas 193-198; Shin, D.W., y Fuller, W.A. (1998), “Unit root tests based on unconditional maximum likelihood estimation for the autoregressive moving average,” *Journal of Time Series Analysis*, 19, 591-599; y Davis, R.A., Chen, M., y Dunsmuir, W.T.M. (1995), “Inference for MA(1) processes with a root on or near the unit circle,” *Probability and Mathematical Statistics*, 15, 227-242.

- ⇒ Cuando en la etapa de identificación no están claros los órdenes  $p$ ,  $P$ ,  $q$  y  $Q$ , se puede llevar a cabo un ejercicio de **sobreajuste**, que consiste en (i) incluir (sin un respaldo muestral claro) de uno en uno factores AR y MA de orden 1 ó 2, (ii) estimar el modelo resultante, y (iii) comprobar si cada factor añadido es significativo.

**Observación 46 - Diagnosis de residuos:** Las operaciones siguientes se refieren a los **residuos** calculados a partir del modelo identificado y estimado:

- ⇒ Examinar el gráfico temporal de la serie de residuos estandarizada. La presencia de cualquier tipo de tendencia suele indicar la conveniencia de aplicar una diferencia regular o estacional (según sea la tendencia) a la serie  $w_t$ . Si se observa que la dispersión de los residuos no es constante, probablemente la transformación de Box-Cox incluida en  $w_t$  no es adecuada.
- ⇒ Examinar el histograma de la serie de residuos y utilizar el estadístico de Jarque-Bera para contrastar la hipótesis de Normalidad de las perturbaciones.
- ⇒ Si el modelo no contiene el parámetro  $\mu_W$ , contrastar la significación de la media de las perturbaciones utilizando la media residual; si se rechaza la hipótesis nula del contraste, añadir el parámetro  $\mu_W$  al modelo.
- ⇒ Examinar la ACF y la PACF residuales. Un amortiguamiento muy lento de la ACF indica que la serie de residuos no es estacionaria, por lo que conviene aplicar una diferencia (regular o estacional, según convenga) adicional a la

serie  $w_t$ . Si la ACF y la PACF presentan alguna configuración reconocible, añadir al modelo los operadores AR y MA correspondientes. Para determinar si las autocorrelaciones simples entre las perturbaciones del modelo son todas iguales a cero hasta cierto retardo  $g$ , puede utilizarse el valor calculado del estadístico de Ljung-Box,

$$Q_{LB}(\hat{a}_t) = n(n+2) \sum_{k=1}^g \frac{r_k(\hat{a}_t)^2}{n-k},$$

que bajo la hipótesis nula de que  $\rho_1(A_t) = \rho_2(A_t) = \dots = \rho_g(A_t) = 0$ , sigue una distribución  $\chi^2(g-b)$  (aproximadamente), donde  $b$  es el número total de parámetros AR y MA estimados.

**Observación 47 - Consideraciones Adicionales:** [Comparar ACF-PACF muestrales de  $w_t$  con ACF-PACF teóricas del modelo estimado para  $w_t$ , y con ACF-PACF residuales] [Grado de ajuste] [Evaluación de previsiones] [Observaciones atípicas/influyentes].

## Ejemplos de Diagnósis

1. ST02: Serie TVPIB.
2. ST14: Serie VIVIN.
3. ST19: Serie AIRLINE.
4. ST20: Serie TPARO.

## PREVISIÓN

Un modelo  $ARIMA(p, d, q) \times ARIMA(P, D, Q)_S$  para una serie  $y_1, \dots, y_N$  que **no** requiere ninguna transformación de Box-Cox puede escribirse como

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^S)[\nabla^d \nabla_S^D Y_t - \mu_W] = \theta_q(B)\Theta_Q(B^S)A_t. \quad [64]$$

**Observación 48:** Para prever una serie temporal que sí requiere alguna transformación de Box-Cox (como un logaritmo neperiano), primero se hacen todos los cálculos referidos a la serie transformada (como se explica en la Sección 2.13) y luego se "deshace" la transformación que corresponda (como se ilustra en la Observación 60).

### 2.13 PREVISIÓN CON MODELOS ARIMA

En un modelo como [64], la **previsión puntual** de  $Y_t$  en **origen**  $N$  a **horizonte**  $l \geq 1$  (*lead-time*) es el **valor esperado** de  $Y_{N+l}$  **condicionado** por toda la información disponible sobre  $Y_t$  hasta el momento  $N$ , lo que suele representarse como

$$Y_N(l) \equiv E_N[Y_{N+l}] \text{ para } l = 1, 2, \dots \quad [65]$$

**Observación 49:** El modelo general [64] puede escribirse como

$$\Phi^*(B)Y_t = \mu + \Theta^*(B)A_t,$$

donde

$$\begin{aligned}\Phi^*(B) &\equiv \phi_p(B)\Phi_P(B^S)\nabla^d\nabla_S^D \equiv 1 - \sum_{i=1}^{p^*} \Phi_i^*B^i, \text{ con } p^* \equiv (p+d) + (P+D)S, \\ \Theta^*(B) &\equiv \theta_q(B)\Theta_Q(B^S) \equiv 1 - \sum_{i=1}^{q^*} \Theta_i^*B^i, \text{ con } q^* \equiv q+QS, \\ \mu &\equiv [\phi_p(1)\Phi_P(1)]\mu_W.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el modelo general [64] puede escribirse de manera explícita como

$$Y_t = \mu + \sum_{i=1}^{p^*} \Phi_i^*Y_{t-i} + A_t - \sum_{i=1}^{q^*} \Theta_i^*A_{t-i}.$$

Escribiendo esta expresión en  $t = N + l$ , la previsión puntual [65] queda

$$Y_N(l) = \mu + \sum_{i=1}^{p^*} \Phi_i^*E_N[Y_{N+l-i}] + E_N[A_{N+l}] - \sum_{i=1}^{q^*} \Theta_i^*E_N[A_{N+l-i}] \text{ para } l = 1, 2, \dots$$

Considerada como una función de  $l$ , esta expresión se denomina la **función de previsión** del modelo ARIMA [64].

