Funciones de varias variables

F. Alvarez y H. Lugo

Universidad Complutense de Madrid

23 Noviembre, 2011

Campo escalar

- Denominamos campo escalar a una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, es decir, una función cuyo *dominio* es $\mathbb{R}^n$ y cuya *imagen* es $\mathbb{R}$.
- En este curso estudiaremos exclusivamente campos escalares cuyo dominio es $\mathbb{R}^2$, aunque la extensión de los conceptos a campos en $\mathbb{R}^n$ es directa.

Ejemplos económicos I

- Función de producción Cobb-Douglas. Sean x_1 y x_2 inputs en la producción de determinado bien, cuyas técnicas eficientes están representadas por

$$f(x_1, x_2) = A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$$

- Donde A, α_1 y α_2 son parámetros no negativos, por ejemplo: $\alpha_1 = 1/3$ y $\alpha_2 = 2/3$.
- Se supone habitualmente que los inputs se usan en cantidades no negativas, de modo que el dominio es $\mathbb{R}^2_+$.

Ejemplos económicos II

- Función de ingresos. Sean x_1 y x_2 las cantidades que produce determinada empresa y vende a precios exógenos p_1 y p_2. La función que representa los ingresos de la empresa es:

$$I\left(x_1, x_2\right) = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

- Función de costes. Supongamos que los costes de producción de los anteriores productos son:

$$C\left(x_1, x_2\right) = x_1^{\delta_1} + \beta x_2^{\delta_2}$$

- Donde β, δ_1 y δ_2 son parámetros no negativos.
- Función de beneficio. El beneficio de la empresa anterior es

$$\pi\left(x_1, x_2\right) = I\left(x_1, x_2\right) - C\left(x_1, x_2\right)$$

Ejemplos económicos III

- Función de utilidad. Sean x_1 y x_2 dos bienes. Un consumidor tiene preferencias sobre el consumo de ambos bienes definida por la siguiente función de utilidad Cobb-Douglas:

$$u_1\left(x_1, x_2\right) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$$

- Otras funciones de utilidad alternativas son

$$u_2\left(x_1, x_2\right) = \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2 \qquad u_3\left(x_1, x_2\right) = \alpha x_1 + x_2$$

$$u_4\left(x_1, x_2\right) = \min\{\alpha x_1, x_2\} \qquad u_5\left(x_1, x_2\right) = -\alpha\left(x_1 - a\right)^2 - \left(x_2 - b\right)^2$$

- En todos los casos, α, α_1, α_2, a y b son parámetros no negativos.

Curva de nivel

- Dado un campo escalar en $\mathbb{R}^2$, sea f, definimos curva de nivel K y la denotamos S_K, al subconjunto de valores de $\mathbb{R}^2$ en los que la función toma el valor K.
- Matemáticamente:

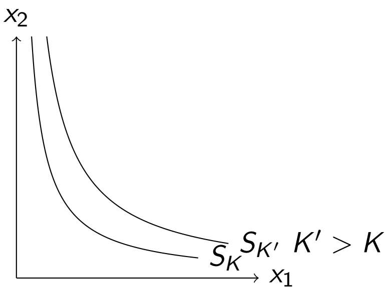
$$S_K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) = K\}$$

- Habitualmente representamos los campos escalares en $\mathbb{R}^2$ representando sus curvas de nivel.

Ejemplos de representación I

Función Cobb-Douglas, $f(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$.

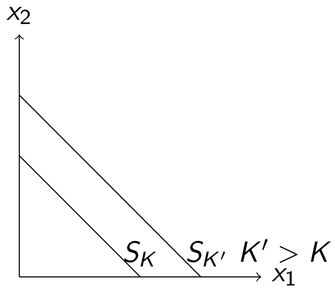
$$Ax_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha} = K \leftrightarrow x_2 = \left(\frac{K}{A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} x_1^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$



Ejemplos de representación II

Función de ingresos, $I\left(x_1, x_2\right) = p_1 x_1 + p_2 x_2$.

