# Crecimiento óptimo:
# El Modelo de Cass-Koopmans-Ramsey

# Modelo de Ramsey

## 1. El modelo de crecimiento óptimo

- En el modelo de Solow-Swan se suponía una tasa de ahorro constante
- Ahora permitimos a los agentes determinar de forma óptima la trayectoria de su consumo,
- La estructura del modelo se debe a Ramsey (1928) y posteriormente Cass (1965) y Koopmans (1965)
- Ahora la tasa de ahorro óptima durante la transición puede ser creciente, decreciente o constante dependiendo de ciertas combinaciones de valores parámetricos estructurales

# Modelo de Ramsey

## 2. Solución del planificador:

Elige las sendas de consumo y ahorro que maximizan el bienestar del agente representativo, representado mediante una función de utilidad que verifica ciertas propiedades deseables, y condicionado a la verificación de la restricción de recursos (*RR*) de la economía.

Problema en términos per capita: $\underset{\{c_t, k_t\}}{Max}\, U(0)$

sujeto a: $RR$

Donde:

$$U(0) = \int_0^{\infty} e^{-\theta t}\, u\left(c_t\right) dt = \int_0^{\infty} e^{-\theta t}\, \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}\, dt$$

$$RR: c_t + \underbrace{\dot{k}_t + (n+\delta)k_t}_{\text{inversión}} = f\left(k_t\right)$$

Nótese que en el modelo de Solow:

$\dot{k} + (n+\delta)k = sy$

Siendo: $\theta$ la tasa de descuento del consumo futuro

$c_t$ el consumo *per capita* y $u(c_t)$ la felicidad instantánea *per capita*

$f(k_t)$ la función de producción neoclásica, supondremos: $f(k_t) = k_t^{\alpha}$

$\sigma$ determina el grado de curvatura de la función de utilidad instantánea

# Modelo de Ramsey

- Nota sobre la función de producción

Utilizamos la función de producción neoclásica que verifica las llamadas condiciones de Inada, y que presenta rendimientos constantes a escala en los factores trabajo y capital, lo que permite su representación en forma intensiva según la cual la producción per cápita puede expresarse como función únicamente del capital per cápita

No consideramos progreso tecnológico porque queremos estudiar las fluctuaciones de corto plazo, por lo que simplifica el análisis obtener series que no muestran crecimiento de largo plazo (el crecimiento de la renta per cápita en el estado estacionario es nulo si no hay progreso técnico)

# Modelo de Ramsey

- Nota sobre la función de utilidad:

Se denomina función de utilidad con aversión relativa al riesgo constante, tiene la ventaja de que dicha aversión al riesgo se resume en el valor del parámetro $\sigma$

Cuanto mayor es el parámetro $\sigma$ , mayor es la aversión al riesgo, lo que implica mayor concavidad de la función de utilidad y mayor suavidad en el perfil de consumo (menor volatilidad del consumo a lo largo del ciclo económico)

$1/\sigma$ se denomina elasticidad de sustitución intertemporal del consumo

Casos particulares: $\sigma = 0$ implica función de utilidad lineal

$\sigma = 1$ implica función de utilidad logarítmica

La baja volatilidad observada en las series de consumo de economías reales implica que deberíamos usar en el modelo $\sigma > 1$

- Teoremas del Bienestar:

En ausencia de externalidades, la solución del planificador coincide con la que resultaría de una economía competitiva descentralizada sin gobierno en la que interactúan familias y empresas.

# Modelo de Ramsey

- Condiciones de optimalidad para el problema del planificador:

Planteamos la función Hamiltoniano:

$$H\left(k_t, c_t, \lambda_t\right) = e^{-\theta t}\frac{c_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} + e^{-\theta t}\lambda_t \underbrace{\left(k_t^{\alpha} - (n+\delta)k_t - c_t\right)}_{\dot{k}_t} \qquad (1)$$

donde $e^{-\theta t}\lambda_t$ es el multiplicador valor presente o precio-sombra de la variable de estado $k_t$ y derivamos respecto de las 2 variables de decisión para obtener las condiciones de primer orden, junto con la llamada condición de transversalidad (*CT*)

$$H_c = 0 : c_t^{-\sigma}e^{-\theta t} = \lambda_t, \qquad (2)$$

$$H_k = -\dot{\lambda}_t : \lambda_t\left[\underbrace{\alpha k_t^{\alpha-1}}_{f'(k_t)} - (n+\delta)\right] = -\dot{\lambda}_t \qquad (3)$$

$$CT : \lim_{t\to\infty} e^{-\theta t}\lambda_t k_t = 0$$

Combinando las ecuaciones (1) y (2) obtenemos la llamada Condición de Keynes-Ramsey o condición de Euler:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\sigma}\left[\underbrace{\alpha k_t^{\alpha-1} - (n+\delta)}_{r_t} - \theta\right] \longleftarrow \boxed{\text{Tasa de crecimiento del consumo}}$$

# Modelo de Ramsey

- Notas sobre la decisión óptima consumo-ahorro:
  - La tasa de crecimiento del consumo será positiva (negativa, nula) cuando el tipo de interés de equilibrio $r_t$ sea mayor (menor, igual) a la tasa de descuento, $\theta$ , esto es, la elección consumo-ahorro óptima viene determinada por la condición

    $$\sigma \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \left[ r_t - \theta \right]$$

