EXAMEN DE MATEMATICAS I (SEPTIEMBRE 2010)

EJERCICIO 1 (2 puntos) La demanda de cierto bien viene dada por la función $x = f(p)$ donde p es el precio del bien. La función de ingreso es $I(p) = pf(p)$. Por otra parte los precios varían con el tiempo según la función $p = g(t)$. Supón que actualmente $t_0 = 0$, $p_0 = g(0) = 2$, $x_0 = f(2) = 10$ y que se sabe que $f'(2) = -2$ y $g'(0) = 3$.
a) Calcula la derivada de la función que proporciona la cantidad demandada como función del tiempo en $t_0 = 0$ e interpreta el signo de esta derivada.
b) Dí cuál será aproximadamente la variación porcentual en el ingreso si el precio se incrementa un 5%.

EJERCICIO 2 (2 puntos) Dado el problema de optimización

$$\begin{array}{ll} \text{min y max }_{y} & 36 - y^2 + 8y \\ \text{s.a.} & y \in [0, 6] \end{array}$$

a) Estudia en qué intervalos del conjunto factible la función objetivo es creciente, decreciente, cóncava y convexa.
b) Resuelve el problema encontrando TODOS los óptimos, locales y globales en el supuesto de que existan.

EJERCICIO 3 (2 puntos) Dado el problema de optimización

$$\text{min y max }_{x,y} \; 5x + 2y$$

$$s.a. \left\{ \begin{array}{c} (x+1)(y+2) = 10 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right.$$

a) Comprueba que la curva de nivel de la función objetivo que pasa por el punto $(1, 3)$ es tangente en ese punto a la restricción $(x + 1)(y + 2) = 10$.
b) Resuelve geométricamente el problema anterior hallando TODOS los mínimos y máximos locales y globales en el supuesto de que existan.

EJERCICO 4 (2 puntos) Dada la función $f(x, y) = \frac{x - \ln(1+y)}{x+1}$
a) Supón que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Justifica si es cierta la siguiente afirmación: el valor de f disminuye al aumentar y, y esta disminución es, en valor absoluto, menor cuanto mayor es x.
b) Calcula cuál es aproximadamente la variación que experimenta f si estando en el punto $(x_0, y_0) = (1, 0)$ se pasa al punto $(x_1, y_1) = (1.2, 0.1)$.

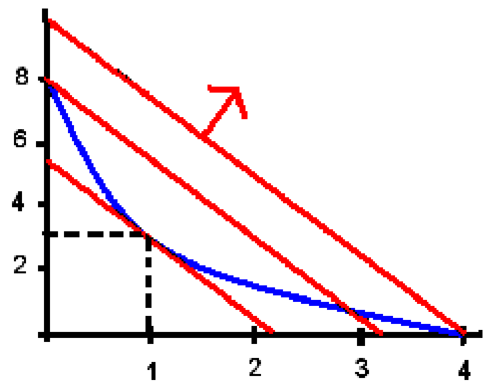
EJERCICIO 5 (2 puntos) El ritmo de variación del precio (en euros) de cierto bien en los últimos siete años ha sido

$$p'(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 + \frac{4}{(t+1)^2} & 0 \leq t \leq 1 \\ t + 1 & 1 < t \leq 7 \end{array} \right.$$

Sabiendo que el precio inicial fue $p(0) = 9$ euros.
a) Dí si el precio ha estado siempre subiendo, ha estado siempre bajando o ha habido años en los que ha subido y otros en los que ha bajado. Dibuja la función $p'(t)$.
b) Halla el precio al final del primer año y en qué instante t el precio se ha duplicado (es decir $p(t) = 18$)

