INTEGRALES IMPROPIAS

- Hasta ahora hemos estudiado la integral de Riemann de una función f acotada y definida en un intervalo cerrado y acotado [a, b], con $a, b \in \mathbb{R}$. Ahora generalizamos este concepto.

1. Integral de una función acotada, definida en un intervalo no acotado (**Integral impropia de 1ª especie**). Ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ en } [1, \infty)$$

2. Integral de una función no acotada, definida en un intervalo acotado (**Integral impropia de 2ª especie**). Ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ en } (0, 1]$$

3. Integral de una función no acotada, definida en un intervalo no acotado (**Integral impropia de 1ª y 2ª especie**). Ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ en } (0, \infty) \Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{x}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx}_{1^{\text{a}} \text{ especie}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx}_{2^{\text{a}} \text{ especie}}$$

- **Definición**: Sea f una función acotada definida en el intervalo $[a,\infty)$, $a \in \mathbb{R}$. Si para todo $b>a$ la función es integrable en $[a, b]$ y además es finito el límite $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx < \infty$, se dice que existe la integral impropia de f en $[a,\infty)$ y es convergente.

Ejemplo:

$$f(x)=\frac{1}{x^2} \quad \text{en} \quad [1,\infty);$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-x^{-1}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}+1\right]=1$$

- **Definición**: Sea f una función acotada definida en el intervalo $(-\infty,b]$, $b \in \mathbb{R}$. Si para todo $a<b$ la función es integrable en $[a, b]$ y además es finito el límite $\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx < \infty$, se dice que existe la integral impropia de f en $(-\infty,b]$ y es convergente.
- **Definición**: Sea f una función acotada definida en el intervalo $(-\infty,\infty)$. Si para todo $a<b$ la función es integrable en $[a, b]$ y además son finitos los límites $\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx < \infty$ y $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx < \infty$, se dice que existe la integral impropia de f en $(-\infty,\infty)$ y es convergente, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)\,dx < \infty$$

- **Observación:**

Si existe $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} f(x)\,dx}_{\text{Valor Principal en sentido de Cauchy}}$

La implicación contraria no se da.

Condiciones para la existencia de la integral impropia de 1ª especie:

a) **Condición necesaria**: Si existe (converge) $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

b) **Condición necesaria y suficiente**: si f es una función acotada definida en $[a,\infty)$, $a \in \mathbb{R}$ e integrable en $[a,\ b]$ $\forall b \geq a$, con función primitiva F tal que $\lim_{b\to\infty} F(b) = k < \infty$, entonces $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente y

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = k - F(a)$$

- **Criterios de Comparación:** Si f es integrable en el intervalo $[a,\ b]$ $\forall b \geq a$, g en una función tal que $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,\infty)$, y la integral de g en $[a,\infty)$ es convergente, entonces la integral f en $[a,\infty)$ es convergente y $\int_a^{\infty} f(x)dx \leq \int_a^{\infty} g(x)dx$. Además si la integral f en $[a,\infty)$ es no convergente, entonces la integral de g en $[a,\infty)$ no es convergente.

Ejemplo:

$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2(1+e^x)}dx$ es convergente para todo $x \geq 2$ ya que

$$0 \leq \frac{1}{x^2(1+e^x)} \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{y} \quad \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^{b} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-x^{-1}\right]_2^b = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo:

$\int_1^{\infty} \frac{x+2}{2x^{5/3}}dx$ es divergente para todo $x \geq 1$ ya que

$$\frac{x+2}{2x^{5/3}} > \frac{x}{2x^{5/3}} = \frac{1}{2}x^{-2/3} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}\int_1^{\infty} x^{-2/3}dx = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[3x^{1/3}\right]_1^b = \infty.$$

Ejercicio: Estudie para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ es convergente la integral de la función $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ en el intervalo $[a, \infty)$, con $a > 0$.

- **Integrales impropias de 2ª especie**

Definición: Sea f una función definida en $(a, b]$ y supóngase que f es integrable en $[a+\varepsilon, b] \quad \forall \varepsilon > 0$. Si existe y es finito el límite $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx < \infty$, se dice que existe la integral impropia de f en $(a, b]$ y es convergente.

Análogamente:

- La integral de una función f no acotada en el intervalo $[a, b)$ se define como el límite (cuando existe y es finito): $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$.

