EXAMEN DE MATEMATICAS I (SEPTIEMBRE 2010)

EJERCICIO 1 (2 puntos) La demanda de cierto bien viene dada por la función $x = f(p)$ donde p es el precio del bien. La función de ingreso es $I(p) = pf(p)$. Por otra parte los precios varían con el tiempo según la función $p = g(t)$. Supón que actualmente $t_0 = 0$, $p_0 = g(0) = 2$, $x_0 = f(2) = 10$ y que se sabe que $f'(2) = -2$ y $g'(0) = 3$.
a) Calcula la derivada de la función que proporciona la cantidad demandada como función del tiempo en $t_0 = 0$ e interpreta el signo de esta derivada.
b) Dí cuál será aproximadamente la variación porcentual en el ingreso si el precio se incrementa un 5%.

EJERCICIO 2 (2 puntos) Dado el problema de optimización

$$\begin{array}{ll} \text{min y max}_{\ y} & 36 - y^2 + 8y \\ \text{s.a.} & y \in [0, 6] \end{array}$$

a) Estudia en qué intervalos del conjunto factible la función objetivo es creciente, decreciente, cóncava y convexa.
b) Resuelve el problema encontrando TODOS los óptimos, locales y globales en el supuesto de que existan.

EJERCICIO 3 (2 puntos) Dado el problema de optimización

$$\text{min y max}_{\ x,y} \ 5x + 2y$$

$$s.a. \left\{ \begin{array}{c} (x+1)(y+2) = 10 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right.$$

a) Comprueba que la curva de nivel de la función objetivo que pasa por el punto $(1, 3)$ es tangente en ese punto a la restricción $(x + 1)(y + 2) = 10$.
b) Resuelve geométricamente el problema anterior hallando TODOS los mínimos y máximos locales y globales en el supuesto de que existan.

EJERCICO 4 (2 puntos) Dada la función $f(x, y) = \frac{x - \ln(1+y)}{x+1}$
a) Supón que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Justifica si es cierta la siguiente afirmación: el valor de f disminuye al aumentar y, y esta disminución es, en valor absoluto, menor cuanto mayor es x.
b) Calcula cuál es aproximadamente la variación que experimenta f si estando en el punto $(x_0, y_0) = (1, 0)$ se pasa al punto $(x_1, y_1) = (1.2, 0.1)$.

EJERCICIO 5 (2 puntos) El ritmo de variación del precio (en euros) de cierto bien en los últimos siete años ha sido

$$p'(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 + \frac{4}{(t+1)^2} & 0 \leq t \leq 1 \\ t + 1 & 1 < t \leq 7 \end{array} \right.$$

Sabiendo que el precio inicial fue $p(0) = 9$ euros.
a) Dí si el precio ha estado siempre subiendo, ha estado siempre bajando o ha habido años en los que ha subido y otros en los que ha bajado. Dibuja la función $p'(t)$.
b) Halla el precio al final del primer año y en qué instante t el precio se ha duplicado (es decir $p(t) = 18$)
