se tiene:

$$\begin{pmatrix}\hat{\gamma}_1\\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1'\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}_1\\ \mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1'\\ \mathbf{X}_1'\end{pmatrix}\left[(\mathbf{Y}_1;\ \mathbf{X}_1)\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \boldsymbol{\beta}_1\end{pmatrix}+\mathbf{u}_1\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1'\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}_1\\ \mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1'\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}_1\\ \mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \boldsymbol{\beta}_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1'\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}_1\\ \mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1'\\ \mathbf{X}_1'\end{pmatrix}\mathbf{u}_1=$$

$$=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \boldsymbol{\beta}_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1'\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}_1\\ \mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1'\mathbf{u}_1\\ \mathbf{X}_1'\mathbf{u}_1\end{pmatrix}$$

y tomando esperanzas en ambos lados de la igualdad se tiene:

$$E\begin{pmatrix}\hat{\gamma}_1\\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \boldsymbol{\beta}_1\end{pmatrix}+E\left[\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1'\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}_1\\ \mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1'\mathbf{u}_1\\ \mathbf{X}_1'\mathbf{u}_1\end{pmatrix}\right]$$

por lo que este estimador será sesgado a no ser que la esperanza del último corchete sea cero. Dicha esperanza no sólo no será cero, en general, sino además difícil de calcular sin imponer supuestos adicionales a los que habitualmente hemos considerado, pues depende de las correlaciones entre los vectores aleatorios $\mathbf{Y}_1$ y $\mathbf{u}_1$, así como de los momentos superiores de la distribución de $\mathbf{Y}_1$.

Ejemplo 18.1. En el caso del modelo IS-LM considerado en el Problema 17.3:

IS: $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_t + u_{1t}, \qquad \alpha_1 < 0$

LM: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 M_t + \beta_2 r_t + u_{2t}, \qquad \beta_0 < 0, \quad \beta_1, \beta_2 > 0$

se tiene la forma reducida:

$$Y_t = \frac{\alpha_0\beta_2 - \alpha_1\beta_0}{\beta_2 - \alpha_1} - \frac{\alpha_1\beta_1}{\beta_2 - \alpha_1} M_t + \frac{\beta_2 u_{1t} - \alpha_1 u_{2t}}{\beta_2 - \alpha_1}$$

$$r_t = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\beta_2 - \alpha_1} - \frac{\beta_1}{\beta_2 - \alpha_1} M_t + \frac{u_{1t} - u_{2t}}{\beta_2 - \alpha_1}$$

de donde puede obtenerse:

$$E(r_t) = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\beta_2 - \alpha_1} - \frac{\beta_1 M_t}{\beta_2 - \alpha_1}$$

por lo que:

$$r_t - E(r_t) = \frac{u_{1t} - u_{2t}}{\beta_2 - \alpha_1}$$

y, finalmente:

$$\text{Cov}(r_t, u_{1t}) = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{12}}{\beta_2 - \alpha_1}$$

de modo que si se estima la curva IS por mínimos cuadrados ordinarios, con las variables en desviaciones con respecto a la media, es fácil ver que:

$$E(\hat{\alpha}_1) = E\left(\frac{\Sigma_1^T (Y_t - \bar{Y})(r_t - \bar{r})}{\Sigma_1^T (r_t - \bar{r})^2}\right) = \alpha_1 + E\left(\frac{\Sigma_1^T (r_t - \bar{r})\,(u_{1t} - \bar{u}_1)}{\Sigma_1^T (r_t - \bar{r})^2}\right)$$

por lo que el sesgo del estimador dependerá de la covarianza muestral entre el tipo de interés y la perturbación aleatoria de la curva IS. En ocasiones, podemos predecir cuál será el signo de este sesgo.

En primer lugar, la expresión anterior muestra que dicho sesgo tendrá el mismo signo que la covarianza entre r_t y u_{1t}. Supongamos que u_{1t}, la perturbación aleatoria de la curva IS, toma un valor positivo; ello implicaría un valor de la renta por encima de su promedio, lo que, a través de la curva LM, ha de venir asociado con un valor de r_t también por encima de su promedio. En consecuencia, la covarianza entre r_t y u_{1t} es positiva, y el coeficiente α_1 resulta *sobrestimado* si se utiliza el método de mínimos cuadrados ordinarios. Finalmente, como $\hat{\alpha}_0 = \bar{Y} - \hat{\alpha}_1 \bar{r}_t$, es claro que al sobrestimar la pendiente α_1, también *subestimaremos* el término independiente α_0, de modo que se tendrá una curva IS más horizontal de lo que se debiera (recordemos que $\alpha_1 < 0$).

