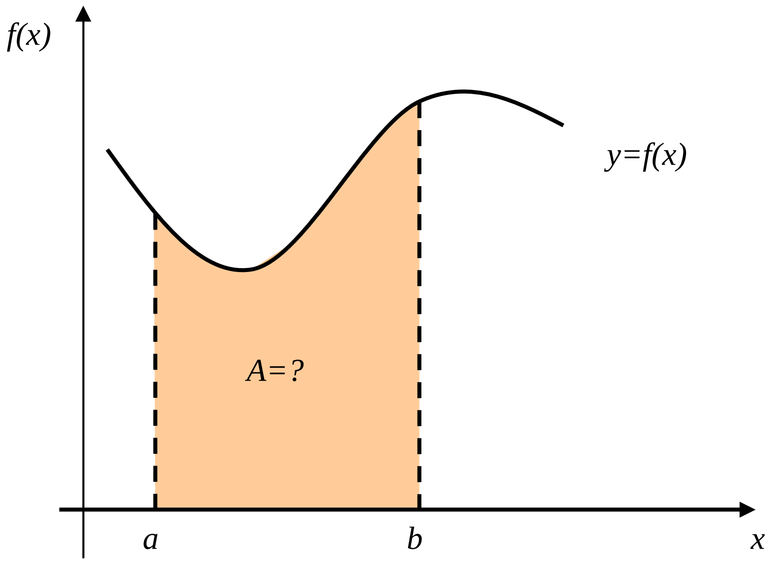
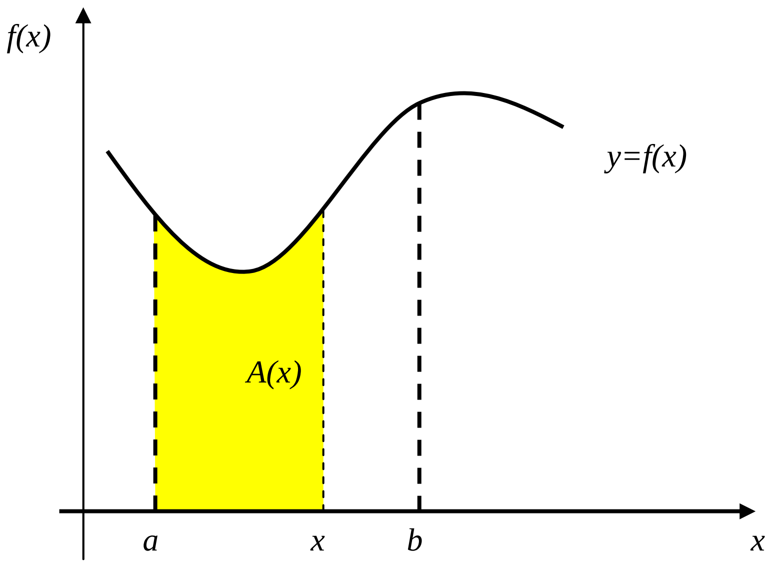
INTEGRACIÓN

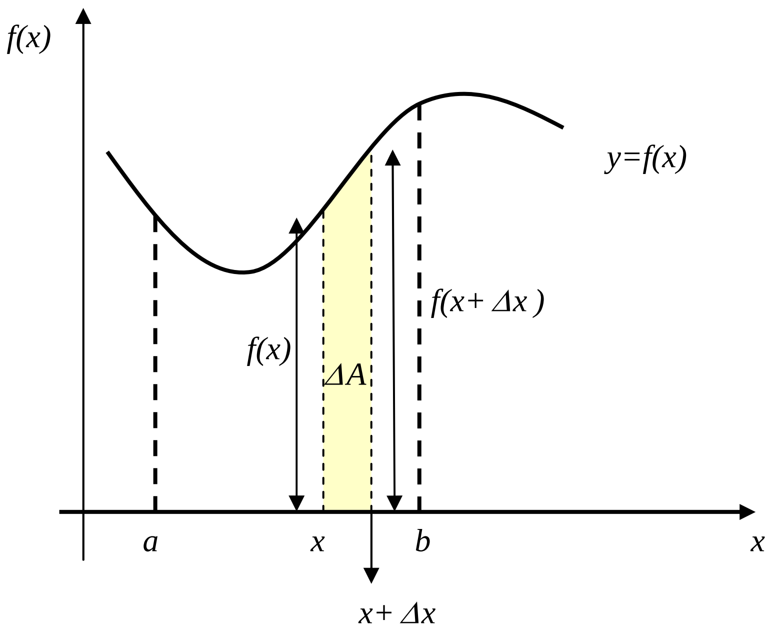
- ¿Cómo calcular el área A bajo la gráfica de f desde a hasta b suponiendo que $f(x)$ es positiva y continua?