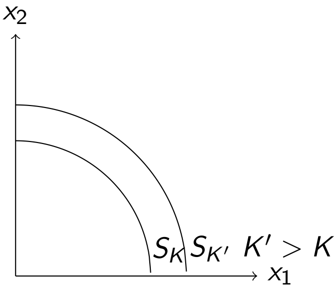
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = K \leftrightarrow x_2 = \frac{K}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$$



Ejemplos de representación III

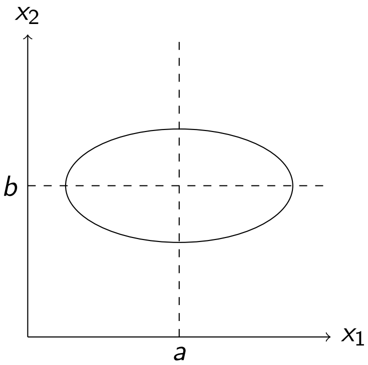
Función de coste, $C(x_1, x_2) = x_1^{\delta_1} + \beta x_2^{\delta_2}$, $\delta_1 > 1$ y $\delta_2 > 1$.

$$x_1^{\delta_1} + \beta x_2^{\delta_2} = K \leftrightarrow x_2 = \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\delta_2}} \left(K - x_1^{\delta_1}\right)^{\frac{1}{\delta_2}}$$



Ejemplos de representación IV

Función de utilidad con saciación global,
$u_5(x_1, x_2) = -\alpha(x_1 - a)^2 - (x_2 - b)^2$



Ejemplos de representación V

Entendamos el gráfico anterior. Sea

$$S_K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha x_1^2 + x_2^2 = K\} \qquad K > 0, \alpha > 0$$

Cortes de S_K con el eje x_1: $\left(\pm\sqrt{\frac{K}{\alpha}}, 0\right)$, con el eje x_2: $\left(0, \pm\sqrt{K}\right)$.

Por tanto:

- si $\alpha = 1$, los cortes con ambos ejes son a la misma distancia del origen: circunferencia.
- si $\alpha < 1$, los cortes con el eje x_1 ocurren a mayor distancia del origen que los cortes con el eje x_2: elipse como en el gráfico anterior.

En el gráfico anterior, el origen es (a, b) y los ejes son las líneas discontínuas. El signo menos indica que la función decrece a partir de (a, b).

Definición de derivada parcial

- Sea f un campo escalar en $\mathbb{R}^2$. Definimos derivada parcial de f con respecto a x_1 en el punto (x_1, x_2)

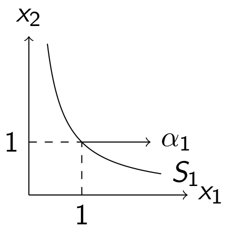
$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) \equiv \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h}$$

si el límite existe. También lo denotamos $f_1(x_1, x_2)$.

- Definimos y denotamos de forma ánaloga la derivada parcial de f con respecto a x_2.
- Por tanto, derivar con respecto a x_1 es equivalente a considerar x_2 como una constante y hacer la derivada usual en una función de una variable respecto de x_1.

Interpretación geométrica de la derivada parcial I

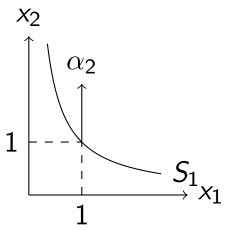
Sea $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$. Tenemos $f_1(x_1, x_2) = \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2}$, por tanto $f_1(1,1) = \alpha_1$.



Un desplazamiento infinitesimal por la función a partir de $f(1,1)$ en la dirección indicada por la flecha, implica una variación aproximada de α_1.

Interpretación geométrica de la derivada parcial II

Sea $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$. Tenemos $f_2(x_1, x_2) = \alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1}$, por tanto $f_2(1, 1) = \alpha_2$.



Un desplazamiento infinitesimal por la función a partir de $f(1, 1)$ en la dirección indicada por la flecha, implica una variación aproximada de α_2.

Interpretación geométrica de la derivada parcial III

La derivada parcial mide variaciones absolutas en una variable ante variaciones absolutas en otra.

