MATEMÁTICAS 1 (SOLUCIÓN FEBRERO 2011)

1) (2 puntos)
a) Sean f y g funciones derivables y sea $h(x) = f(g(x))$. Calcule $h'(1)$ sabiendo que $g(1) = 4$, $g'(1) = 2$ y $f'(4) = 3$. Diga, justificando su respuesta, si puede ser f la inversa de g. Si su respuesta a la anterior pregunta es negativa, y se cumple $g(1) = 4$, $g'(1) = 2$ diga para qué valores de $f(4)$ y $f'(4)$ puede ser f la inversa de g.
b) Sea g derivable y suponga que $g(1) = 4$ y que $g'(1) = 2$. Calcule cuál es aproximadamente $g(0.9)$.

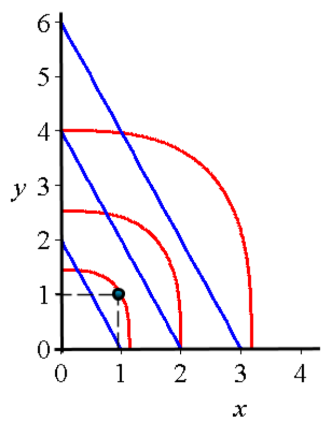
2) (2 puntos)
a) Halle el dominio de la función $f(x) = x+2\sqrt{3-x}$ indicando en qué intervalos la función es creciente y en cuáles es decreciente. Demuestra que ésta es una función cóncava.
b) Encuentre los mínimos y máximos de esta función en su dominio, indicando si se trata de óptimos locales o globales.

3) (2 puntos) Cuando se producen x e y unidades de los bienes X e Y se incurre en unos costes dados por la función

$$C(x,y) = 8\sqrt{x^2+3y}.$$

Actualmente $x_0 = 2$ e $y_0 = 4$.
a) Calcule la elasticidad del coste respecto de y en el punto $(x_0, y_0) = (2,4)$. ¿Cuál es aproximadamente la variación porcentual del coste si y aumenta en un 8%
b) Calcule aproximadamente la variación del coste si x disminuye en 1 décima e y aumenta en un 8%. ¿Es cierto que cuanto mayor sea la cantidad producida de x en mayor medida aumentan los costes al aumentar la producción de y?

4) (2 puntos)
a) En el gráfico que aparece debajo están tres curvas de nivel de la función $f(x,y) = 2x+y$ y tres curvas de nivel de la función $g(x,y) = 2x^3+y^3$. Indique cuál es el valor de cada una de esas curvas de nivel y calcule la recta tangente a la curva de nivel de g que pasa por el punto $(1,1)$.



b) Sea $h(x,y)$ una función continua. ¿Puede garantizarse que el problema

$$\min \text{ y } \max \; h(x,y)$$
$$s.a. \begin{cases} 2x+y=4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

tiene mínimo y máximo global? Resuelva gráficamente el problema anterior cuando $h(x,y) = 2x^3+y^3$, encontrando los óptimos globales. Indicación: en el gráfico del apartado anterior tiene dibujadas algunas curvas de nivel de h.

5) (2 puntos) El coste marginal de producir x unidades de un bien es

$$CMg(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ 75 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

El coste de no producir es cero.
a) ¿Cuál es el coste total de producir 4 unidades? Dibuje la función de coste marginal y represente en ese gráfico el recinto cuya área es el coste total de producir 4 unidades.
b) ¿En cuánto se incrementa el coste cuando se pasa de producir 4 unidades a producir 7 unidades?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

a) $h'(1) = f'(g(1))g'(1) = f'(4)g'(1) = 3 \cdot 2 = 6$. No pueden ser inversas porque si lo fueran $h(x) = x$ y entonces $h'(x) = 1$ para todo x. Para que pudieran ser inversas tendría que cumplirse $f(4) = 1$ y $f'(4) = \frac{1}{2}$.
b) Tomamos la función lineal que mejor aproxima a g cerca del punto 1 (desarrollo de Taylor de primer orden) y entonces: $g(0.9) \sim g(1) + g'(1)(-0.1) = 4 + 2(-0.1) = 3.8$