La evaluación del sesgo asintótico del estimador puede también obtenerse

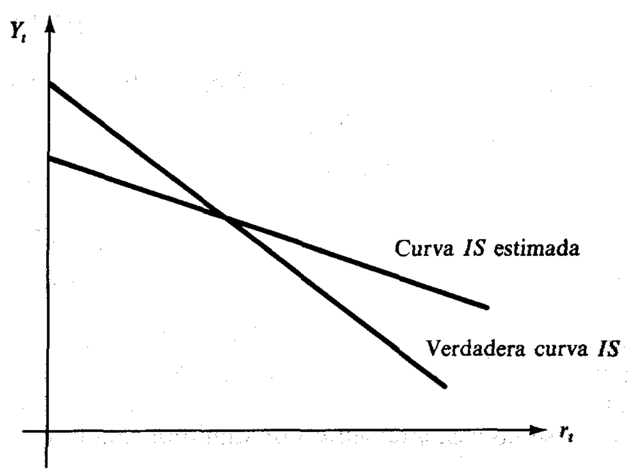

FIGURA 18.1.

analíticamente. En efecto, utilizando las propiedades del límite en probabilidad se tiene[1]:

$$plím\ \hat{\alpha}_1 = \alpha_1 + \frac{plím\left[\left(\frac{1}{T}\right)\Sigma_1^T(r_t - \bar{r})u_{1t}\right]}{plím\left[\left(\frac{1}{T}\right)\Sigma_1^T(r_t - \bar{r})^2\right]}$$

por lo que el sesgo asintótico del estimador depende del cociente de los límites en probabilidad que aparecen en esta expresión. Su cálculo puede hacerse a partir de la forma reducida del modelo:

$$plím\ \Sigma_1^T \frac{(r_t - \bar{r})u_{1t}}{T} =$$

$$plím\left(\frac{1}{T}\right)\Sigma_1^T\left[\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0}{\beta_2 - \alpha_1} - \frac{\beta_1}{\beta_2 - \alpha_1}(M_t - \bar{M}) + \frac{u_{1t} - u_{2t}}{\beta_2 - \alpha_1}\right)u_{1t}\right] =$$

$$= \text{Cov}\left(\frac{u_{1t} - u_{2t}}{\beta_2 - \alpha_1}, u_{1t}\right) = \frac{1}{\beta_2 - \alpha_1}(\sigma_1^2 - \sigma_{12})$$

donde se ha utilizado la propiedad de la convergencia en probabilidad de los momentos muestrales a los momentos análogos poblacionales. De este modo, el momento muestral del producto del término constante por u_{1t} converge en probabilidad a cero, mientras que el momento muestral correspondiente al producto de $M_t - \bar{M}$ por u_{1t} converge a la covarianza de ambas variables, que es cero por ser M_t determinista.

De igual modo, se tiene:

$$plím\left[\left(\frac{1}{T}\right)\Sigma_1^T(r_t - \bar{r})^2\right] = \text{Var}\ r_t = \text{Var}\left(\frac{u_{1t} - u_{2t}}{\beta_2 - \alpha_1}\right) = \frac{1}{(\beta_2 - \alpha_1)^2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12})$$

por lo que el sesgo asintótico del estimador mínimo cuadrático de α_1 es:

$$plím(\hat{\alpha}_1) - \alpha_1 = (\beta_2 - \alpha_1)\frac{\sigma_1^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}$$

que, como puede verse, no desaparece incluso si la covarianza entre las dos perturbaciones aleatorias u_{1t} y u_{2t} es cero. Sin embargo, bajo el supuesto de independencia entre u_{1t} y u_{2t}, el sesgo en $\hat{\alpha}_1$ tiende a cero si la varianza σ_1^2 tiende a cero. En tal caso, la curva IS permanecería constante, por lo que la curva LM se desplazaría sobre la IS a través del tiempo; la nube de puntos muestral sería una descripción de la curva IS, cuyos coeficientes podrían estimarse consistentemente por mínimos cuadrados.

---

[1] Recordemos que $\Sigma_1^T(r_t - \bar{r})(u_{1t} - \bar{u}_1) = \Sigma_1^T r_t(u_{1t} - \bar{u}_1) = \Sigma_1^T(r_t - \bar{r})u_{1t}$.

Al igual que en este ejemplo, el estimador de mínimos cuadrados de una ecuación de la forma estructural del modelo de ecuaciones simultáneas es generalmente inconsistente. Ello hace que este procedimiento de estimación no sea recomendable. Veamos otras soluciones al problema de estimación de una ecuación del modelo de ecuaciones simultáneas.

18.2. ESTIMACION POR MINIMOS CUADRADOS INDIRECTOS

Este es un método de estimación válido únicamente para ecuaciones exactamente identificadas, aprovechando tal condición para recuperar los coeficientes de dicha ecuación de la forma estructural a partir de los coeficientes estimados de la forma reducida. La ventaja de este procedimiento reside en que, como sabemos, la estimación de mínimos cuadrados ordinarios de los parámetros de la forma reducida del modelo es insesgada.