**Observación 50:** La función de previsión se utiliza en la práctica para calcular previsiones  $\hat{y}_N(1), \hat{y}_N(2), \dots$  a partir de un modelo estimado. Para ello, se remplazan los parámetros  $\mu, \Phi_i^*(i = 1, \dots, p^*), \Theta_i^*(i = 1, \dots, q^*)$  por sus valores estimados, se reemplaza cada  $E_N[Y_j]$  por  $y_j$  (un dato) si  $j \leq N$ , o bien por  $\hat{y}_N(j - N)$  (una previsión) si  $j > N$ , y se reemplaza cada  $E_N[A_j]$  por  $\hat{a}_j$  (un residuo) si  $j \leq N$ , o bien por 0 (la esperanza incondicional de  $A_j$ ) si  $j > N$ . Los **errores de previsión** asociados con  $\hat{y}_N(1), \hat{y}_N(2), \dots$  suelen representarse como  $\hat{e}_N(l) \equiv y_{N+l} - \hat{y}_N(l)$  ( $l = 1, 2, \dots$ ), y sólo se pueden calcular cuando  $y_{N+1}, y_{N+2}, \dots$  son cantidades conocidas [por ejemplo, cuando se quiere evaluar la calidad de las previsiones de un modelo gráficamente o a través de medidas como la **raíz del error cuadrático medio** (RMSE), el **error absoluto medio** (MAE), o el **error porcentual absoluto medio** (MAPE); ver Apartado 2.14.2].

### 2.13.1 Ejemplo - Previsión con un modelo AR(1)

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + A_t.$$

Escribiendo esta expresión en  $t = N + l$  ( $l \geq 1$ ), y aplicando al resultado el operador  $E_N[\cdot]$ , se obtiene que la **función de previsión** de un modelo AR(1) es

$$Y_N(l) = \mu + \phi_1 E_N[Y_{N+l-1}] + E_N[A_{N+l}]. \quad [66]$$

Para  $l = 1$ , [66] queda

$$Y_N(1) = \mu + \phi_1 Y_N, \quad [67]$$

mientras que para  $l \geq 2$ , [66] queda

$$Y_N(l) = \mu + \phi_1 Y_N(l-1). \quad [68]$$

[68] es una ecuación recursiva cuya solución a partir de la condición inicial [67] es

$$Y_N(l) = \left( \sum_{i=0}^{l-1} \phi_1^i \right) \mu + \phi_1^l Y_N \quad \text{para todo } l \geq 1. \quad [69]$$

[69] es la **función final de previsión** de un modelo AR(1), que converge a la media del modelo  $[\mu_Y = \mu / (1 - \phi_1)]$  cuando  $|\phi_1| < 1$  y  $l \rightarrow \infty$ .

**Observación 51:** Los errores de previsión de un modelo AR(1) tienen ciertas propiedades que pueden establecerse examinando las diferencias teóricas entre cada  $Y_{N+l} = \mu + \phi_1 Y_{N+l-1} + A_{N+l}$  y las previsiones [67]-[68]:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_N(1) &= A_{N+1}, \\ \mathcal{E}_N(2) &= \phi_1 \mathcal{E}_N(1) + A_{N+2} = A_{N+2} + \phi_1 A_{N+1}, \\ \mathcal{E}_N(3) &= \phi_1 \mathcal{E}_N(2) + A_{N+3} = A_{N+3} + \phi_1 A_{N+2} + \phi_1^2 A_{N+1}, \\ &\vdots \\ \mathcal{E}_N(l) &= \sum_{i=0}^{l-1} \phi_1^i A_{N+l-i} \quad (l \geq 1).\end{aligned}$$

Por lo tanto, los errores de previsión tienen media cero y varianza

$$v(l) = \left( \sum_{i=0}^{l-1} \phi_1^{2i} \right) \sigma_A^2.$$

que converge a la varianza del modelo AR(1) ( $\sigma_Y^2 = [1/(1-\phi_1^2)]\sigma_A^2$ ) cuando  $|\phi_1| < 1$  y  $l \rightarrow \infty$ .

**Observación 52:** En la práctica, a partir de un modelo AR(1) estimado:

$$\hat{y}_N(l) = \left( \sum_{i=0}^{l-1} \hat{\phi}_1^i \right) \hat{\mu} + \hat{\phi}_1^l \hat{y}_N \rightarrow \frac{\hat{\mu}}{1-\hat{\phi}_1}, \quad \text{IC}_{0.95}[Y_{N+l}] = [\hat{y}_N(l) \mp 1.96\sqrt{\hat{v}(l)}] \text{ para todo } l \geq 1.$$

### 2.13.2 Ejemplo - Previsión con un modelo MA(1)

$$Y_t = \mu + A_t - \theta_1 A_{t-1}.$$

Escribiendo esta expresión en  $t = N + l$  ( $l \geq 1$ ), y aplicando al resultado el operador  $E_N[\cdot]$ ,

se obtiene que la **función de previsión** de un modelo MA(1) es

$$Y_N(l) = \mu + E_N[A_{N+l}] - \theta_1 E_N[A_{N+l-1}]. \quad [70]$$

Para  $l = 1$ , [70] queda

$$Y_N(1) = \mu - \theta_1 A_N, \quad [71]$$

mientras que para  $l \geq 2$ , [70] queda

$$Y_N(l) = \mu. \quad [72]$$

[72] es la **función final de previsión** de un modelo MA(1), que coincide con la media del modelo ( $\mu_Y = \mu$ ).

**Observación 53:** Los **errores de previsión** de un modelo MA(1) tienen ciertas propiedades que pueden establecerse examinando las diferencias teóricas entre cada  $Y_{N+l} = \mu + A_{N+l} - \theta_1 A_{N+l-1}$  y la previsión [71]-[72] correspondiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N(1) &= A_{N+1}, \\ \mathcal{E}_N(2) &= A_{N+2} - \theta_1 A_{N+1}, \\ \mathcal{E}_N(3) &= A_{N+3} - \theta_1 A_{N+2}, \\ &\vdots \\ \mathcal{E}_N(l) &= A_{N+l} - \theta_1 A_{N+l-1} \quad (l \geq 2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, los errores de previsión tienen media cero y varianza

$$v(1) = \sigma_A^2, \quad v(l) = (1 + \theta_1^2)\sigma_A^2 \quad (l \geq 2).$$

que a partir de  $l = 2$  es constante y coincide con la varianza del modelo MA(1) [ $\sigma_Y^2 = (1 + \theta_1^2)\sigma_A^2$ ].