EJERCICIO 2

a) El dominio D incluye a todos los x para los que $3 - x \geq 0$ luego $D = (-\infty, 3]$. Para estudiar dónde es creciente y dónde decreciente analizamos el signo de su derivada:

$$f'(x) = 1 - (3-x)^{-1/2} \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{(3-x)^{1/2}} \leq 1 \Longleftrightarrow 3 - x \geq 1 \Longleftrightarrow x \leq 2$$

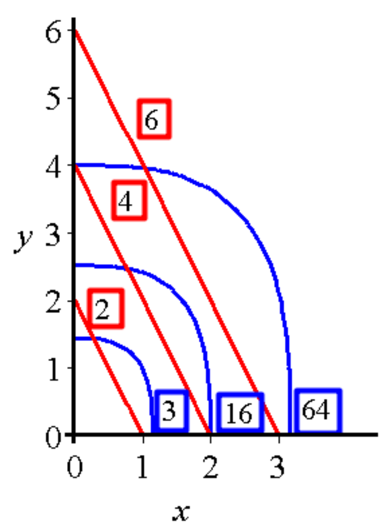
Por tanto es creciente en $(-\infty, 2]$ y decreciente en $[2, 3]$.
Calculando f'' comprobamos que es negativa en todo punto donde está definida ($f''(x) = -\frac{1}{2}(3-x)^{-3/2} < 0$) y por tanto es una función cóncava.
b) El único punto crítico es $x = 2$, que al ser la función cóncava es un máximo global. Obviamente $x = 3$ es un mínimo (la función a su izquierda está decreciendo). Es local pues por ejemplo $f(-6) = -6 + 6 = 0 < f(3) = 3$ (puede verse también diciendo que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$).

EJERCICIO 3

a) $C'_y(x,y) = \frac{8\cdot 3}{2\sqrt{x^2+3y}} \Rightarrow C'_y(2,4) = \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow \varepsilon_y(2,4) = \frac{C'_y(2,4)}{C(2,4)}4 = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} \Rightarrow \Delta\%C \sim \varepsilon_y(2,4)\Delta\%y = 3$ luego aumenta un 3%.
b) $C'_x(x,y) = \frac{8\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+3y}} \Rightarrow C'_x(2,4) = 4$ y por tanto $\Delta C \sim C'_x(2,4)(-0.1) + C'_y(2,4)\frac{8}{100}4 = -0.4 + 0.96 = 0.56$
En la última parte nos preguntan si $C''_{y,x}(2,4) > 0$, que es falso pues $C''_{y,x}(x,y) = -24x(x^2+3y)^{-3/2}$ luego $C''_{y,x}(2,3) < 0$

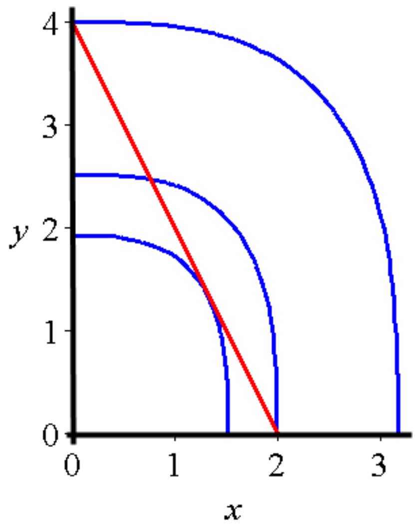
EJERCICIO 4

a) En el gráfico aparecen los valores de cada una de las curvas de nivel, en rojo las correspondientes a la función lineal, y en azul los correspondientes a la función cúbica. Para hallarlos hemos evaluado la función en alguno de los puntos de la curva de nivel. Para la lineal hemos evaluado en (0,2), (0,4) y (0,6) respectivamente y hemos comprobado que el valor de f en esos puntos es 2, 4 y 6 respectivamente. Para la función cúbica hemos evaluado en $(1,1), (2,0)$ y $(0,4)$ respectivamente hallando que los valores de esas curvas de nivel son 3, 16 y 64.