- Variación absoluta de f ante una variación absoluta de x_i

$$\Delta f \approx f_i(x_1, x_2)\Delta x_i$$

  Si $\Delta x_i = 1 \rightarrow \Delta f \approx f_i(x_1, x_2)$

- Aproximación lineal del valor de la función ante una variación absoluta de x_1 cercana al punto (x_1, x_2).

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2) \approx f(x_1, x_2) + f_1(x_1, x_2)\Delta x_1$$

Interpretación geométrica de la derivada parcial IV

Sea $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$. En el punto $(1,1)$ tenemos que $f_1(1,1) = \alpha_1$ y $f_2(1,1) = \alpha_2$.

Variaciones absolutas de f

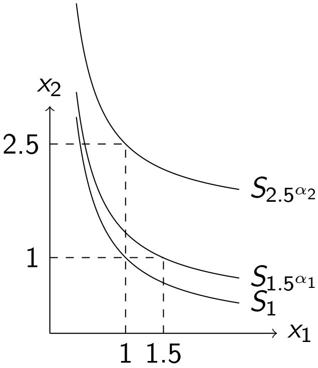
Si $\Delta x_1 = 0.5 \rightarrow \Delta f \approx 0.5\alpha_1$

Si $\Delta x_2 = 1.5 \rightarrow \Delta f \approx 1.5\alpha_2$

Aproximaciones lineales:

$f(1.5, 1) \approx f(1,1) + 0.5\alpha_1$

$f(1, 2.5) \approx f(1,1) + 1.5\alpha_2$



Elasticidades parciales I

- En economía es habitual hablar de elasticidad, que mide variaciones relativas de una variable ante variaciones relativas en otra.
- Sea f un campo escalar en $\mathbb{R}^2$. Definimos elasticidad parcial de f con respecto a x_1 en el punto (x_1, x_2)

$$\varepsilon_{y,x_1}(x_1, x_2) \equiv \frac{x_1}{y} f_1(x_1, x_2)$$

donde $y = f(x_1, x_2)$. Análogo para $\varepsilon_{y,x_2}(x_1, x_2)$.

Elasticidades parciales II

Sea $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$. Tenemos

$$f_1(x_1, x_2) = \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2} \qquad \varepsilon_{y,x_1}(x_1, x_2) = \frac{x_1}{y} f_1(x_1, x_2) = \alpha_1$$

Si a partir del punto $(x_1, x_2) = (1, 2)$, manteniendo x_2, aumentamos x_1....

- ... en una unidad, f aumenta $f_1(1, 2) = \alpha_1 2^{\alpha_2}$ unidades.
- ... en un 1 %, f aumenta $\varepsilon_{y,x_1}(1, 2) = \alpha_1$ %.
- ... en Δx_1 unidades, f aumenta $\frac{f_1(1,2)}{f(1,2)} \Delta x_1 = \alpha_1 \Delta x_1$ %.
- ... en un Δx_1 % , f aumenta $\varepsilon_{y,x_1}(1, 2) \Delta x_1 \% = \alpha_1 \Delta x_1$ %.

Derivadas segundas y matrix Hessiana

Sea f un campo escalar en $\mathbb{R}^2$.

- Definimos las derivadas parciales de segundo orden

$$\frac{\partial}{\partial x_j \partial x_i} f(x_1, x_2) \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x_1, x_2)$$

  donde tanto i como j pertenecen a $\{1, 2\}$. También la denotamos $f_{i,j}(x_1, x_2)$.

- Definimos la matriz Hessiana

$$Hf(x_1, x_2) \equiv \begin{pmatrix} f_{1,1}(x_1, x_2) & f_{1,2}(x_1, x_2) \\ f_{2,1}(x_1, x_2) & f_{2,2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Cálculo de la matriz Hessiana y Teorema de Schwartz

- Sea $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, entonces:

$$Hf(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1(\alpha_1 - 1) x_1^{\alpha_1 - 2} x_2^{\alpha_2} & \alpha_1 \alpha_2 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2 - 1} \\ \alpha_1 \alpha_2 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2 - 1} & \alpha_2(\alpha_2 - 1) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 2} \end{pmatrix}$$

- Notemos que $f_{1,2}(x_1, x_2) = f_{2,1}(x_1, x_2)$. Esta es una propiedad general que se verifica para todos campos escalares que vemos en este curso.
- Teorema de Schwartz. Si $f_{1,2}(x_1, x_2)$ y $f_{2,1}(x_1, x_2)$ existen y son contínuas, entonces $f_{1,2}(x_1, x_2) = f_{2,1}(x_1, x_2)$.