    Dado un exceso del rendimiento sobre la tasa de descuento, cuanto menor sea la aversión al riesgo del agente (menor sigma), mayor será la variación experimentada por el consumo (más volátil)

  - La condición de transversalidad garantiza que la senda de las variables no sea explosiva, evitando que se realice una acumulación de capital excesiva o por el contrario deficiente (en el primer caso acabaríamos sin consumo y en el segundo sin capital)

# Modelo de Ramsey

- Estado estacionario óptimo (maximiza el bienestar agregado):

  Como en Solow-Swan, el estado estacionario se caracteriza por

  $$\dot{c}_t = \dot{k}_t = 0$$

  esto es, niveles constantes para las variables per capita ($k_{SS}$, $c_{SS}$). Las variables agregadas crecerán a la tasa $n$ (crecimiento poblacional).

La evolución dinámica de la economía viene definida por:

(a) La ley de evolución del capital (como en Solow):

$$\dot{k}_t = k_t^{\alpha} - (n+\delta)k_t - c_t$$

(b) La regla Keynes-Ramsey:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\sigma}\left[\alpha k_t^{\alpha-1} - (n+\delta+\theta)\right]$$

# Modelo de Ramsey

- Representación gráfica:

1. Imponemos $\dot{k}_t = 0$ en (a): $k_{SS}{}^{\alpha} = (n+\delta)k_{SS} - c_{SS} \rightarrow c_{SS} = k_{SS}{}^{\alpha} - (n+\delta)k_{SS}$

Lo que describe una curva en el plano ($c$,$k$) que es cóncava:

$$\frac{\partial c_{ss}}{\partial k_{ss}} = \alpha k^{\alpha-1} - (n+\delta); \quad \frac{\partial^2 c_{ss}}{\partial k_{ss}^2} = \alpha\left(\alpha-1\right)k^{\alpha-2} < 0$$

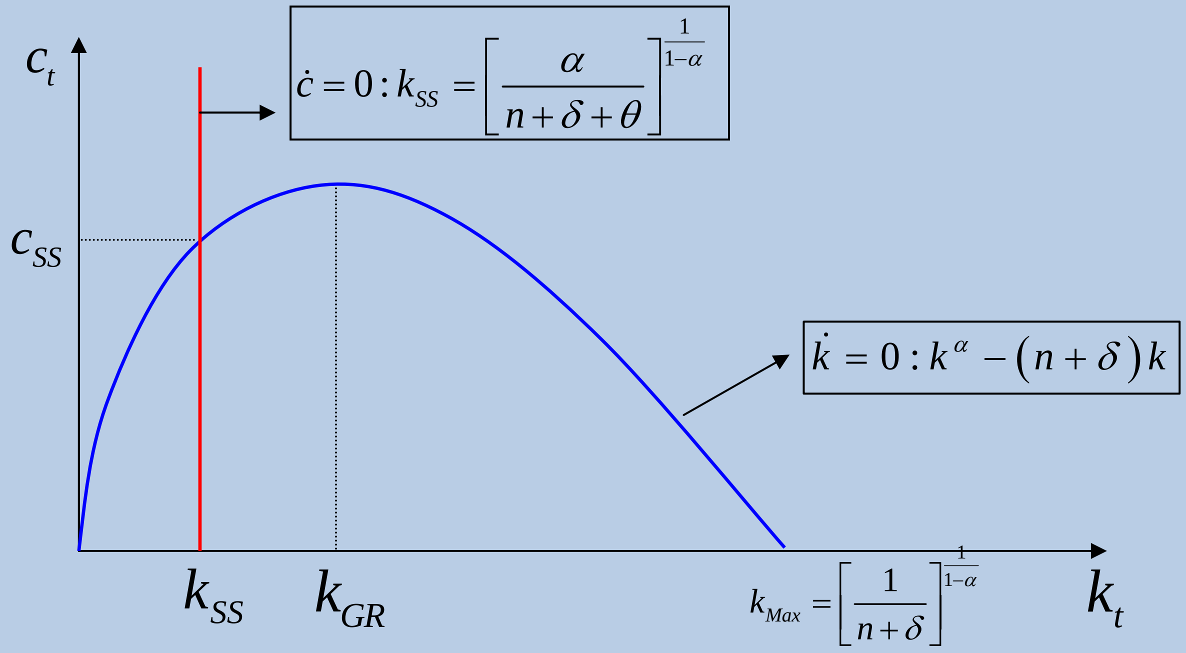
Máximo de la curva: $\frac{\partial c_{ss}}{\partial k_{ss}} = 0 \rightarrow k_{GR} = \left[\frac{\alpha}{n+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$ (Regla de oro)

2. Imponemos $\dot{c}_t = 0$ en (b), permitiendo obtener el estado estacionario óptimo:

$$\alpha k_{SS}{}^{\alpha-1} = n+\delta+\theta \rightarrow k_{SS} = \left[\frac{\alpha}{n+\delta+\theta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \rightarrow c_{SS} = \left[\frac{\alpha}{n+\delta+\theta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \left(n+\delta\right)\left[\frac{\alpha}{n+\delta+\theta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