**Observación 54:** En la práctica, a partir de un modelo MA(1) estimado:

$$\hat{y}_N(1) = \hat{\mu} - \hat{\theta}_1 \hat{a}_N, \quad \hat{y}_N(l) = \hat{\mu} = \hat{\mu}_Y \quad (l \geq 2), \quad \text{IC}_{0.95}[Y_{N+l}] = [\hat{y}_N(l) \mp 1.96\sqrt{\hat{v}(l)}] \text{ para todo } l \geq 1.$$

**Observación 55:** En general, puede comprobarse que  $\hat{y}_N(l) \rightarrow \hat{\mu}_Y$  y  $\hat{v}(l) \rightarrow \hat{\sigma}_Y^2$  en cualquier modelo estacionario.

### 2.13.3 Ejemplo - Previsión con un modelo IMA(1,1)

$$Y_t = \mu + Y_{t-1} + A_t - \theta_1 A_{t-1}.$$

Escribiendo esta expresión en  $t = N + l$  ( $l \geq 1$ ) y aplicando al resultado el operador  $E_N[\cdot]$ , se obtiene que la **función de previsión** en origen  $N$  a horizonte  $l \geq 1$  es

$$Y_N(l) = \mu + E_N[Y_{N+l-1}] + E_N[A_{N+l}] - \theta_1 E_N[A_{N+l-1}], \quad [73]$$

Para  $l = 1$ , [73] queda

$$Y_N(1) = \mu + Y_N - \theta_1 A_N, \quad [74]$$

mientras que para  $l \geq 2$ , [73] queda

$$Y_N(l) = \mu + Y_N(l-1). \quad [75]$$

[75] es una ecuación recursiva cuya solución a partir de la condición inicial [74] es

$$Y_N(l) = l\mu + Y_N - \theta_1 A_N \quad \text{para todo } l \geq 1. \quad [76]$$

[76] es la **función final de previsión** de un modelo IMA(1,1), que no depende de  $l$  si  $\mu = 0$ , pero diverge cuando  $l \rightarrow \infty$  si  $\mu \neq 0$ .

**Observación 56:** Los **errores de previsión** de un modelo IMA(1,1) tienen ciertas propiedades que pueden establecerse examinando las diferencias teóricas entre cada  $Y_{N+l} = \mu + Y_{N+l-1} + A_{N+l} - \theta_1 A_{N+l-1}$  y la previsión [74]-[75] correspondiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N(1) &= A_{N+1}, \\ \mathcal{E}_N(2) &= \mathcal{E}_N(1) + A_{N+2} - \theta_1 A_{N+1} = A_{N+2} + (1 - \theta_1)A_{N+1}, \\ \mathcal{E}_N(3) &= \mathcal{E}_N(2) + A_{N+3} - \theta_1 A_{N+2} = A_{N+3} + (1 - \theta_1)A_{N+2} + (1 - \theta_1)A_{N+1}, \\ &\vdots \\ \mathcal{E}_N(l) &= \sum_{i=0}^{l-1} \psi_i^* A_{N+l-i}, \text{ con } \psi_0^* \equiv 1, \psi_i^* = (1 - \theta_1) \text{ (} i \geq 1 \text{)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los errores de previsión tienen media cero y varianza

$$v(l) = \sigma_A^2 \sum_{i=0}^{l-1} (\psi_i^*)^2 = [1 + (1 - \theta_1)^2 (l - 1)] \sigma_A^2,$$

de manera que  $v(l) \rightarrow \infty$  cuando  $l \rightarrow \infty$ .

**Observación 57:** En la práctica, a partir de un modelo IMA(1,1) estimado:

$$\hat{y}_N(l) = l\hat{\mu} + \hat{y}_N - \hat{\theta}_1 \hat{a}_N, \quad \text{IC}_{0.95}[Y_{N+l}] = [\hat{y}_N(l) \mp 1.96\sqrt{\hat{v}(l)}] \text{ para todo } l \geq 1.$$

**Observación 58:** En un **paseo aleatorio** ( $Y_t = \mu + Y_{t-1} + A_t$ ), los resultados del Ejemplo 2.13.3 con  $\theta_1 = 0$  indican que  $Y_N(l) = l\mu + Y_N$  para todo  $l \geq 1$ , con  $v(l) = l \times \sigma_A^2$ . En general, puede comprobarse que en cualquier modelo no estacionario ( $d \geq 1, D \geq 1$ ), tanto  $Y_N(l)$  como  $v(l)$  son funciones que divergen cuando el horizonte de previsión  $l$  tiende a infinito; en particular,  $v(l) \rightarrow \infty$  cuando  $l \rightarrow \infty$ , lo cual contrasta claramente con los resultados de los ejemplos 2.13.1-2.13.2 para modelos estacionarios.

**Observación 59:** En un modelo  $\text{ARIMA}(p, d, q) \times \text{ARIMA}(P, D, Q)_S$  general (Observación 49), puede comprobarse que los errores de previsión tienen media cero y varianza  $v(l) = \sigma_A^2 \sum_{i=0}^{l-1} (\psi_i^*)^2$ , donde  $\psi_0^*, \psi_1^*, \psi_2^*, \dots$  son los coeficientes del polinomio  $\psi^*(B) \equiv \Theta^*(B) / \Phi^*(B) \equiv 1 + \psi_1^* B + \psi_2^* B^2 + \dots \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^* B^i$  (Observación 39):

$$\psi_i^* = -\Theta_i^* + \sum_{j=1}^{p^*} \Phi_j^* \psi_{i-j}^* \quad (i \geq 1),$$

con  $\psi_0^* \equiv 1$ ,  $\psi_i^* = 0$  si  $i < 0$ , y  $\Theta_i^* = 0$  si  $i > q^*$ . [Programa PRG08-PSI-PI.prg para EViews.]

**Observación 60:** Si una serie (original)  $x_1, x_2, \dots, x_N$  requiere un logaritmo neperiano para estabilizar su dispersión, entonces las previsiones puntuales, las varianzas de los errores de previsión, y los intervalos de confianza descritos en

esta sección hacen referencia a la serie transformada  $y_t = \ln(x_t)$ . En este caso, la previsión puntual para la serie original puede calcularse simplemente como  $\hat{x}_N(l) = \exp\{\hat{y}_N(l)\}$ , y el intervalo de confianza del 95% correspondiente como  $[\exp\{\hat{y}_N(l) - 1.96\sqrt{\hat{v}(l)}\}, \exp\{\hat{y}_N(l) + 1.96\sqrt{\hat{v}(l)}\}]$ , que no es simétrico con respecto a  $\hat{x}_N(l)$ . Un intervalo de confianza (aproximado) que sí es simétrico puede calcularse como  $[\hat{x}_N(l) \mp 1.96\sqrt{\hat{w}(l)}]$ , donde  $\hat{w}(l) = \hat{x}_N(l)^2 \times \hat{v}(l)$  es una aproximación lineal a la varianza estimada del error de previsión asociado con la serie original.