Ejemplo 18.2. En la forma reducida del sistema IS-LM anterior:

$$\begin{aligned} Y_t &= \pi_{11} + \pi_{21} M_t + v_{1t} \\ r_t &= \pi_{12} + \pi_{22} M_t + v_{2t} \end{aligned}$$

con

$$\pi_{11} = \frac{\alpha_0 \beta_2 - \alpha_1 \beta_0}{\beta_2 - \alpha_1}, \quad \pi_{21} = -\frac{\beta_1 \alpha_1}{\beta_2 - \alpha_1}, \quad v_{1t} = \frac{\beta_2 u_{1t} - \alpha_1 u_{2t}}{\beta_2 - \alpha_1}$$

$$\pi_{12} = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\beta_2 - \alpha_1}, \quad \pi_{22} = -\frac{\beta_1}{\beta_2 - \alpha_1}, \quad v_{2t} = \frac{u_{1t} - u_{2t}}{\beta_2 - \alpha_1}$$

una vez obtenidas las estimaciones mínimo-cuadráticas de los coeficientes π_{ij}, se calcularía:

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\hat{\pi}_{21}}{\hat{\pi}_{22}}, \quad \hat{\alpha}_0 = -\frac{\hat{\pi}_{12} \hat{\pi}_{21}}{\hat{\pi}_{22}} + \hat{\pi}_{11}$$

que son los estimadores de *mínimos cuadrados indirectos* de la curva IS.

El lector debe comprobar dos cuestiones: *a*) que utilizando las expresiones analíticas para el estimador de mínimos cuadrados de la forma reducida se tiene que el estimador de mínimos cuadrados indirectos de α_1 es:

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\Sigma_1^T (Y_t - \bar{Y})(M_t - \bar{M})}{\Sigma_1^T (r_t - \bar{r})(M_t - \bar{M})}$$

que es diferente del estimador de mínimos cuadrados ordinarios, y *b*) que no es posible obtener estimaciones de los coeficientes de la curva LM a partir de los coeficientes estimados de la forma reducida del modelo, a diferencia de lo que hemos hecho con los coeficientes de la curva IS, ya que aquélla no está identificada.

En general, supongamos que se pretende estimar la primera ecuación del modelo de ecuaciones simultáneas:

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{Y}_1\boldsymbol{\gamma}_1 + \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{u}_1 \qquad [18.1]$$

es decir,

$$(\mathbf{y}_1;\ \mathbf{Y}_1;\ \mathbf{X}_1)\begin{pmatrix} -1 \\ \boldsymbol{\gamma}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_1 \end{pmatrix} = -\mathbf{u}_1$$

que puede también escribirse, incluyendo todas las variables del modelo:

$$(\mathbf{y}_1;\ \mathbf{Y}_1;\ \mathbf{Y}_2;\ \mathbf{X}_1;\ \mathbf{X}_2)\begin{pmatrix} -1 \\ \boldsymbol{\gamma}_1 \\ \mathbf{0}_{g_2} \\ \boldsymbol{\beta}_1 \\ \mathbf{0}_{g_2} \end{pmatrix} = -\mathbf{u}_1$$

donde $\mathbf{Y}_1$ y $\mathbf{X}_1$ son las matrices $T \times (g_1 - 1)$ y $T \times k_1$, de observaciones de las variables endógenas y predeterminadas incluidas como explicativas en la ecuación, e $\mathbf{Y}_2$ y $\mathbf{X}_2$ son, respectivamente, las matrices $T \times g_2$ y $T \times k_2$, de observaciones de las variables endógenas y predeterminadas excluidas de dicha ecuación.

El estimador de mínimos cuadrados indirectos consiste en utilizar mínimos cuadrados ordinarios en la forma reducida, como se vio en la Sección 17.3, para después tratar de recuperar las estimaciones de los coeficientes de la ecuación que se pretende estimar. Las estimaciones MCO de la forma reducida dan lugar a la matriz $k \times g, \hat{\mathbf{\Pi}}$:

$$\hat{\mathbf{\Pi}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

donde $\mathbf{Y}$ denota la matriz $T \times g$ que tiene por columnas los vectores de observaciones de cada una de las variables endógenas del sistema.

Proposición 18.1. El estimador MCO de la forma reducida es *insesgado.*

Demostración:

$$E[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}] = E[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\mathbf{\Pi} + \mathbf{V})] = \mathbf{\Pi} + E[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}] =$$
$$= \mathbf{\Pi} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'E(\mathbf{V}) = \mathbf{\Pi}$$