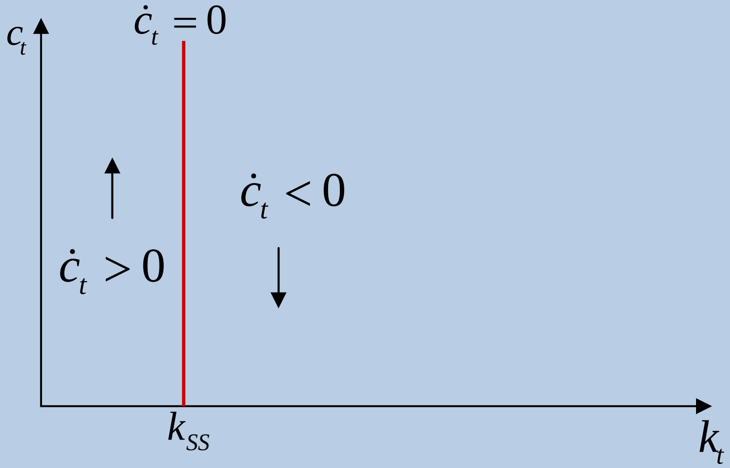
Esto demuestra que el estado estacionario es único.

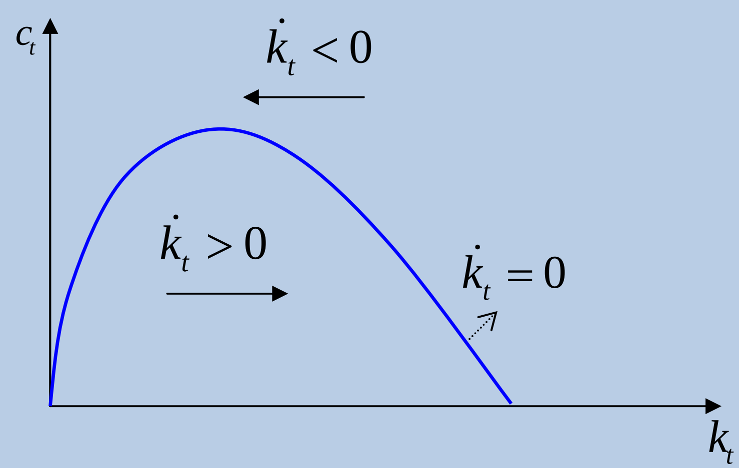
# Modelo de Ramsey




Es directo demostrar que $k_{SS} < k_{GR}$ : la regla de oro implica una sobre-acumulación de capital, permite un mayor nivel de consumo cuando se alcanza el estado estacionario, pero es necesario sacrificar demasiado consumo previamente. Imponer una tasa de ahorro constante (Solow-Swan) es subóptimo (en Cass-Koopmans la tasa de ahorro se determina óptimamente periodo a periodo)

# Modelo de Ramsey




- Dirección de los cambios en consumo:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\sigma}\left[\alpha k_t^{\alpha-1} - (n+\delta+\theta)\right] \rightarrow k = k_{SS} : \frac{\alpha}{k^{1-\alpha}} = (n+\delta+\theta), \dot{c}_t = 0$$