## 2.14 PREVISIÓN - APLICACIONES

### 2.14.1 Ejemplo

Modelo para la serie PIB del archivo ST02-PIB.wf1 (34 datos anuales desde 1964 hasta 1997):

$$\begin{aligned} (1 - 0.6747B) [\nabla \ln x_t - 0.0311] &= \hat{a}_t, \\ (0.1302) \quad (0.0096) & \\ n = 32, \hat{\sigma}_A &= 0.0176. \end{aligned} \quad [77]$$

[77] también puede escribirse como

$$w_t = 0.0101 + 0.6747w_{t-1} + \hat{a}_t, \quad [78]$$

donde  $w_t \equiv \nabla \ln x_t$ , o bien como

$$y_t = 0.0101 + 1.6747y_{t-1} - 0.6747y_{t-2} + \hat{a}_t, \quad [79]$$

donde  $y_t \equiv \ln x_t$ , dependiendo de si se quiere prever la tasa logarítmica de variación anual del PIB real ( $w_t \equiv \nabla \ln x_t$ ), o bien el PIB real directamente ( $x_t$ ).

[78] es un modelo AR(1) estimado para  $w_t \equiv \nabla \ln x_t$ ; por lo tanto (ver Ejemplo 2.13.1),  $\hat{w}_{32}(1) = 0.0101 + 0.6747w_{32} = 0.0329$ ,  $\hat{w}_{32}(2) = 0.0101 + 0.6747\hat{w}_{32}(1) = 0.0323$ , ..., que converge a la media estimada del modelo,  $\hat{\mu}_W = 0.0311$  (un 3.11%).

Por su parte, [79] es un modelo ARI(1,1) estimado para  $y_t \equiv \ln x_t$ ; por lo tanto:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{32}(1) &= \exp [ 0.0101 + 1.6747\hat{y}_{32} - 0.6747\hat{y}_{31} ], \\ \hat{x}_{32}(2) &= \exp [ 0.0101 + 1.6747\hat{y}_{32}(1) - 0.6747\hat{y}_{32} ], \\ \hat{x}_{32}(3) &= \exp [ 0.0101 + 1.6747\hat{y}_{32}(2) - 0.6747\hat{y}_{32}(1) ], \\ &\dots, \end{aligned}$$

que es una secuencia creciente (no convergente) con el horizonte de previsión.

**Observación 61:** En general, un modelo estimado para una serie temporal puede utilizarse para prever dicha serie o cualquier transformación de la misma contenida (en su caso) en la serie estacionaria correspondiente.

### 2.14.2 Criterios de Evaluación de Previsiones

Si  $\hat{y}_N(1), \hat{y}_N(2), \dots, \hat{y}_N(L)$  una secuencia de previsiones calculadas en origen  $N$  a horizontes  $1, 2, \dots, L$ , la **raíz del error cuadrático medio** (**RMSE**, del inglés *Root Mean Squared Error*) asociada con dicha secuencia es

$$RMSE \equiv \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L [\hat{y}_N(l) - y_{N+l}]^2} \equiv \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \hat{e}_N(l)^2},$$

es decir, la desviación típica muestral de los errores de previsión  $\hat{e}_N(1), \hat{e}_N(2), \dots, \hat{e}_N(L)$ .

El **error absoluto medio** (**MAE**, del inglés *Mean Absolute Error*) es

$$MAE \equiv \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L |\hat{y}_N(l) - y_{N+l}| \equiv \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L |\hat{e}_N(l)|,$$

es decir, la media muestral de los valores absolutos de los errores de previsión.

El **error porcentual absoluto medio** (**MAPE**, del inglés *Mean Absolute Percentage Error*) es

$$MAPE \equiv \frac{100}{L} \sum_{l=1}^L \left| \frac{\hat{y}_N(l) - y_{N+l}}{y_{N+l}} \right| \equiv \frac{100}{L} \sum_{l=1}^L \left| \frac{\hat{e}_N(l)}{y_{N+l}} \right|,$$

es decir, la media muestral de los valores absolutos de los errores de previsión porcentuales.

### 2.14.3 Ejemplo

Dos modelos alternativos para la serie VIVIN del archivo ST14-Estac.wf1 (132 datos mensuales desde 1989:01 hasta 1999:12):

$$\begin{aligned} (1 + 0.5404B + 0.4583B^2) \nabla \nabla_{12} \ln x_t &= (1 - 0.8809B^{12}) \hat{a}_t, \\ (0.0831) \quad (0.0831) & \quad (0.0242) \end{aligned} \quad [80]$$

$$n = 117, \hat{\sigma}_A = 0.1359, \text{AIC} = -1.1282, \text{BIC} = -1.0574.$$

$$\begin{aligned} \nabla \nabla_{12} \ln x_t &= (1 - 0.6753B) (1 - 0.8918B^{12}) \hat{a}_t, \\ (0.0700) \quad (0.0236) & \end{aligned} \quad [81]$$