- Si la función f no está acotada en $c \in [a, b]$, entonces se define

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

Teorema: Sea f una función definida en $(a, b]$ que tiene función primitiva F. Entonces si $\lim_{\varepsilon \to 0^+} F(a+\varepsilon) = k$ se verifica que $\int_a^b f(x)dx$ es convergente y además

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - k$$

Ejercicio: Estudie la convergencia de:

$$f(x) = \ln(x), \quad x \in (0,1]$$

y de:

$$g(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \in [-2,3]$$

- **Criterios de comparación:**

Si la función *f* es integrable en $[a+\varepsilon, b]\ \forall \varepsilon > 0,\ a+\varepsilon < b$ y *g* es una función tal que $0 \leq f(x) \leq g(x)\ \ \forall x \in (a,b],$ se tiene que:

a) Si la integral de *g* es convergente entonces la integral de *f* es convergente y

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

b) Si la integral de *f* es no convergente entonces la integral de *g* es no convergente.

INTEGRALES EULERIANAS

- **Definición:** Se define la función ***Gamma*** de parámetro p como la integral:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$$

- **Proposición:** ***Existencia*** $\Rightarrow$ Si p>0, la integral $\Gamma(p)$ es convergente.

Demostración:

Sea el intervalo $(0,\infty) = (0,1) \cup [1,\infty)$.

1) Sea $f(x) = e^{-x} x^{p-1}$, definida en (0,1);

entonces como $0 \le \dfrac{1}{e^x x^{1-p}} \le \dfrac{1}{x^{1-p}}$, basta con demostrar

que es convergente la integral en (0,1) de la función $\dfrac{1}{x^{1-p}}$

para $p > 0$, para concluir que también será convergente

la integral en (0,1) de la función $\dfrac{1}{e^x x^{1-p}}$ para $p > 0$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1-p}} dx = \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \left[\dfrac{1}{p} x^p \right]_\varepsilon^1 = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p} \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^p = \begin{cases} \dfrac{1}{p}, & \text{si } p > 0 \\ -\infty, & \text{si } p < 0 \end{cases} \\ \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \left[\ln x \right]_\varepsilon^1 = -\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \ln \varepsilon = \infty, \ \text{si } p = 0 \end{cases}$$

Por tanto, para p>0 será convergente $\int_0^1 e^{-x} x^{p-1} dx$.

2) Sabemos que $\forall x \in [1,\infty): 0 \le x^{p-1}e^{-x} = \dfrac{x^{p+1}}{e^x}\dfrac{1}{x^2} \le \dfrac{1}{x^2}\ \forall p$

Como $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-x^{-1}\right]_1^{b} = 1,$

entonces $\displaystyle 0<\int_1^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx < 1,\ \forall p.$

En definitiva, de 1) y de 2) se tiene que $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ es convergente para $p>0$.

- **Propiedades:**

1) $\Gamma(1) = 1$
2) $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1),\quad p>1$
3) Si $p \in \mathbb{N}$ y $p \ge 2 \Rightarrow \Gamma(p) = (p-1)!$
4) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

- **Definición:** Se define la función ***beta*** de parámetros p y q como:

$$\beta(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\,,$$

y es convergente para $p>0,\ q>0$

- **Propiedades:**

1) $\beta(p,q)=\beta(q,p)$
2) $\beta(1,q)=1/q$
3) $\beta(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\dfrac{q\text{ -}1}{q}\beta(p+1,q-1),\quad \forall p>0,q>1$
4) $\beta(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$
5) $\beta(p,q)=2\int_0^{\pi/2}\left[\sin(\theta)\right]^{2p-1}\left[\cos(\theta)\right]^{2q-1}d\theta,\ \forall p,q>0$

INTEGRALES DOBLES

(apuntes extraídos de Moisés Villena)

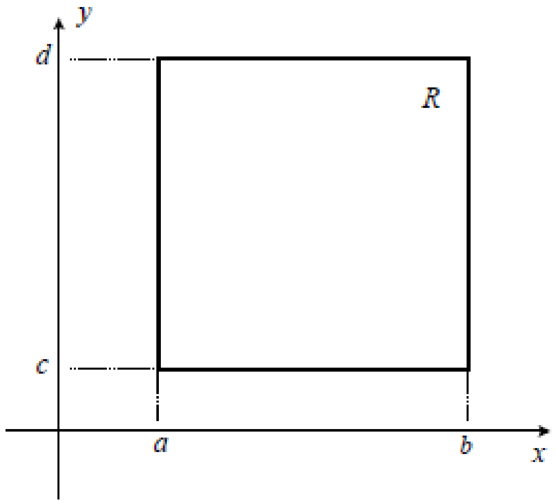
Definición

La integral definida para funciones de una variable se la definió de la siguiente manera:

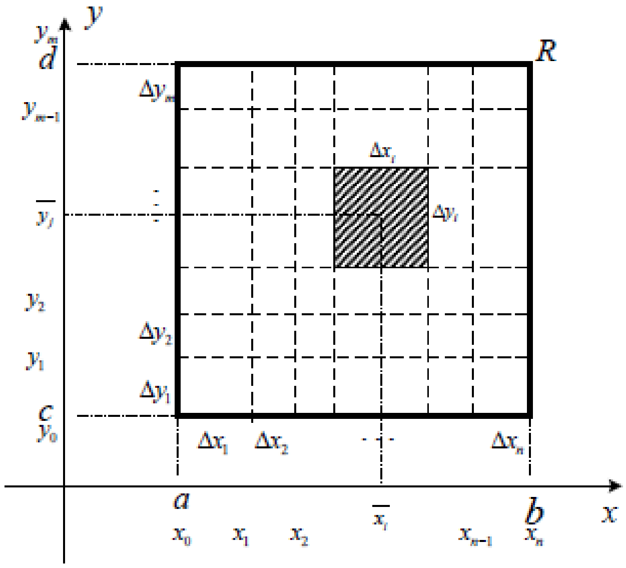
$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f\left(\bar{x}_i\right)\Delta x_i\right]$$

La cual se llama Integral (Suma) de Riemann, que significa el área bajo la curva $y = f(x)$ en un intervalo $[a,b]$.

Si quisiéramos obtener una Integral definida para una función de dos variables; primero deberíamos suponer que ahora la región de integración sería de la forma $[a,b]\times[c,d]$, es decir un rectángulo de R^2, la cual la denotamos como R.



Haciendo particiones de la región R, de dimensiones no necesariamente iguales:



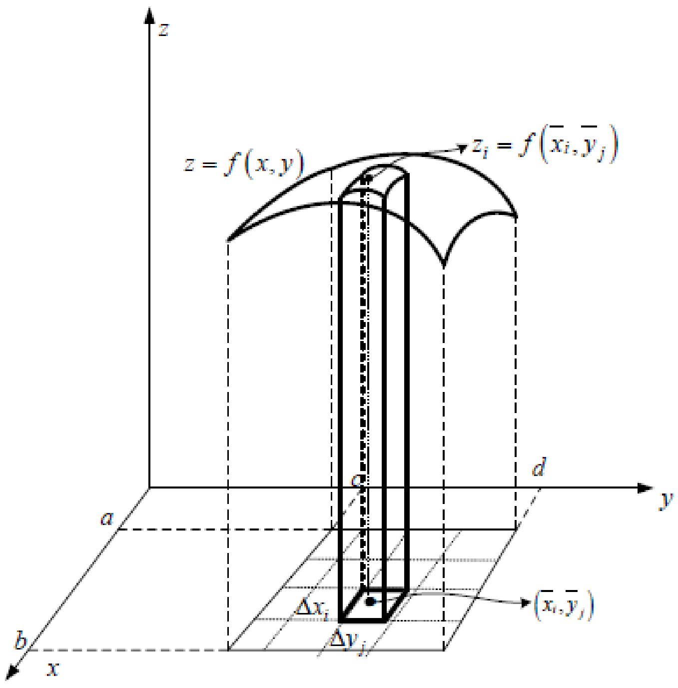
La $ij-ésima$ partición tendrá forma rectangular. Ahora cabe referirse al área de esta partición, que estaría dada por:

$$\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$$

Podemos definir una función de dos variables $z = f(x, y)$ en la región R, que para la $ij-ésima$ partición sería:

$$f\left(\overline{x}_i, \overline{y}_j\right)\Delta x_i \Delta y_j$$

Bien, veamos ahora su significado geométrico. Observe la gráfica siguiente:



El punto $\left(\overline{x}_i, \overline{y}_j\right)$, representa cualquier punto del $ij-ésimo$ rectángulo. El volumen del $ij-ésimo$ paralelepípedo, denotémoslo como ΔV_{ij}, estaría dado por:

$$\Delta V_{ij} = f\left(\overline{x}_i, \overline{y}_j\right)\Delta x_i \Delta y_j .$$

Por tanto, si deseamos el volumen bajo la superficie, tendríamos que hacer una suma de volúmenes de una cantidad infinita de paralelepídedos, es decir:

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x}_i, \overline{y}_j\right)\Delta x_i \Delta y_j$$

De aquí surge la definición de integral doble:

Sea f una función de dos variables definida en la región plana

$$R=[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)/a\le x\le b\wedge c\le y\le d\}$$

Al $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\overline{x}_i,\overline{y}_j\right)\Delta x_i\Delta y_j$ se le denomina la ***Integral Doble*** de f en R y se la denota de la siguiente manera:

$$\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy$$

Además, si existe este límite decimos que f es integrable en R.