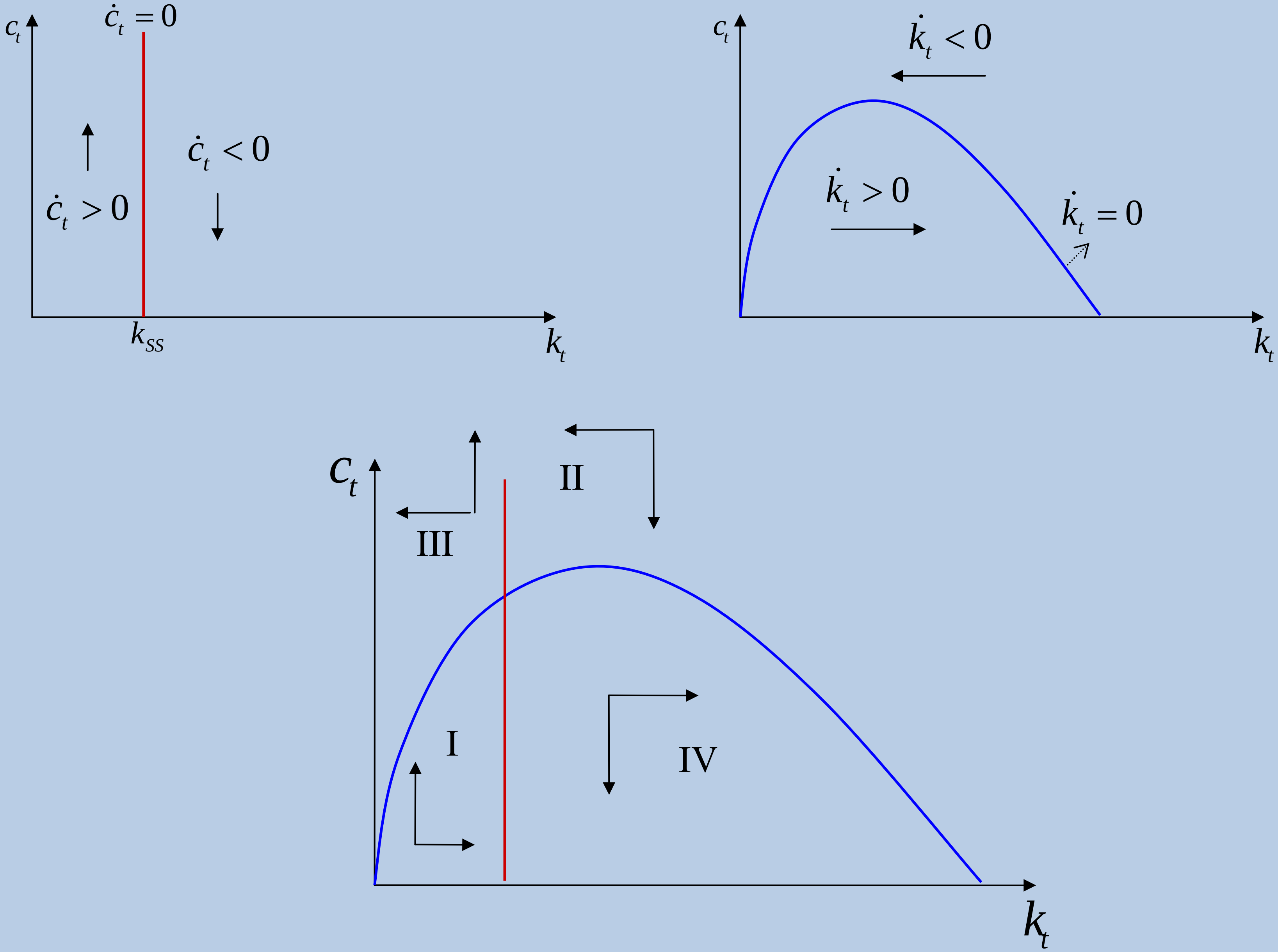
$$\rightarrow k < (>) k_{SS} : \frac{\alpha}{k^{1-\alpha}} > (<)(n+\delta+\theta), \dot{c}_t > (<) 0$$

- Dirección de los cambios en capital:

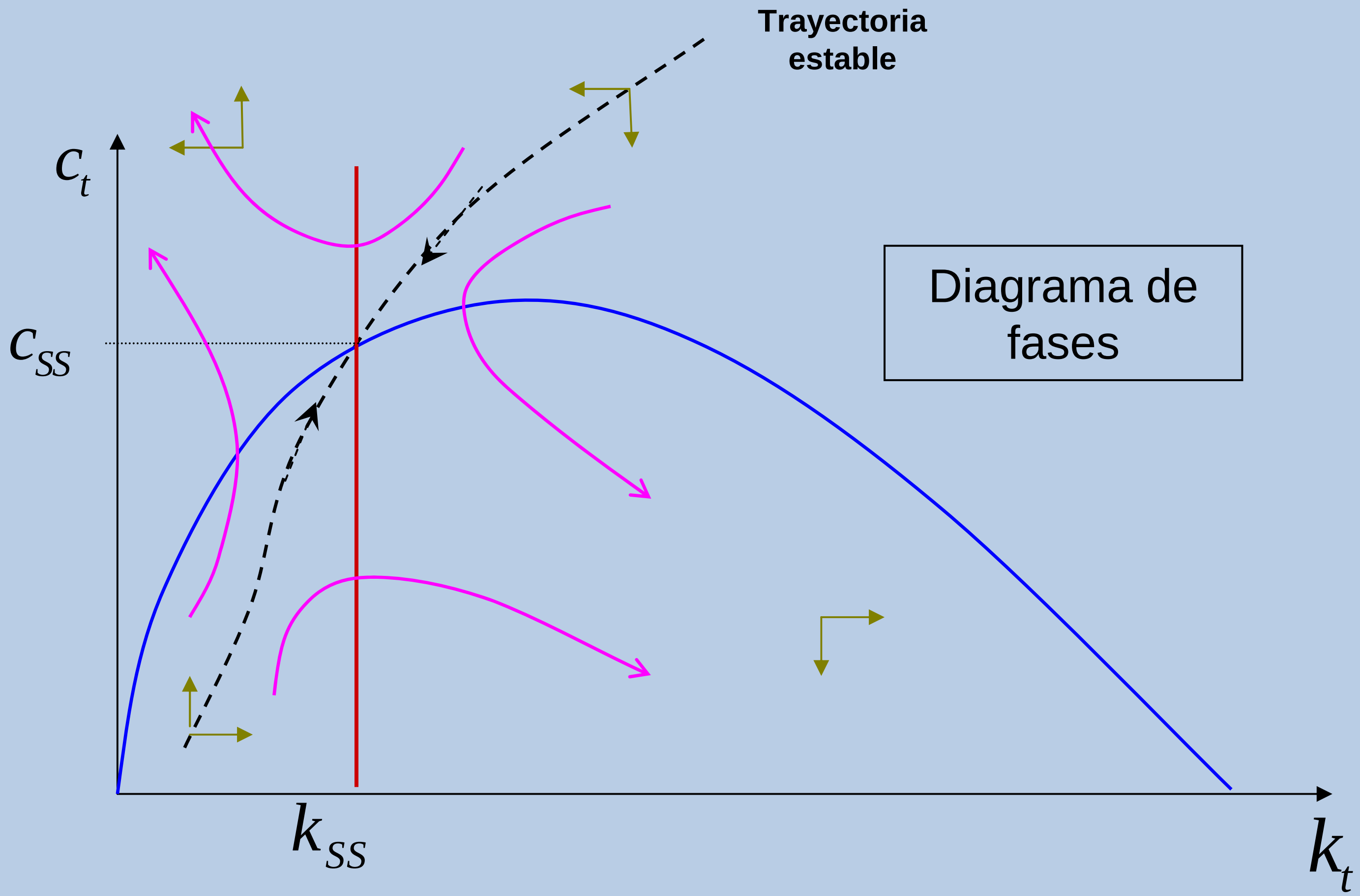
$$\dot{k}_t = k_t^{\alpha} - (n+\delta)k_t - c_t \rightarrow c = c_{SS} : k_{SS}{}^{\alpha} - (n+\delta)k_{SS} - c = \dot{k} = 0$$