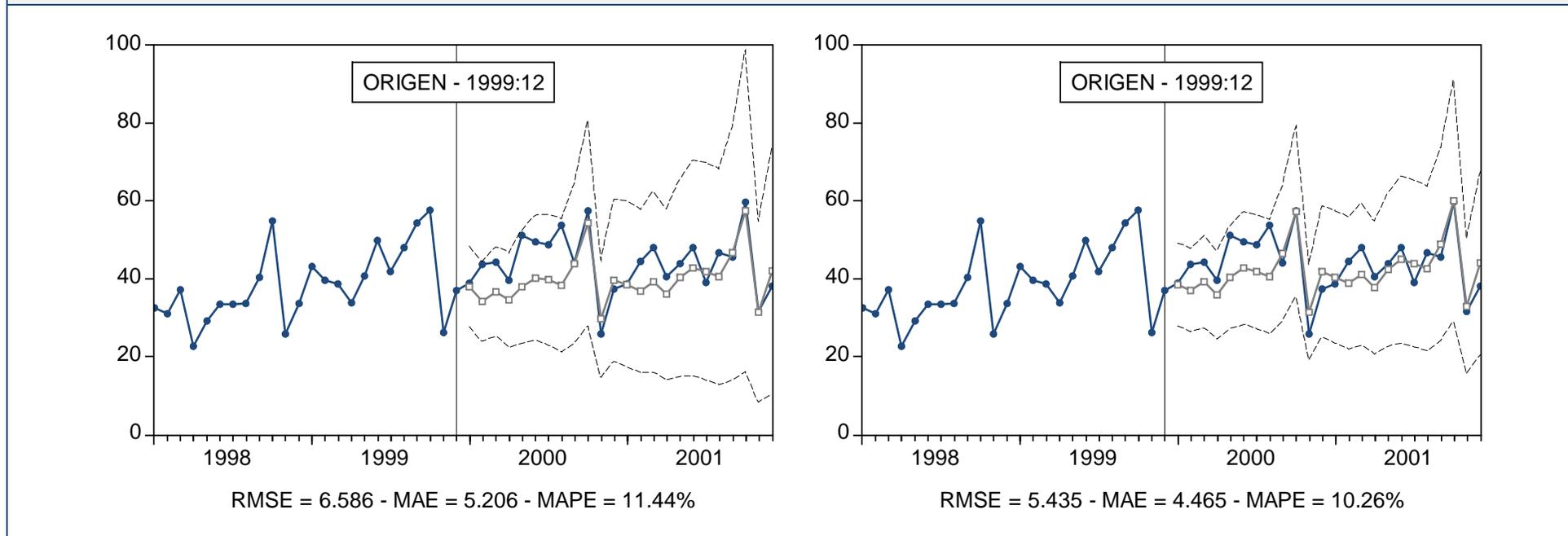
$$n = 119, \hat{\sigma}_A = 0.1371, \text{AIC} = -1.1194, \text{BIC} = -1.0727.$$

Por ejemplo, como  $\nabla \nabla_{12} \equiv (1 - B)(1 - B^{12}) = 1 - B - B^{12} + B^{13}$ , el modelo [81] queda

$$y_t = y_{t-1} + y_{t-12} - y_{t-13} + \hat{a}_t - 0.6753\hat{a}_{t-1} - 0.8918\hat{a}_{t-12} + 0.6022\hat{a}_{t-13}, \quad [82]$$

donde  $y_t \equiv \ln x_t$ . A partir de [82], las previsiones puntuales para la serie original ( $x_t$ ) calculadas en origen 119 (1999:12) a horizontes 1, 2, ..., 24, son:

**FIGURA 2.36**  
Previsiones Calculadas con los Modelos Estimados [83]-[84]



$$\hat{x}_{119}(1) = \exp [\hat{y}_{119} + \hat{y}_{108} - \hat{y}_{107} - 0.6753\hat{a}_{119} - 0.8918\hat{a}_{108} + 0.6022\hat{a}_{107}] = 38.455,$$

$$x_{119}(2) = \exp [\hat{y}_{119}(1) + \hat{y}_{109} - \hat{y}_{108} - 0.8918\hat{a}_{109} + 0.6022\hat{a}_{108}] = 37.000,$$

...

$$\hat{x}_{119}(24) = \exp [\hat{y}_{119}(23) + \hat{y}_{119}(12) - \hat{y}_{119}(11)] = 43.974.$$

## ANÁLISIS DE INTERVENCIÓN

Sea  $y_t$  ( $t = 1, \dots, N$ ) una serie temporal tal que  $y_t = \eta_t + u_t$ , donde  $\eta_t$  representa el efecto sobre el nivel de  $y_t$  derivado de un **suceso especial** o de **intervención** (quizás fácilmente identificable) ocurrido en un momento  $t^*$  dado de la historia de  $y_t$ .

Si  $u_t = y_t - \eta_t$  es una serie estacionaria, un modelo plausible para la serie  $y_t$  podría ser

$$Y_t = \alpha_0 + \omega_0 \xi_t + U_t, \quad [83]$$

donde  $\phi(B)U_t = \theta(B)A_t$ , y  $\xi_t$  es una **variable determinista** o de **intervención** del tipo

Impulso: 
$$\xi_t^{I,t^*} \equiv \begin{cases} 1, & \text{si } t = t^*; \\ 0, & \text{si } t \neq t^*. \end{cases} \quad [84]$$

Escalón: 
$$\xi_t^{E,t^*} \equiv \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq t^*; \\ 0, & \text{si } t < t^*. \end{cases} \quad [85]$$

**Observación 62:** Un impulso como [84] representa un cambio **puntual** o **transitorio** en el nivel de la serie  $y_t$ , mientras que un escalón como [85] representa un cambio **permanente** en el nivel de  $y_t$ .

**Observación 63:** El modelo [83] puede generalizarse para contemplar: [i] los posibles efectos de varios sucesos de intervención en la historia de  $y_t$ , [ii] respuestas de  $y_t$  ante dichos sucesos más complejas que una respuesta instantánea, y [iii] la posibilidad de que  $y_t - \eta_t$  sea una serie no estacionaria. Un **modelo de intervención** en el que caben todas estas posibilidades es el siguiente:

$$Y_t = \omega_1(B)\xi_{t1} + \omega_2(B)\xi_{t2} + \dots + \omega_K(B)\xi_{tK} + U_t,$$

donde  $\omega_i(B) \equiv \omega_{i0} - \omega_{i1}B - \omega_{i2}B^2 - \dots - \omega_{is_i}B^{s_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, K$ ),  $\phi(B)\Phi(B^S)\nabla^d\nabla_S^D U_t = \theta(B)\Theta(B^S)A_t$ , o bien

$$[\nabla^d\nabla_S^D Y_t] = \omega_1(B)[\nabla^d\nabla_S^D \xi_{t1}] + \omega_2(B)[\nabla^d\nabla_S^D \xi_{t2}] + \dots + \omega_K(B)[\nabla^d\nabla_S^D \xi_{tK}] + W_t,$$

donde  $\phi(B)\Phi(B^S)W_t = \theta(B)\Theta(B^S)A_t$  con  $W_t \equiv \nabla^d\nabla_S^D U_t$ . Si se incluye un término constante  $\alpha_0$  en el modelo:

$$[\nabla^d\nabla_S^D Y_t] = \alpha_0 + \omega_1(B)[\nabla^d\nabla_S^D \xi_{t1}] + \omega_2(B)[\nabla^d\nabla_S^D \xi_{t2}] + \dots + \omega_K(B)[\nabla^d\nabla_S^D \xi_{tK}] + W_t,$$

entonces  $y_t$  tiene un componente determinista en su tendencia (lo cual **no** resulta apropiado en muchos casos). En general, un modelo de intervención adecuado para muchas series no estacionarias es el siguiente:

$$[\nabla^d\nabla_S^D Y_t] = \beta_1[\nabla^d\nabla_S^D \xi_{t1}] + \beta_2[\nabla^d\nabla_S^D \xi_{t2}] + \dots + \beta_K[\nabla^d\nabla_S^D \xi_{tK}] + W_t, \text{ con } \phi(B)\Phi(B^S)W_t = \theta(B)\Theta(B^S)A_t.$$

**Observación 64:** En muchas ocasiones, los valores **anómalos** o **atípicos** presentes en una serie temporal pueden corregirse mediante términos de intervención semejantes a los considerados anteriormente. No obstante, en general, dichas correcciones sólo deben figurar explícitamente en un modelo cuando se dispone de **información extramuestral** que justifique su presencia, o bien cuando los valores atípicos correspondientes son **influyentes** (aunque no se disponga en este caso de información extramuestral al respecto).