- Sea $A(x)$ la función que mide el área bajo la curva $y=f(x)$ en el intervalo $[a, x]$.



- Puesto que f es siempre positiva en este ejemplo, $A(x)$ crece cuando x aumenta. Supongamos que hacemos crecer x en una cantidad positiva: Δx. Entonces, $A(x+\Delta x)$ es el área bajo la curva $y=f(x)$ en el intervalo $[a, x+\Delta x]$. Por tanto, $A(x+\Delta x)-A(x)$ es el área ΔA bajo la curva en el intervalo $[x, x+\Delta x]$:



- De la figura anterior deducimos que:

$$f(x)\Delta x \le A(x+\Delta x)-A(x) \le f(x+\Delta x)\Delta x \Leftrightarrow$$

$$f(x) \le \frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x} \le f(x+\Delta x).$$

Si $\Delta x \to 0$, entonces se tiene que:

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x}=A'(x), \quad \forall x\in(a,b).$$

Por tanto, $A'(x)$, es decir, la derivada del área *A*(*x*), es la función *f*(*x*), es decir, la altura de la curva.

- Supongamos que $F(x)$ es otra función continua con derivada $f(x) \Rightarrow F'(x) = A'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$.
  Como $\frac{d\left[A(x) - F(x)\right]}{dx} = A'(x) - F'(x) = 0$, debe verificarse que $A(x)=F(x)+C$, para una cierta constante C, ya que si la función $A(x) - F(x)$ tiene como derivada cero, es porque $A(x) - F(x) = C$. Sabemos que $A(a)=0$; por tanto, $A(a) - F(a) = C \Rightarrow C = -F(a)$.

En definitiva,

$$A(x) = F(x) - F(a) \text{ cuando } F'(x) = f(x)$$

- Método para hallar el área bajo la curva $y = f(x)$ y sobre el eje x, desde $x = a$ hasta $x = b$:
  1. Hallar una función arbitraria F que sea continua en $[a, b]$ tal que $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$.
  2. El área buscada será $F(b)$-$F(a)$.

- Se lama ANTIDERIVADA de f a toda función F tal que $F'(x) = f(x)$ para todo x en un intervalo abierto.
  Nótese que siempre hay infinitas antiderivadas de f porque
  $\frac{d\left[F(x) + C\right]}{dx} = F'(x) = f(x)$, para toda constante $C \in \mathbb{R}$.

- ¿Qué ocurre si $f(x)$ tiene valores negativos en $[a, b]$? Dado que queremos que el área sea una región siempre positiva, si $f(x) \le 0 \quad \forall x \in [a,b]$, el área comprendida entre la gráfica y el eje x y limitada entre los puntos a y b será $-[F(b) - F(a)]$.

- **INTEGRALES INDEFINIDAS.** Aunque El nombre de antiderivada es muy apropiado, seguiremos la práctica tradicional y llamaremos a F un **integral indefinida** de *f*. Se usa el símbolo $\int f(x)\,dx$ para designar una integral indefinida de *f*. Por tanto,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \text{cuando} \quad F'(x) = f(x).$$

- **Integrales inmediatas**

1. $\int dx = x + C$
2. $\int a\,dx = a\int dx = ax + C, \quad a$ es una constante en $\mathbb{R}$
3. $\int (dx + dy) = \int dx + \int dy$
4. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
5. $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
8. $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$
9. $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$
10. $\int \sec^2(x) dx = tg(x) + C$

11. $\int \operatorname{cosec}^2(x)dx = -\operatorname{cotg}(x) + C$

12. $\int \sec(x)\ \operatorname{tg}(x)\ dx = \sec(x) + C,$

13. $\int \operatorname{cosec}(x)\ \operatorname{cotg}(x)\ dx = -\operatorname{cosec}(x) + C$

14. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$

15. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos(x) + C$

16. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg}(x) + C$

17. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = -\operatorname{arccotg}(x) + C$

18. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \begin{cases} \operatorname{arcsec}(x) + C, & x > 0 \\ -\operatorname{arcsec}(x) + C, & x < 0 \end{cases}$

19. $\int \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \begin{cases} -\operatorname{arccosec}(x) + C, & x > 0 \\ \operatorname{arccosec}(x) + C, & x < 0 \end{cases}$

- **Problemas con valores iniciales**

Como ya hemos visto existen infinitas integrales indefinidas de una función dada. Por ejemplo, la derivada de $\frac{1}{5}x^5 + C$ es x^4 sea cual sea la constante C. Las gráficas de estas funciones son traslaciones unas de otras en la dirección del eje y. Dado un punto arbitrario (x_0, y_0), existe una y sólo una de esas curvas que pasa por (x_0, y_0).

Ejercicio: Calcule todas las funciones $F(x)$ tales que

$$F'(x) = -\left(x-1\right)^2.$$

Dibuje algunas de sus gráficas en el plano xy, y halle la función cuya gráfica pasa por el punto $(x_0,\ y_0)$=(1, 1).

- **La integral definida**

Sea f una función continua definida en el intervalo [a, b] y con derivada $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$. La diferencia $F(b) - F(a)$ se llama la **integral definida** de f en [a, b]. La designamos por

$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{integrando}}\ dx$, donde a es el límite superior de integración y

b es el límite inferior de integración.

Nótese que:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(z)\ dz = \int_a^b f(\theta)\ d\theta$$

es decir, x es una *variable muda.*

- **Definición de la integral definida**

$$\int_a^b f(x)\ dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(x)\Big|_a^b = \ \Big|_a^b F(x) = F(b) - F(a)$$

donde $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$.

- **Propiedades de la integral definida**

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$
3. $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx, \quad \alpha$ es una constante arbitraria
4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$ donde $c \in (a,b)$
5. $\int_a^b \left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx,$

   α y β son constantes arbitrarias

Observaciones adicionales

6. $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$
7. $\int F'(x)dx = F(x) + C$
8. $\int_a^t f(x)dx = F(x)\Big|_a^t = F(t) - F(a); \quad \frac{d}{dt}\left[\int_a^t f(x)dx\right] = F'(t) = f(t)$
9. $\int_t^b f(x)dx = F(x)\Big|_t^b = F(b) - F(t); \quad \frac{d}{dt}\left[\int_t^b f(x)dx\right] = -F'(t) = -f(t)$
10. $\frac{d}{dt}\left[\int_{a(t)}^{b(t)} f(x)dx\right] = f\left(b(t)\right) b'(t) - f\left(a(t)\right) a'(t)$
11. $\frac{d}{dt}\left[\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx\right] = f\left(b(t),t\right) b'(t) - f\left(a(t),t\right) a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dx$

- **Las funciones continuas son integrables**

Teorema: Si f es una función continua en [a, b], existe una función $F(x)$ derivable en [a, b], tal que $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$.

- **La integral de Riemann**

El tipo de integral que acabamos de estudiar, basada en la antiderivada, se llama la *integral de Newton–Leibniz* (N—L). Los matemáticos estudian otros tipos de integrales. Todos ellos dan el mismo resultado que la integral de (N—L) en el caso de funciones continuas. Damos un breve apunte de la llamada *integral de Riemann*. La idea de la definición está estrechamente relacionada con el método de exhaución que describimos en la introducción a este capítulo.

Sea f una función *acotada* en el intervalo $[a,b]$ y n un número natural. Subdividamos $[a,b]$ en n partes tomando puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Pongamos $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, y elijamos un número arbitrario ξ_i en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ (hacer una figura). La suma

$$f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \cdots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}$$

se llama una *suma de Riemann* asociada a la función f. Esta suma dependerá no sólo de f sino también de la subdivisión y de la elección de los ξ_i. Supongamos que, cuando n tiende a infinito y, simultáneamente, el mayor de los números $\Delta x_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_{n-1}$ tiende a 0, existe el límite de la suma. Entonces f se llama *integrable Riemann* o *R–integrable* en el intervalo $[a,b]$ y se escribe

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

El valor de la integral es independiente de la elección de los ξ_i. Se puede probar que toda función continua es R–integrable y que la R–integral se calcula por la fórmula (10.12) en este caso. Así, la integral de (N—L) y la R–integral coinciden para las funciones continuas.