Definición y cálculo del gradiente

- Sea f un campo escalar en $\mathbb{R}^2$. Definimos el vector gradiente de f:

$$\nabla f(x_1, x_2) \equiv \left(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)\right)^T$$

  donde T indica transpuesto.

- Ejemplo. Sea $f(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, entonces:

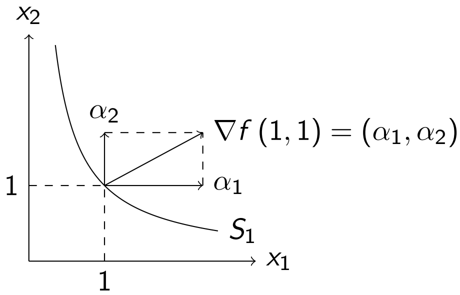
$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = \alpha_1 A x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2} \qquad \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) = \alpha_2 A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1}$$

- En particular, si $(x_1, x_2) = (1, 1)$, tenemos

$$\nabla f(1, 1) = A(\alpha_1, \alpha_2)^T$$

Interpretación geométrica del gradiente

Sea $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, consideremos las derivadas parciales en $(x_1, x_2) = (1, 1)$. Recordemos que $\nabla f(1,1) = (\alpha_1, \alpha_2)^T$



Diferencial

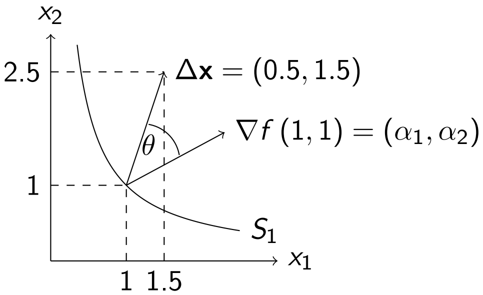
- Sea f un campo escalar en $\mathbb{R}^2$. Supongamos que a partir de un punto (x_1, x_2) se produce un desplazamiento en el dominio de f al punto $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2)$.
- Si f es diferenciable (lo es si sus derivadas parciales son contínuas), el incremento en f puede aproximarse

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2) \simeq \Delta \mathbf{x} \cdot \nabla f(x_1, x_2) \qquad (1)$$

- donde $\Delta \mathbf{x} \equiv (\Delta x_1, \Delta x_2)$ y se denomina vector desplazamiento
- El lado derecho es el producto escalar del desplazamiento por el gradiente y se denomina diferencial o derivada total.

Interpretación geométrica del diferencial

Sea $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$; $(x_1, x_2) = (1, 1)$; $\mathbf{\Delta x} = (0.5, 1.5)$.



$$\mathbf{\Delta x} \cdot \nabla f(x_1, x_2) = \|\mathbf{\Delta x}\| \|\nabla f(x_1, x_2)\| \cos\theta = 0.5\alpha_1 + 1.5\alpha_2$$

Aproximación lineal y plano tangente

- Sea f un campo escalar en $\mathbb{R}^2$. Definimos la aproximación lineal en torno al punto (x_1^o, x_2^o):

$$L(x_1, x_2) \equiv f(x_1^o, x_2^o) + \Delta\mathbf{x} \cdot \nabla f(x_1^o, x_2^o)$$

  donde $\Delta\mathbf{x} = (x_1 - x_1^o, x_2 - x_2^o)$.
- El último sumando es el diferencial.
- Además, $L(x_1, x_2)$ es el plano tangente a f en el punto (x_1^o, x_2^o).

