EXAMEN DE MATEMATICAS I (Puntuación: 0.8 puntos cada apartado)

1) Sea $x = f(L) = L + 8L^{1/2}$ la cantidad producida de bien X cuando se emplean L unidades de trabajo. La cantidad contratada de trabajo depende del salario w y viene dada por $L = g(w)$. Actualmente, cuando $w_0 = 10$ se contratan $L_0 = 4$ unidades de trabajo. Se sabe, además, que $g'(10) = -2$. Si el salario aumenta en un 5%,
a) ¿Qué repercusión tiene sobre la cantidad contratada de trabajo?
b) ¿Qué repercusión tiene sobre la cantidad producida de bien X?

---

2) Halle el polinomio de Taylor de grado 2 de la función

$$f(x) = 4 + (x^2 + 1)\ln(2x + 1)$$

en el punto $x_0 = 0$ y úselo para calcular aproximadamente $f(0.2)$.

---

3) Considere los problemas de optimización

$$\begin{array}{r} \text{min y max}_x \ 2x - 4x^{3/4} \\ 0 \leq x \leq 16 \end{array}$$

a) Encuentre los intervalos donde es creciente o decreciente la función objetivo, y dónde es cóncava o convexa. ¿Puede garantizarse la existencia de mínimo y máximo global para este problema?
b) Halle, suponiendo que existan, todos los mínimos y máximos justificando si se trata de óptimos locales o globales.

---

4) La cantidad producida de bien Y es

$$y = f(p, w) = \frac{4p^2 - 8w}{w}$$

donde p es el precio del bien y w es el precio del factor empleado.
a) Halle el dominio natural de definición de $f(p, w)$ y represéntelo gráficamente.
b) ¿Es cierto que el aumento en la cantidad producida al aumentar p es mayor cuando w es bajo que cuando es alto?
c) Halle la elasticidad de Y respecto de p cuando $p_0 = 4$ y $w_0 = 2$. ¿Es cierto que el porcentaje en el cual aumenta la cantidad producida de Y al aumentar p es mayor que el porcentaje en el que aumenta el precio p? Si p aumenta en un 3%, ¿cuál es la variación porcentual aproximada en y?

---

5) En una economía existen dos bienes, x e y, que se consumen en cantidades no negativas. Hay un consumidor cuya función de utilidad viene dada por la función $u(x, y) = y + \sqrt{x}$.
a) Represente la curva de nivel de valor 1 y la curva de nivel que pasa por el punto $(x, y) = (1, 2)$ indicando hacia donde crece la función.
b) Si los precios de los bienes son $p_x = p_y = 1$ y renta del consumidor es $m = 1$, las cantidades (x, y) que maximizan la utilidad respetando la restricción presupuestaria son la solución del problema

$$\begin{array}{l} \text{max}_{x,y} \ y + \sqrt{x} \\ \text{s. a.} \ \left\{ \begin{smallmatrix} x+y=1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{smallmatrix} \right. \end{array}$$

Resuelve geométricamente este problema hallando las coordenadas de la solución.

---

6) La función de coste marginal de cierta empresa viene dada por

$$c(x) = \begin{cases} 2 + \frac{100}{(x+1)^2}, & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 6\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2, & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Sea $C(x)$ la función de coste y sea $C(0) = 20$ los costes fijos.
a) Calcule $C(6)$.
b) Si la empresa produce $x = 4$ unidades, ¿en cuánto aumentan los costes si pasa a producir 6 unidades?
c) Halle la función de coste $C(x)$. ¿Es $C(x)$ continua en el intervalo $(0, 10)$? Calcule, en caso de que exista, $C'(6)$