## 2.15 ANÁLISIS DE INTERVENCIÓN - APLICACIONES

## 2.15.1 Ejemplo

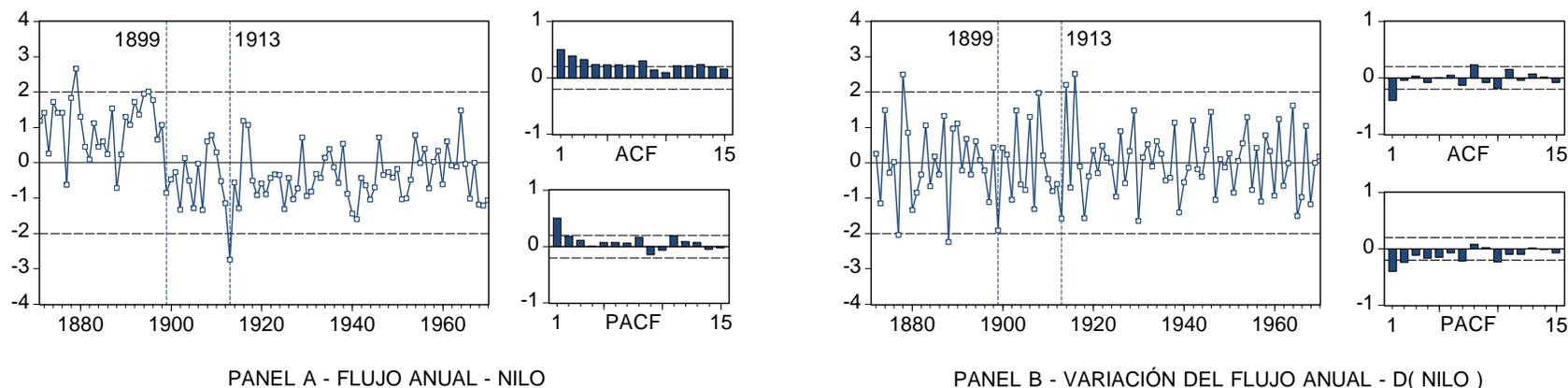
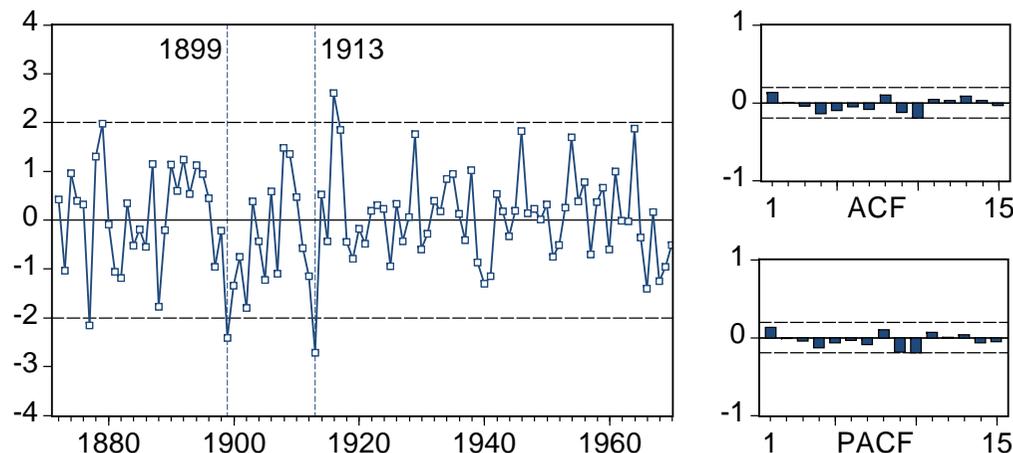


FIGURA 2.37

Volumen del flujo anual del río Nilo en Asuán (1871-1970) - ST16

El gráfico temporal y la ACF muestral del Panel A sugieren que la serie  $y_t$  original es no estacionaria en media. Los gráficos del Panel B sugieren que la serie  $y_t$  podría representarse con un modelo IMA(1,1). La Figura 2.38 de la página siguiente contiene un modelo IMA(1,1) estimado, junto con los residuos y la ACF y la PACF residuales correspondientes.

Dependent Variable: D(NILO)				
Method: Least Squares				
Sample(adjusted): 1872 1970				
Included observations: 99 after adjusting endpoints				
Convergence achieved after 12 iterations				
Backcast: 1871				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MA(1)	-0.754555	0.068153	-11.07146	0.0000
R-squared	0.264126	Mean dependent var	-3.838384	
Adjusted R-squared	0.264126	S.D. dependent var	168.1319	
S.E. of regression	144.2287	Akaike info criterion	12.79073	
Sum squared resid	2038589.	Schwarz criterion	12.81694	
Log likelihood	-632.1410	Durbin-Watson stat	1.720484	



**FIGURA 2.38**

**Estimación de un modelo IMA(1,1) para la serie NILO**

Alternativamente, el gráfico temporal del Panel A de la Figura 2.37 sugiere que el nivel medio de  $y_t$  cambió de forma permanente a partir de 1899 (debido probablemente al inicio de la construcción de una presa nueva en Asuán), y que en 1913 el nivel de  $y_t$  fue especialmente bajo.

La Figura 2.39 contiene los resultados de la estimación de un modelo de intervención para  $y_t$  que incluye tan sólo un término constante, un escalón en 1899 y un impulso en 1913.