$$\rightarrow c < (>) c_{SS} : k_{SS}{}^{\alpha} - (n+\delta)k_{SS} - c > (<) 0, \dot{k} > (<) 0$$

# Modelo de Ramsey



# Modelo de Ramsey



# Modelo de Ramsey

- Trayectoria estable: Para cada nivel del stock de capital, hay un solo valor que puede tomar el consumo para que la economía converja al estado estacionario óptimo. Esta trayectoria es un conjunto de valores ($c$,$k$) que constituyen la solución del planificador, y se caracteriza por verificar la condición de transversalidad

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\theta t}\lambda_{SS}k_{SS} = 0$$

Se denomina condición de estabilidad a la función que establece el valor que debe tomar la variable de control, el consumo, como función de la variable de estado, el capital, para que la economía se sitúe en la trayectoria estable. Es del tipo:

$$c_0 = f(k_{0,}\text{parámetros estructurales})$$

Necesitaremos tantas condiciones de estabilidad como variables de control haya en el modelo.

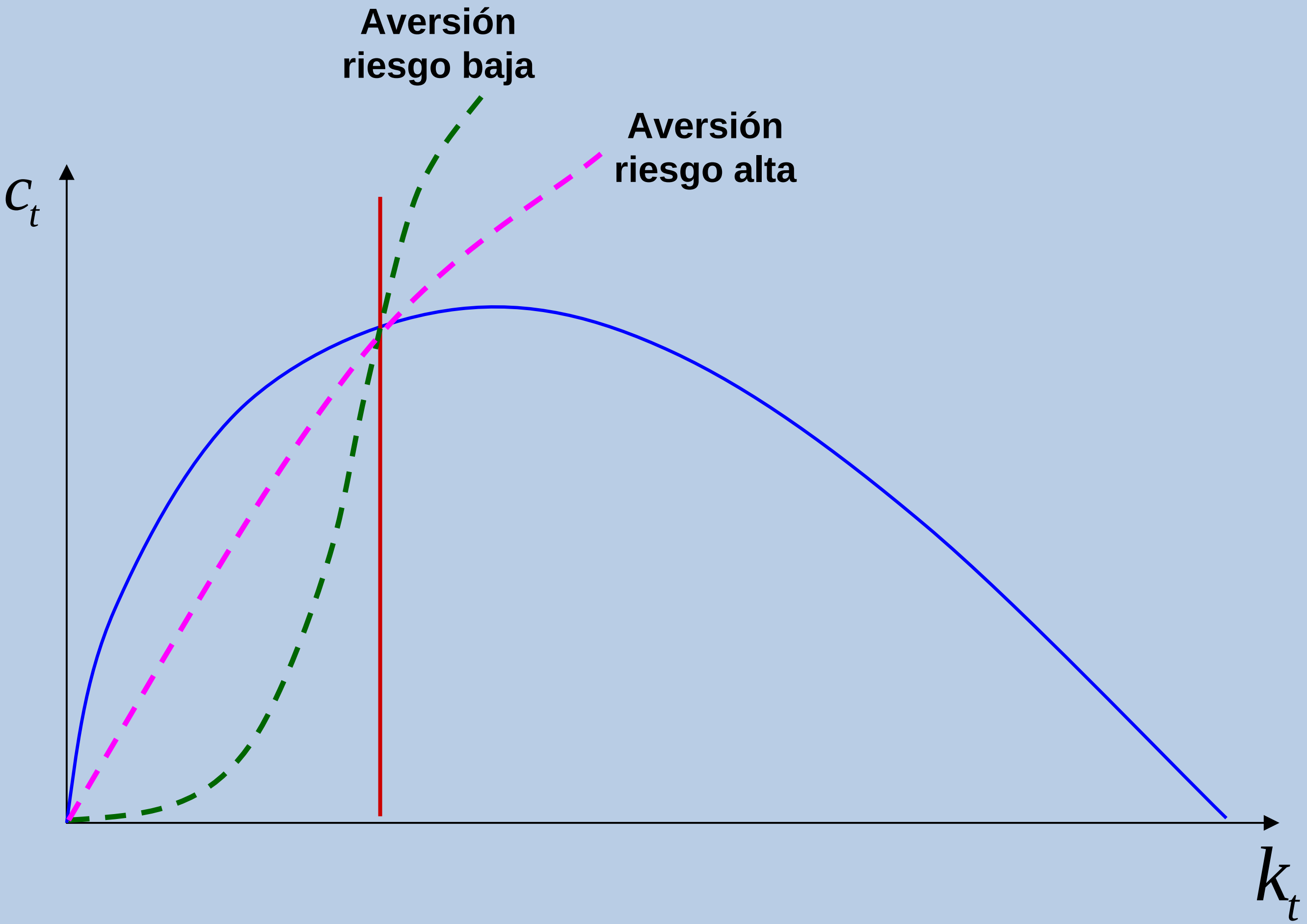