Ejemplo de cálculo del plano tangente

- Ejemplo: Sea $f(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{1/2}$; veamos la ecuación del plano tangente a la función en el punto $(1, 4)$.
- Tenemos:

$$L(x_1, x_2) = f(1,4) + f_1(1,4)(x_1 - 1) + f_2(1,4)(x_2 - 4) \rightarrow$$

$$L(x_1, x_2) = 2 + \frac{2}{3}(x_1 - 1) + \frac{1}{4}(x_2 - 4)$$

- Notaremos la diferencia entre plano tangente a f (cuyo gráfico está en el mismo espacio que f) y recta tangente a una curva de nivel (cuyo gráfico está en el dominio de f).

Aproximación lineal usando elasticidades

- Sea f un campo escalar en $\mathbb{R}^2$, siendo $y = f(x_1, x_2)$. Podemos reescribir (1) en términos de variaciones relativas y elasticidades:

$$\frac{\Delta y}{y} = \varepsilon_{y,x_1}(x_1, x_2)\frac{\Delta x_1}{x_1} + \varepsilon_{y,x_2}(x_1, x_2)\frac{\Delta x_2}{x_2} \qquad (2)$$

- donde $\frac{\Delta y}{y}$ es la variación relativa de la variable y, y análogamente se definen $\frac{\Delta x_1}{x_1}$ y $\frac{\Delta x_2}{x_2}$.

Aproximación lineal usando elasticidades: ejemplo

- Sea $y = x_1^{1/3} x_2^{1/2}$. Si a partir del punto $(x_1, x_2) = (1, 4)$ se produce un aumento del 3% en x_1 y una disminución del 4% en x_2, ¿cuál es la variación relativa aproximada en y?
- Tenemos $\frac{\delta x_1}{x_1} = 3$ y $\frac{\delta x_2}{x_2} = -4$. Además

$$\varepsilon_{y,x_1}(x_1, x_2) = \frac{x_1}{y} f_1(x_1, x_2) \rightarrow \varepsilon_{y,x_1}(1, 4) = \frac{1}{3}$$

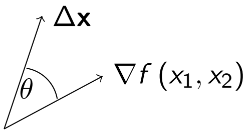
- donde hemos usado que $y = f(1, 4) = 2$. Análogamente tenemos $\varepsilon_{y,x_2}(1, 4) = 1/2$, por lo que, usando (2), la variación relativa en y es:

$$\frac{1}{3} \times 3 + \frac{1}{2} \times (-4) = -1$$

Propiedades del gradiente

Dado $\Delta\mathbf{x} \cdot \nabla f(x_1, x_2) = \|\Delta\mathbf{x}\| \|\nabla f(x_1, x_2)\| \cos\theta$, tenemos:

- si $\theta = 90^\circ$, entonces $\Delta\mathbf{x} \cdot \nabla f(x_1, x_2) = 0$: el gradiente es perpendicular a la tangente de la curva de nivel.
- si $\theta = 0^\circ$, entonces $\Delta\mathbf{x} \cdot \nabla f(x_1, x_2)$ es máximo dado $\|\Delta\mathbf{x}\|$
- si $\theta = 180^\circ$, entonces $\Delta\mathbf{x} \cdot \nabla f(x_1, x_2)$ es mínimo dado $\|\Delta\mathbf{x}\|$



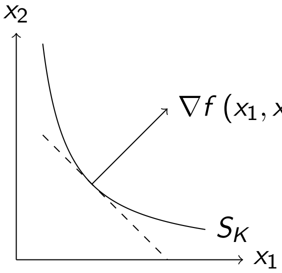
Propiedades del gradiente

Se deduce que:

- la función f permanece constante en las direcciones perpendiculares a $\nabla f\left(x_1, x_2\right)$
- la dirección de máximo crecimiento de f es la dirección determinada por $\nabla f\left(x_1, x_2\right)$
- la dirección de máximo decrecimiento de f es la dirección opuesta a $\nabla f\left(x_1, x_2\right)$

Otras propiedades: pendiente de una curva de nivel

- Usando que el gradiente es perpendicular a la curva de nivel, podemos usar el gradiente para conocer la pendiente de la recta tangente a una curva de nivel en un punto.