Dependent Variable: NILO				
Method: Least Squares				
Sample: 1871 1970				
Included observations: 100				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1097.750	23.02634	47.67366	0.0000
E1899	-242.2289	27.19026	-8.908663	0.0000
I1913	-399.5211	122.6990	-3.256107	0.0016
R-squared	0.492071	Mean dependent var	919.3500	
Adjusted R-squared	0.481599	S.D. dependent var	169.2275	
S.E. of regression	121.8439	Akaike info criterion	12.47290	
Sum squared resid	1440057.	Schwarz criterion	12.55106	
Log likelihood	-620.6450	F-statistic	46.98588	
Durbin-Watson stat	1.723503	Prob(F-statistic)	0.000000	

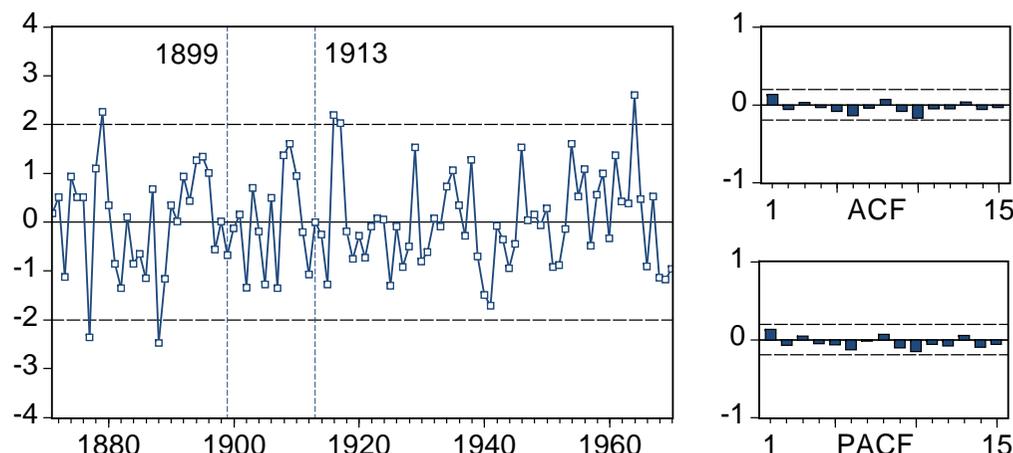
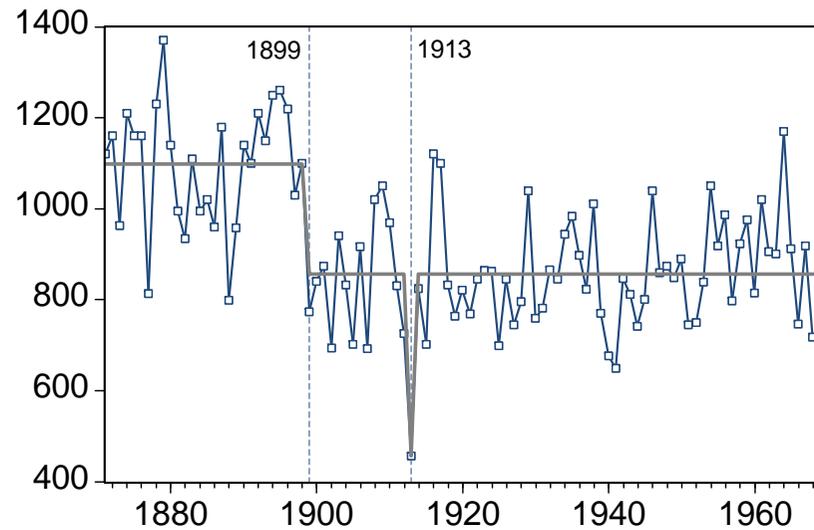


FIGURA 2.39

### Estimación de un modelo de intervención para la serie NILO

La Figura 2.40 contiene una representación gráfica del componente de intervención estimado  $(1097.75 - 242.23\xi_t^{E,1899} - 399.52\xi_t^{I,1913})$  junto con la serie original.

**Observación 65:** La ocurrencia de sucesos especiales puede distorsionar el aspecto de una serie temporal, provocando apariencia de no estacionariedad y estructuras de autocorrelación espurias. Un análisis de intervención sistemático, basado en el empleo de información extramuestral y en la detección de observaciones influyentes, permite modelizar adecuadamente dichos sucesos. Las intervenciones de tipo impulso afectan sólo a una observación y pueden incluirse en un modelo con cierta discrecionalidad; por el contrario, las intervenciones de tipo escalón son más comprometidas y conviene justificarlas con información detallada.

**FIGURA 2.40**

Componente de intervención estimado para la serie NILO

### 2.15.2 Ejemplo

Un ejemplo muy popular del análisis de intervención trata del efecto de legislaciones acerca del uso del cinturón de seguridad sobre el número de víctimas en accidentes de tráfico.

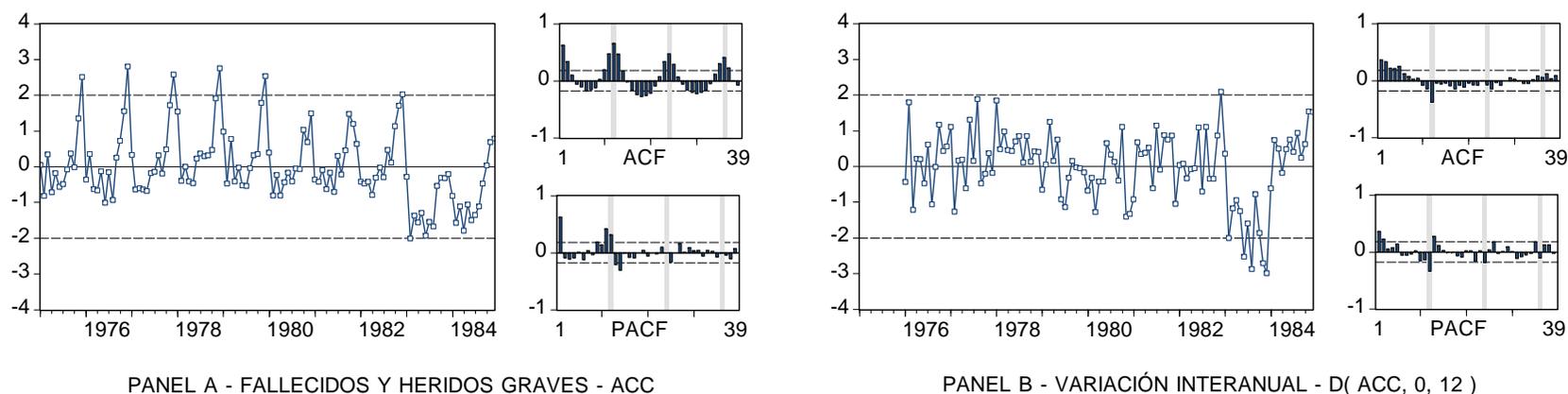


FIGURA 2.41

Fallecidos y heridos graves en carreteras del Reino Unido (1975:01-1984:12) - ST23