# Modelo de Ramsey

- Este tipo de dinámica se denomina estabilidad de punto de silla: para que un sistema dinámico presente esta evolución dinámica la matriz de transición que relaciona el vector de variables en el periodo *t* y en el periodo *t*+1 debe verificar algunas propiedades (un autovalor negativo y uno positivo si estamos en tiempo continuo, o uno menor que 1 y otro mayor que 1, en valor absoluto, si estamos en tiempo discreto)

- Sólo si la variable de control se sitúa en la trayectoria estable la economía converge al estado estacionario, cualquier otro valor de la variable de control implicaría que la economía se alejaría progresivamente del estado estacionario. Sólo la trayectoria estable verifica todas las condiciones de primer orden (incluyendo transversalidad), ésta evita trayectorias 'explosivas' que implicarían que a largo plazo desaparecería el capital (si consumimos demasiado, $k_T \to 0$ ) o el consumo (si invertimos demasiado, $c_T \to 0$)

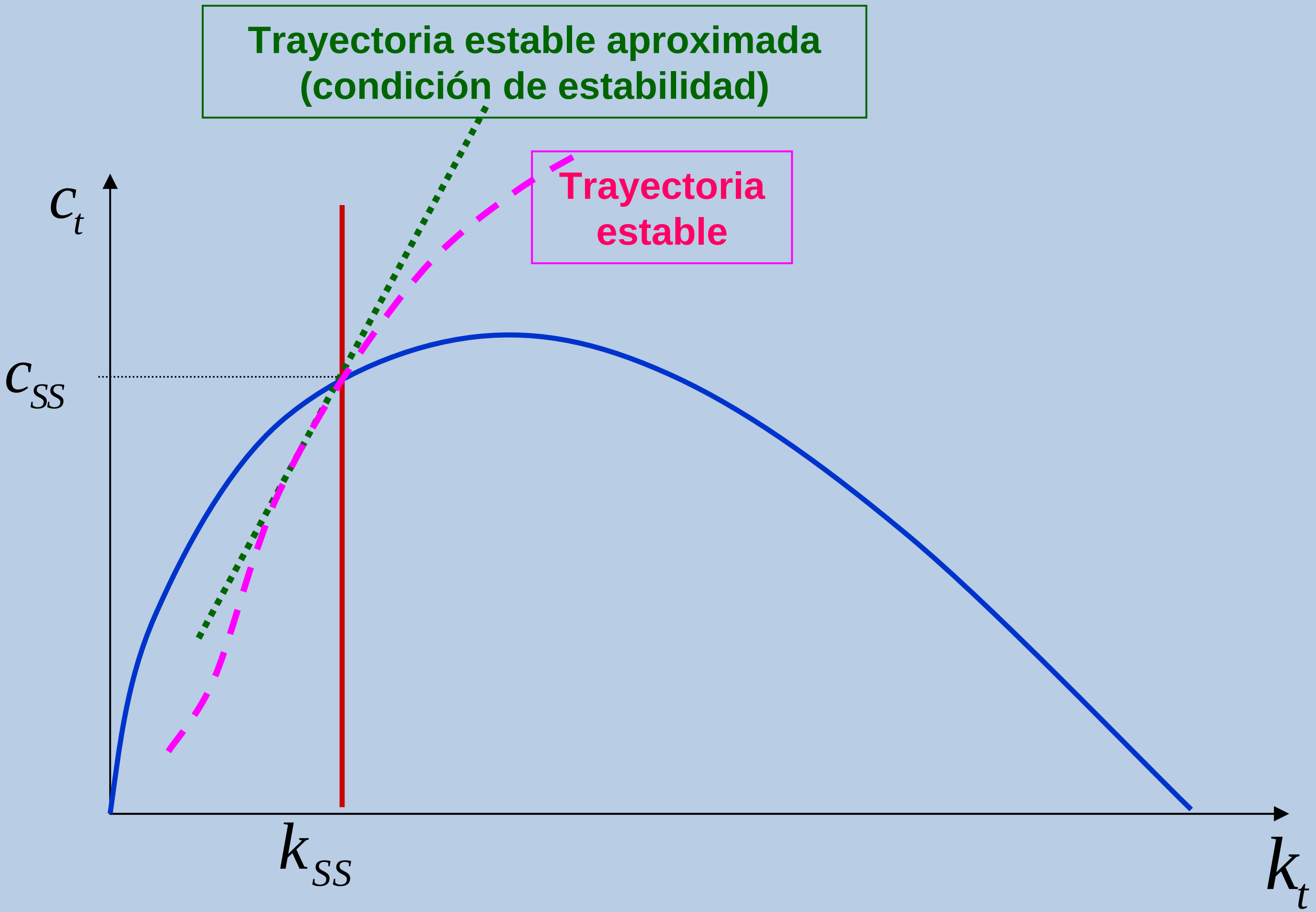
# Modelo de Ramsey

- La forma de la trayectoria estable depende de los valores paramétricos: por ejemplo, si la aversión al riesgo es alta la trayectoria es muy lineal y tiene poca pendiente, para garantizar que la senda de consumo sea suave