Otras propiedades: pendiente de una curva de nivel

- Ejemplo: Sea $f(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{1/2}$; veamos la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel que pasa por el punto $(1, 4)$.
- Tenemos $\nabla f(1, 4) = (2/3, 1/4)$, por lo que la pendiente de $\nabla f(1, 4)$ es $3/8$, y la pendiente de la recta perpendicular a $\nabla f(1, 4)$ es $-8/3$. Además dicha recta debe pasar por el punto $(1, 4)$. Dicha recta es $x_2 = 4 - \frac{8}{3}(x_1 - 1)$.

Función implícita: derivada

- Presentamos aquí una forma alternativa de ver que el gradiente es perpendicular a la tangente de la curva de nivel.
- Sea f un campo escalar en $\mathbb{R}^2$. La curva de nivel S_K, mediante la ecuación $f(x_1, x_2) = K$ define implícitamente x_2 como función real de x_1.
- Si estamos interesados en conocer la curvatura de dicha función, es decir, la curvatura de S_K, podemos resolver explícitamente o usar el teorema de la función implícita:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)}$$

- Se basa en que la variación total de f a lo largo de S_K es 0.

Aproximación cuadrática

- Sea f un campo escalar en $\mathbb{R}^2$. Definimos la aproximación cuadrática en torno al punto (x_1^o, x_2^o):

$$C(x_1, x_2) \equiv f(x_1^o, x_2^o) + \Delta\mathbf{x} \cdot \nabla f(x_1^o, x_2^o) + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{x} Hf(x_1^o, x_2^o) \Delta\mathbf{x}^T$$

  donde $\Delta\mathbf{x} = (x_1 - x_1^o, x_2 - x_2^o)$.
- Por tanto, la aproximación cuadrática añade un término cuadrático sobre la aproximación lineal.

Aproximación cuadrática: Ejemplo

Sea $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$. Definimos la aproximación cuadrática de f en torno al punto $\left(x_1^0, x_2^0\right) = (1,1)$:

$$C\left(x_1, x_2\right) \equiv f\left(1,1\right) + \Delta\mathbf{x} \cdot \nabla f\left(1,1\right) + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{x} Hf\left(1,1\right) \Delta\mathbf{x}^T$$

donde

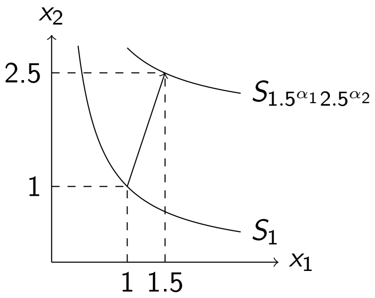
- $f\left(1,1\right) = 1$
- $\Delta\mathbf{x} = \left(x_1 - 1, x_2 - 1\right)$ y $\nabla f\left(1,1\right) = \left(\alpha_1, \alpha_2\right)$
- La matriz hessiana en $(1,1)$:

$$Hf\left(1,1\right) = \begin{pmatrix} \alpha_1\left(\alpha_1 - 1\right) & \alpha_1\alpha_2 \\ \alpha_1\alpha_2 & \alpha_2\left(\alpha_2 - 1\right) \end{pmatrix}$$

Aproximación cuadrática: Ejemplo (cont.)

Si hay un desplazamiento del punto $(1,1)$ al $(1.5,2.5)$ entonces tendremos que:

- $\Delta \mathbf{x} = (0.5, 1.5)$
- Valor exacto
  $f(1.5,2.5) = 1.5^{\alpha_1} 2.5^{\alpha_2}$
- Aproximación lineal
  $L(1.5,2.5) = 1 + 0.5\alpha_1 + 1.5\alpha_2$
- Aproximación cuadrática
  $C(1.5,2.5) = 1 + 0.5\alpha_1 + 1.5\alpha_2$
  $+1/8\alpha_1(\alpha_1 - 1) + 3/4\alpha_1\alpha_2 +$
  $9/8\alpha_2(\alpha_2 - 1)$