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 a) La derivada de la función compuesta es $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dp}\frac{dp}{dt} = (-2)3 = -6$ y como es negativa la cantidad demandada disminuye al pasar el tiempo
b) $I'(p) = f(p) + pf'(p) \Longrightarrow I'(2) = 10 - 4 = 6 \Longrightarrow \varepsilon_{I,p} = \frac{I'(2)}{I(2)} \cdot 2 = \frac{6}{20}2 = 0.6$ luego se incrementa en un $0.6 \cdot 5 = 3$ por cierto.
EJERCICIO 2 a) $f'(y) = -2y + 8 > 0$ si $y < 4$ luego la función es creciente en $[0, 4]$ y decreciente en $[4, 6]$. Como la derivada segunda es negativa en todo punto es cóncava en todo $[0, 6]$
b) La derivada se anula en $y = 4$ y como la función es cóncava éste es un máximo global. Como la función es continua y el conjunto es compacto también hay mínimo global que debe de alcanzarse o en $x = 0$ o en $x = 6$. Como $f(0) = 36$ y $f(6) = 36 - 36 + 48 = 48$ se tiene que $x = 0$ es el mínimo global. El punto $x = 6$ es un mínimo local, lo que puede verse representando la función objetivo $f(y) = 36 - y^2 + 8y$ o comprobando que $f'(6) = -12 + 8 = -4 < 0$.
EJERCICIO 3 a) La pendiente de esa curva de nivel es $-\frac{5}{2}$ y la pendiente de la restricción es $m = -\frac{y+2}{x+1} = -\frac{5}{2}$ y puesto que el punto $(1, 3)$ está en ambas curvas y la pendiente de ambas en ese punto es igual, esas dos curvas son tangentes.
b) La función es continua y el conjunto de soluciones factibles es compacto. Por tanto existen mínimo y máximo global. Estos se hallan en el punto de tangencia o en "los extremos" de la restricción que son los puntos $(0, 8)$ y $(4, 0)$. Puesto que $f(4, 0) = 20, f(0, 8) = 16$ y $f(1, 3) = 5 + 6 = 11$ el punto de tangencia es un mínimo global, el $(4, 0)$ un máximo global y



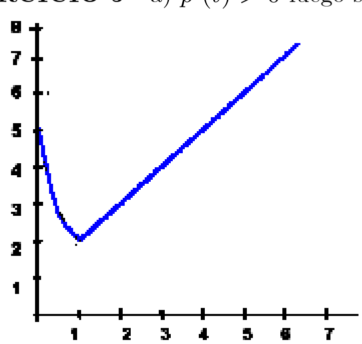
geométricamente puede verse que $(0, 8)$ es un máximo local.
EJERCICO 4 a) Nos piden que comprobemos si es cierto que $f'_y < 0$ y $f''_{xy} > 0$. Hallamos estas parciales:

$$f'_y = -\frac{1}{(x+1)(1+y)};\ f''_{xy} = \frac{1}{(1+y)(x+1)^2}$$

y podemos comprobar que sí es cierto.
b) $f'_x = \frac{(x+1)-x+\ln(1+y)}{(x+1)^2}$ luego $f'_x(1, 0) = \frac{1}{4}$ y $f'_y(1, 0) = -\frac{1}{2}$.
Por tanto,

$$\Delta f \sim f'_x(1, 0)\Delta x + f'_y(1, 0)\Delta y = \frac{1}{4} \cdot 0.2 - \frac{1}{2} \cdot 0.1 = 0.05 - 0.05 = 0$$

EJERCICIO 5 a) $p'(t) > 0$ luego siempre ha estado subiendo. La gráfica de $p'(t)$ es



b) $p(1) = 9 + \int_0^1 (1 + \frac{4}{(t+1)^2})dt = 9 + [t - \frac{4}{t+1}]_0^1 = 9 + 1 - 2 + 4 = 12$
Si $t > 1$ entonces $p(t) = 12 + \int_1^t (t + 1)dt = 12 + [t^2/2 + t]_1^t = 12 + t^2/2 + t - \frac{3}{2} = 18 \Longrightarrow t^2 + 2t - 15 = 0 \Longrightarrow t = 3$