La Figura 2.41 sugiere estimar para la serie original  $y_t$  un modelo de intervención del tipo  $Y_t = \omega_0 \xi_t^{E,1983:02} + U_t$ , donde  $\xi_t^{E,1983:02}$  es un escalón que representa la entrada en vigor de una nueva legislación sobre el uso del cinturón de seguridad en febrero de 1983, y  $\nabla_{12}U_t = (1 - \Theta_1 B^{12})A_t$ . La Figura 2.42 contiene el modelo estimado para  $y_t$ , junto con los residuos y la ACF y la PACF residuales correspondientes; la Figura 2.43 contiene el componente de intervención estimado ( $-287.41 \nabla_{12} \xi_t^{E,1983:02}$ ) junto con la serie  $\nabla_{12}y_t$  de la Figura 2.41 (Panel B).

Dependent Variable: D(ACC,0,12)				
Method: Least Squares				
Sample(adjusted): 1976:01 1984:12				
Included observations: 108 after adjusting endpoints				
Convergence achieved after 12 iterations				
Backcast: 1975:01 1975:12				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(E0283,0,12)	-287.4082	22.42712	-12.81521	0.0000
MA(12)	-0.930343	0.026039	-35.72909	0.0000
R-squared	0.618060	Mean dependent var	-25.85185	
Adjusted R-squared	0.614457	S.D. dependent var	180.5618	
S.E. of regression	112.1146	Akaike info criterion	12.29527	
Sum squared resid	1332387.	Schwarz criterion	12.34493	
Log likelihood	-661.9443	Durbin-Watson stat	1.596903	

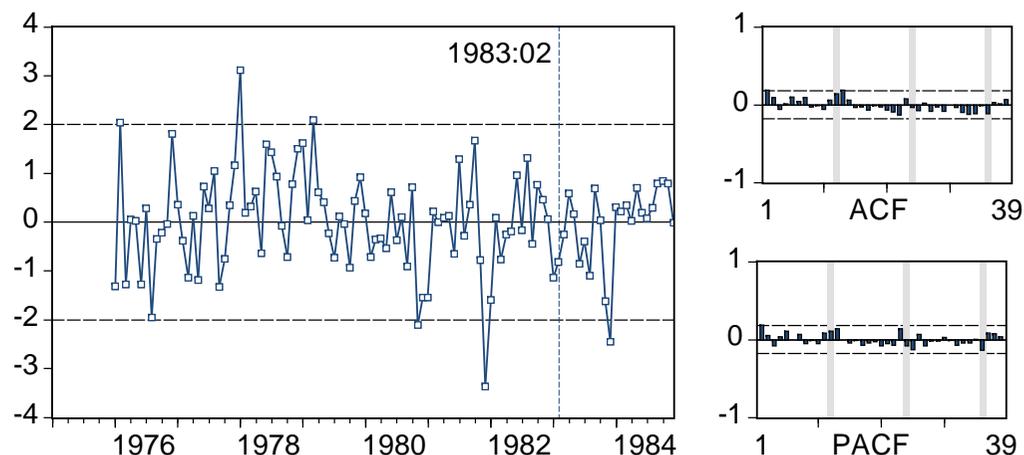


FIGURA 2.42

Estimación de un modelo de intervención para la serie ACC

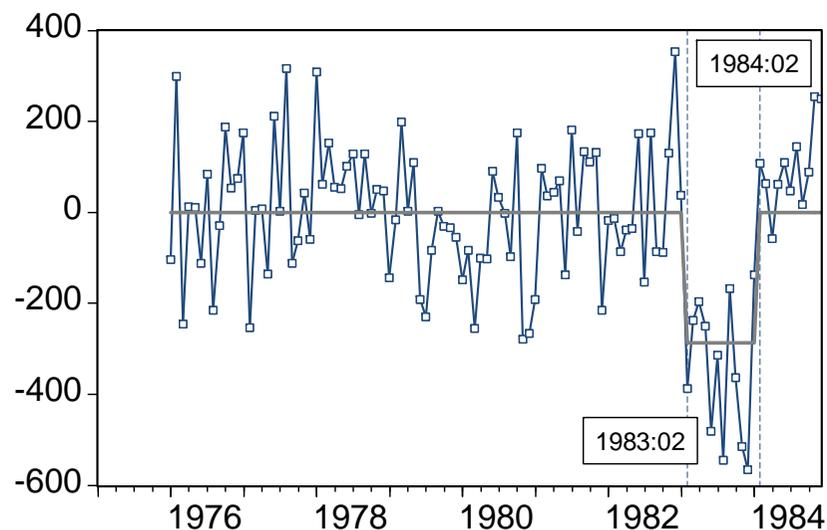
**Observación 66:** El modelo estimado de la Figura 2.42 puede escribirse como (ver Observación 63)

$$y_t = -287.41 \xi_t^{E,1983:02} + \hat{u}_t, \text{ con } \nabla_{12} \hat{u}_t = (1 - 0.93B^{12}) \hat{a}_t, \text{ o bien como}$$

$$\nabla_{12} y_t = -287.41 \nabla_{12} \xi_t^{E,1983:02} + \hat{w}_t, \text{ con } \hat{w}_t = (1 - 0.93B^{12}) \hat{a}_t.$$

El efecto estimado de la entrada en vigor de la nueva legislación es una **reducción permanente** en el número de fallecidos y heridos graves aproximadamente igual a 287 personas cada mes a partir de febrero de 1983 (un efecto notable, teniendo en cuenta que la media de la serie ACC hasta enero de 1983 es igual a 1621).

Por otro lado, la modelización de este suceso de intervención permite descartar una estructura de tipo autorregresivo en  $\nabla_{12}y_t$ , que parece clara en la Figura 2.41 (Panel B), pero que no está presente en los residuos de la Figura 2.42.



**FIGURA 2.43**

Componente de intervención estimado para la serie ACC - Variación interanual

### 2.15.3 Ejemplos Adicionales

Intervenir algunos valores atípicos o anómalos en series como TEMP y VIVIN (ST14) para comprobar su posible influencia en los modelos estimados correspondientes.