Teorema de Taylor

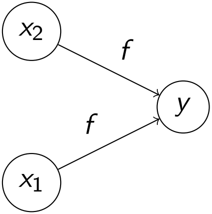
- Sea f un campo escalar dos veces diferenciable. Consideremos una aproximación cuadrática en torno a un punto arbitrario $\mathbf{x}^o = (x_1^o, x_2^o)$. Definimos un campo escalar R de modo que:

$$f(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}) + R(\mathbf{x})$$

  donde $\mathbf{x}$ es arbitrario.
- Por construcción, $R(\mathbf{x})$ es el error, o resto, cometido por la aproximación cuadrática, es decir, C, en $\mathbf{x}$.
- Teorema de Taylor: $R(\mathbf{x}) \to 0$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^o$.
- El teorema generaliza a cualquier orden de aproximación.

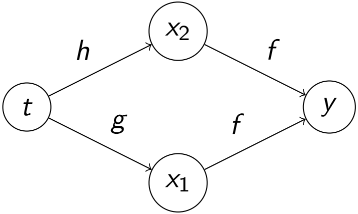
Esquemas de dependencia

- Sea f un campo escalar en $\mathbb{R}^2$ de modo que $y = f(x_1, x_2)$. Podemos representar la dependencia entre las anteriores variables mediante el esquema:



Esquemas de dependencia: composición de funciones

- El esquema de dependencia es util para visualizar dependencias cuando componemos campos escalares. Por ejemplo:



- El anterior esquema muestra la composición de $y = f(x_1, x_2)$ con dos funciones reales: $x_1 = g(t)$ y $x_2 = h(t)$.

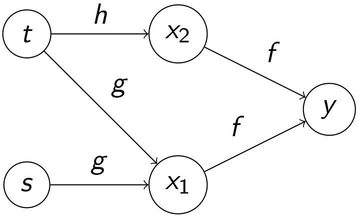
Regla de la cadena

- La regla de la cadena se extiende para la composición de campos escalares.
- Supongamos la composición anterior: $y = f(x_1, x_2)$ con $x_1 = g(t)$ y $x_2 = h(t)$.
- La derivada de y con respecto de t es:

$$\frac{dy}{dt} = f_1(x_1, x_2)\frac{dx_1}{dt} + f_2(x_1, x_2)\frac{dx_2}{dt}$$

Regla de la cadena, otro ejemplo

- Supongamos el siguiente esquema de dependencias, que contiene dos campos escalares, f y g, y una función real, h.



- Tenemos:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial s}$$

Definición y ejemplo

- Sea f un campo escalar en $\mathbb{R}^2$. Decimos que f es homogéneo de grado k si verifica:

$$f(tx_1, tx_2) = t^k f(x_1, x_2) \qquad \forall t > 0 \tag{3}$$

- Por ejemplo, $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, siendo $\alpha \in (0, 1)$. Se tiene que $f(tx_1, tx_2) = tf(x_1, x_2)$.
- Si el anterior campo escalar es una función de producción, la homogeneidad de grado 1 implica que con el doble de ambos inputs se obtiene el doble de output, con el triple de ambos inputs....

Una propiedad de funciones homogéneas

- Teorema de Euler. Sea f un campo escalar en $\mathbb{R}^2$ homogénea de grado k. Entonces:

$$x_1 f_1 (x_1, x_2) + x_2 f_2 (x_1, x_2) = kf (x_1, x_2) \tag{4}$$

- La anterior implicación se prueba diferenciando con respecto a t a ambos lados de la igualdad en (3) y tomando $t = 1$.
- El Teorema indica además que la implicación también ocurre en sentido contrario, es decir: (4) implica (3).

Mas propiedades de funciones homogéneas

Sea f un campo escalar en $\mathbb{R}^2$ homogéneo de grado k. Entonces:

- $f(x_1, x_2) = x_1^k f(1, x_2/x_1) = x_2^k f(x_1/x_2, 1)$
- $\varepsilon_{y,x_1}(x_1, x_2) + \varepsilon_{y,x_2}(x_1, x_2) = k$
- $f_1(x_1, x_2)$ y $f_2(x_1, x_2)$ son homogéneos de grado $k-1$.