La pendiente de una curva de nivel en arbitraria de g en el punto (x,y) es $m = -\frac{g'_x(x,y)}{g'_y(x,y)} = -\frac{6x^2}{3y^2} = -\frac{2x^2}{y^2}$ y entonces la de la curva de nivel que pasa por $(1,1)$ en el punto $(1,1)$ es $m = -2$. Su recta tangente pasa por ese punto y tiene esa misma pendiente, luego su ecuación es $y - 1 = -2(x-1) \Longrightarrow y = -2x + 3$
b) Si h es una función continua, dado que el conjunto de soluciones factibles es compacto (cerrado y acotado) podemos garantizar

por el teorema de Weierstrass que existe minimo y máximo global.
En el gráfico debajo se ha representado el conjunto de soluciones factibles y tres de las curvas de nivel de la función g. Vemos que la curva de nivel de valor más bajo que interseca al conjunto de soluciones factibles es la que es tangente a la restricción, y por tanto el mínimo global es el punto de tangencia. Vemos gráficamente que la curva de nivel de valor más alto con intersección en el conjunto de soluciones factibles es la que pasa por el punto $(0,4)$ y por tanto éste es un máximo global. Aunque no se pide es inmediato ver que la curva de nivel que pasa por el punto $(2,0)$ es la de valor más alto "cerca" del punto $(2,0)$ y por tanto éste es un máximo local.

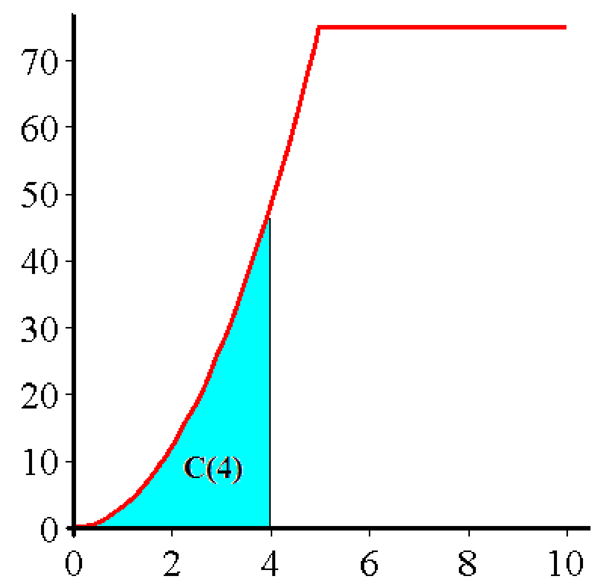


Las coordenadas del punto de tangencia se hallan igualando la pendiente de la función objetivo y la de la restrición. La de la función objetivo la hemos hallado antes, y la de la restricción es -2. Por tanto

$$-\frac{2x^2}{y^2} = -2 \Longrightarrow x^2 = y^2$$

y como estamos en el primer cuadrante obtenemos $x = y$. Sustituyendo en la restricción obtenemos $3x = 4$ y por tanto el punto de tangencia es el punto $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$.
Puesto que se cumple Weierstrass y sabemos que existe máximo y mínimo global, si no fueramos capaces de resolver gráficamente como se pide, lo que haríamos es hallar el punto de tangencia, los puntos "extremos o esquina" (que en nuestro caso son el $(0,4)$ y el $(2,0)$) y evaluaríamos la función objetivo en esos tres puntos: $f(4/3, 4/3) = \frac{64}{9}$, $f(0,4) = 64$ y $f(2,0) = 16$, y por tanto el primero es el mínimo global y el segundo el máximo global.

EJERCICIO 5
a) $C(4) = C(0) + \int_0^4 3x^2 dx = \left. x^3 \right|_0^4 = 64$



b) $C(7) - C(4) = \int_4^7 CM_g(x)dx = \int_4^5 3x^2 dx + \int_5^7 75 dx = \left. x^3 \right|_4^5 + 150 = 125 - 64 + 150 = 275 - 64 = 211$