# Modelo de Ramsey

En general no es posible determinar la expresión analítica de la trayectoria estable o de la condición de estabilidad, pero podemos obtener soluciones numéricas aproximadas (log-linealizamos el sistema de condiciones de primer orden en torno al estado estacionario).



# Modelo de Ramsey

## 3. Problema descentralizado

1. Familias:
   - Propietarias de acciones emitidas por las empresas, cada acción da derecho a una unidad de capital y proporcionan un rendimiento real ($r_t$)
   - Propietarias de una unidad de trabajo por el que reciben un salario ($w_t$).
   - La renta salarial más la remuneración de los activos determinan su renta disponible
   - Deciden cómo distribuyen su renta disponible entre consumo y ahorro (inversión en capital)

2. Empresas:
   - Alquilan trabajo ($L_t$) a cambio de un salario y emiten acciones que son compradas por las familias, a las que pagan un rendimiento
   - Son además propietarias del capital productivo ($K_t$) que utilizan, junto con el trabajo, para obtener una producción de acuerdo con la tecnología que tienen disponible y la venden en el mercado de producto a cambio de un precio, que normalizamos a 1 (bien numerario). El producto es un bien homogéneo que puede destinarse a consumo o a inversión.
   - Toman como dado: $w_t$, $r_t$ y el precio del producto (son precio-aceptantes en mercados de factores y de producto)

# Modelo de Ramsey

3. Mercados:

- Familias y empresas interactúan en los mercados de factores y productos, fijándose los precios que equilibran demandas y ofertas ($w_t$, $r_t$, $p_Y$ )

- Mercado de trabajo: se determina el salario ($w_t$) que equilibra la oferta de trabajo de los hogares ($L^S$) con la demanda de las empresas ($L^D$).

- Mercado de capital: se determina la tasa de alquiler ($r_t$) que equilibra la oferta de capital de las empresas ($K^S$) con la demanda de los hogares ($K^D$ , demanda de inversión, como función de su rentabilidad)

- Mercado de producto: se determina el precio del bien $p_Y$ que equilibra la oferta de producto de las empresas con la demanda de los hogares

# Modelo de Ramsey

- Familias: $\underset{\{c_t, v_t\}}{Max} \int_0^{\infty} e^{-\theta t} \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} dt$

  sujeto a: $c_t + \dot{v}_t = w_t + (r_t - n) v_t$

  $v_0$ dado

$$H(c_t, v_t, w_t, r_t, \mu_t) = e^{-\theta t} \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \mu_t \left[ w_t + (r_t - n) v_t - c_t \right]$$

Condiciones de primer orden:

$$\left.\begin{array}{l} H_c = 0 : e^{-\theta t} c_t^{-\sigma} = \mu_t, \\ H_v = -\dot{\mu}_t : \mu_t [r_t - n] = -\dot{\mu}_t \end{array}\right\} \rightarrow \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\sigma} \left[ r_t - (n + \theta) \right] \quad (3)$$

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\theta t} \mu_t v_t = 0$$

- Empresa: $\underset{\{L_t, K_t\}}{Max} \left[ K^{\alpha} L^{1-\alpha} - w_t L_t - (r_t + \delta) K_t \right]$

Por la condición de no arbitraje, el rendimiento de los activos financieros ($r_t$) se iguala en el equilibrio al rendimiento del capital físico ($R_t$ - $\delta$ ): $R_t = r_t + \delta$

CPO: $\alpha K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} = r_t + \delta \rightarrow \alpha k_t^{\alpha-1} = r_t + \delta \rightarrow \alpha k_t^{\alpha} = (r_t + \delta) k_t \quad (4)$

$(1-\alpha) L_t^{-\alpha} K_t^{\alpha} = w_t \rightarrow (1-\alpha) k_t^{\alpha} = w_t \quad (5)$

# Modelo de Ramsey

- Sustituyendo (4) en (3) obtenemos la misma regla Keynes-Ramsey del problema del planificador:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\sigma}\left[\alpha k_t^{\alpha-1} - \left(n+\delta+\theta\right)\right]$$

- Sustituyendo (4) y (5) en la *RP* del consumidor y teniendo en cuenta que en equilibrio $v_t = k_t$ (la empresa emite una acción por cada unidad de capital), obtenemos la misma restricción de recursos del planificador:

$$\dot{k}_t = k_t^{\alpha} - (n+\delta)k_t - c_t$$

- Sustituyendo $v_t = k_t$ en la condición de transversalidad del consumidor obtenemos la misma *CT* del planificador:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\theta t}\lambda_t k_t = 0$$

# ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA EN EL MODELO DE RAMSEY

El análisis de la dinámica de esta economía se reduce al estudio de las siguientes ecuaciones dinámicas: (suponemos que la producción per cápita viene dada por la función: $y_t = k_t^{\alpha}$)

- Regla Keynes-Ramsey:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\sigma}\left[\alpha k_t^{\alpha-1} - (n+\delta+\theta)\right] \Leftrightarrow \frac{d\ln c_t}{dt} = \frac{1}{\sigma}\left[\alpha e^{(\alpha-1)\ln k_t} - (n+\delta+\theta)\right]$$

- Restricción de recursos:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \left[k_t^{\alpha-1} - (n+\delta) - \frac{c_t}{k_t}\right] \Leftrightarrow \frac{d\ln k_t}{dt} = \left[e^{(\alpha-1)\ln k_t} - (n+\delta) - e^{\ln c_t - \ln k_t}\right]$$

Si aproximamos log-linealmente estas dos ecuaciones alrededor del estado estaconario tenemos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{d\ln c_t}{dt} \\ \dfrac{d\ln k_t}{dt} \end{bmatrix}}_{\dot{x}_t} \simeq \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\eta \\ -h & \theta \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} \ln c_t - \ln c_{ss} \\ \ln k_t - \ln k_{ss} \end{bmatrix}}_{x_t},$$

donde $\begin{cases} \eta = \dfrac{1-\alpha}{\sigma}(n+\delta+\theta) > 0 \\ h = \dfrac{(1-\alpha)(n+\delta)+\theta}{\alpha} > 0 \end{cases}$

siendo los autovalores de $D$:

$$\mu_1 = \frac{\theta + \sqrt{\theta^2 + 4\eta h}}{2} > \theta > 0, \mu_2 = \frac{\theta - \sqrt{\theta^2 + 4\eta h}}{2} < 0,$$

revelando la existencia de una solución de punto de silla (solución determinada).

La solución a ese sistema dinámico lineal en logaritmos tiene la forma:

$$\dot{x}_t = Dx_t \Rightarrow x_t = e^{Dt}x_0 \Rightarrow x_t = \Gamma e^{\Lambda t}\Gamma^{-1}x_0,$$

donde $\Gamma$ es la matriz de autovalores por la derecha de $D$ y toma la forma:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\mu_1/\eta & -\mu_2/\eta \end{bmatrix}; \Gamma^{-1} = \frac{\eta}{\mu_1-\mu_2}\begin{bmatrix} -\mu_2/\eta & -1 \\ \mu_1/\eta & 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, la solución será como sigue:

$$\begin{cases} x_{1t} \equiv \ln c_t - \ln c_{ss} = e^{\mu_1 t}b_{11} + e^{\mu_2 t}b_{12} \\ x_{2t} \equiv \ln k_t - \ln k_{ss} = e^{\mu_1 t}b_{21} + e^{\mu_2 t}b_{22} \end{cases} \qquad (\Omega)$$

donde
$$\begin{cases} b_{11} = \dfrac{-1}{\mu_1-\mu_2}\left[\mu_2(\ln c_0 - \ln c_{ss}) + \eta(\ln k_0 - \ln k_{ss})\right] \\ b_{12} = \dfrac{1}{\mu_1-\mu_2}\left[\mu_1(\ln c_0 - \ln c_{ss}) + \eta(\ln k_0 - \ln k_{ss})\right] \\ b_{21} = \dfrac{\mu_1}{(\mu_1-\mu_2)\eta}\left[\mu_2(\ln c_0 - \ln c_{ss}) + \eta(\ln k_0 - \ln k_{ss})\right] \\ b_{22} = \dfrac{-\mu_2}{(\mu_1-\mu_2)\eta}\left[\mu_1(\ln c_0 - \ln c_{ss}) + \eta(\ln k_0 - \ln k_{ss})\right] \end{cases}$$

La condición de transversalidad aplicada a la solución para el stock de capital implica que $b_{21}$=0 ya que $e^{\mu_1 t}b_{21}$ crece más rápido que $e^{\theta t}$. Esto implica que:

$$\ln c_0 = \ln c_{ss} - \frac{\eta}{\mu_2}(\ln k_t - \ln k_{ss}) \qquad \text{(A)}$$

Nótese que esa condición también implica que $b_{11}$=0. Así, aplicando estas condiciones sobre la solución ($\Omega$) se llega a:

$$\ln c_t = \ln c_{ss} - e^{\mu_2 t} \frac{\eta}{\mu_2} (\ln k_0 - \ln k_{ss})$$

$$\ln k_t = \ln k_{ss} + e^{\mu_2 t} \frac{\eta}{\mu_2} (\ln k_0 - \ln k_{ss})$$

# Modelo de Ramsey

Bibliografía:

- Novales, Fernández y Ruiz (2009): “Economic Growth: Theory and Numerical Solution Methods”, Springer-Verlag, Capítulos 3 y 4

- Sala-i-Martin (2000): “Apuntes de crecimiento económico”, Antoni Bosch Editor, Capítulo 3