Para probar las dos primeras igualdades basta tomar en (3) $t = 1/x_1$ y $t = 1/x_2$, respectivamente. Para la suma de las elasticidades parciales basta dividir en (4) por $f(x_1, x_2)$. Para la homeneidad de las derivadas parciales, basta derivar en (3) con respecto a x_1 (ó x_2) y reordenar términos.

Otras propiedades de funciones homogéneas

Sea f un campo escalar en $\mathbb{R}^2$ homogéneo de grado k. Si a partir del punto (x_1^0, x_2^0), ambos se incrementan en un $m\%$, esto es, $\Delta x_1\% = \Delta x_2\% = m\%$, entonces:

- $\Delta f\% = \left(1 + \frac{m}{100}\right)^k - 1$
- $\Delta f\% \approx k\frac{m}{100}$

Cuando $k = 0$ ó $k = 1$, el valor aproximado y el valor exacto de la variación porcentual de f coinciden.

Definición y ejemplo

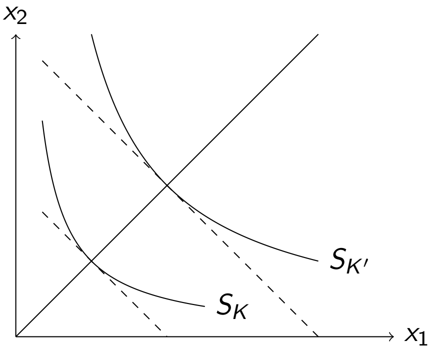
- Sea f un campo escalar en $\mathbb{R}^2$. Decimos que f es homotético si, para cualesquiera dos puntos del dominio $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ y cualquier $t > 0$ se verifica:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) \Rightarrow f(t\mathbf{x}) = f(t\mathbf{y}) \tag{5}$$

- Por ejemplo, $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, siendo $\alpha \in (0,1)$. Sean $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ tales que $x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} = y_1^{\alpha} y_2^{1-\alpha}$. Entonces es claro que $(tx_1)^{\alpha} (tx_2)^{1-\alpha} = (ty_1)^{\alpha} (ty_2)^{1-\alpha}$.

Interpretación geométrica

- Si f es homotético, cualquier rayo que parte del origen corta a las curvas de nivel en puntos de igual pendiente.



Relación entre homogenidad y homoteticidad

- Todo campo escalar homogéneo es homótetico. De modo mas general, toda transformación creciente de un campo homogéneo es homotética.
- El recíproco no es cierto. Por ejemplo: $f(x_1, x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$.
- Escribamos $f(x_1, x_2) = \ln(x_1 x_2)$, de modo que, para $t > 0$ tenemos

$$f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2) \to x_1 x_2 = y_1 y_2 \to t x_1 t x_2 = t y_1 t y_2$$

y la ultima igualdad es equivalente a $f(tx_1, tx_2) = f(ty_1, ty_2)$. Sin embargo, f no es homogéneo.

Conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$

- Sea $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, siendo $n \in \{1, 2, ...\}$. La norma Euclidea de $\mathbf{x}$ es

$$\|\mathbf{x}\|_E \equiv \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$$

- Sea, además, $r \in \mathbb{R}_+$, una bola abierta de centro $\mathbf{x}$ y radio r es

$$B(\mathbf{x}, r) \equiv \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_E < r\}$$

- Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{x} \in A$, decimos que $\mathbf{x}$ es un punto interior de A si existe $r \in \mathbb{R}_+$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subseteq A$.
- El conjunto de puntos interiores de A se denota $Int(A)$. A es abierto si y solo si $A \subseteq Int(A)$.

Continuidad de un campo escalar

- Sea f un campo escalar de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Para todo $A \subset \mathbb{R}$, definimos la imagen inversa

$$f^{-1}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) \in A\}$$

- El campo f es contínuo si y solo si $f^{-1}(A)$ es abierto cuando A es abierto.
- Un conjunto es abierto si ninguno de sus elementos está *en el borde* del conjunto. f es contínuo si la imagen inversa de un conjunto abierto es un conjunto abierto.
- Este concepto de continuidad es equivalente (aunque más formal) a: *podemos dibujar la función sin levantar el lápiz del papel*.