TEOREMA DE INTEGRABILIDAD

Sea f una función de dos variable definida en la región plana $R=[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)/a\le x\le b\wedge c\le y\le d\}$

Si f está acotada en R y si f es continua en R a excepción de un número finito de curvas suaves, entonces f es integrable en R.

TEOREMA FUBINI

Sea f una función de dos variable definida en la región plana $R=[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)/a\le x\le b\wedge c\le y\le d\}$. Si f es continua en R, entonces:

$$\iint_R f(x,y)dA=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$$
$$=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$$

Ejemplo

Calcular $\int_0^1\int_{-1}^2 xy^2dydx$

SOLUCIÓN:

Por el teorema de Fubini, integrando desde adentro hacia afuera, es decir:

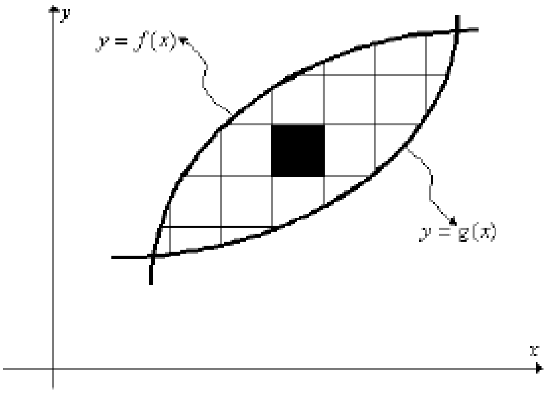
$$\int_0^1\left[\int_{-1}^2 xy^2dy\right]dx=\int_0^1\left[x\frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{3}\right]dx=\int_0^1\left[x\frac{2^3}{3}-x\frac{(-1)^3}{3}\right]dx$$
$$=\int_0^1\left[\frac{8}{3}x+\frac{1}{3}x\right]dx=\int_0^1 3xdx=3\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{3}{2}$$

Aquí pudimos haber integrado con respecto a x , y luego con respecto a y igualmente. Hágalo como ejercicio.

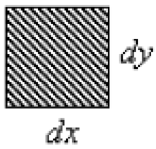
Integrales dobles sobre regiones generales:

El teorema de Fubini puede ser extendido para regiones generales.

En adelante vamos a hacer planteamientos directos. Una región plana, como la que se muestra en la figura, puede ser particionada de la siguiente manera:



Lo cual da a lugar un elemento diferencial de la forma:



Cuya área, denotada como dA, está dada por:

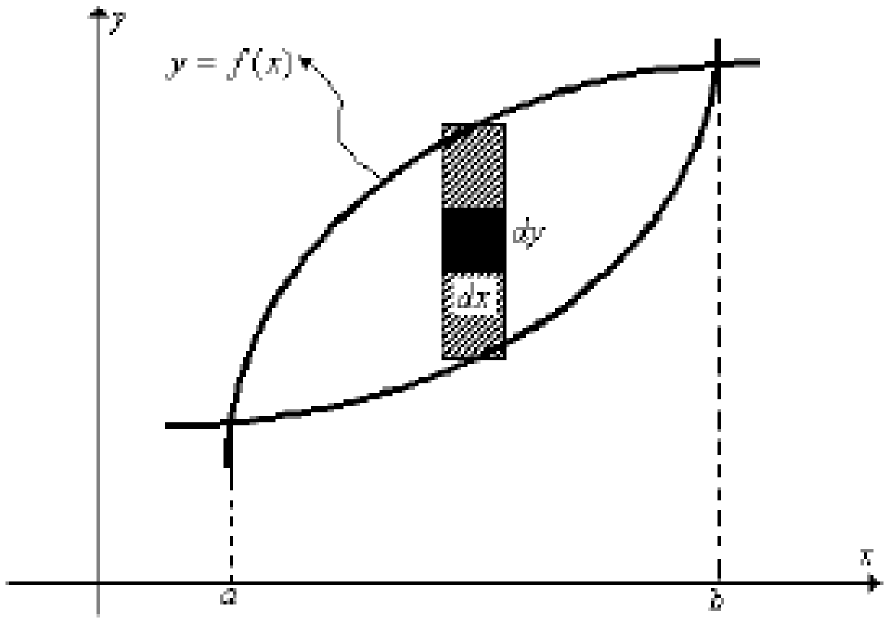
$$dA = dxdy = dydx$$

Entonces, igual como lo habíamos mencionado anteriormente, una integral doble sobre la región plana R tiene la forma:

$$\iint_R f(x, y)dA$$

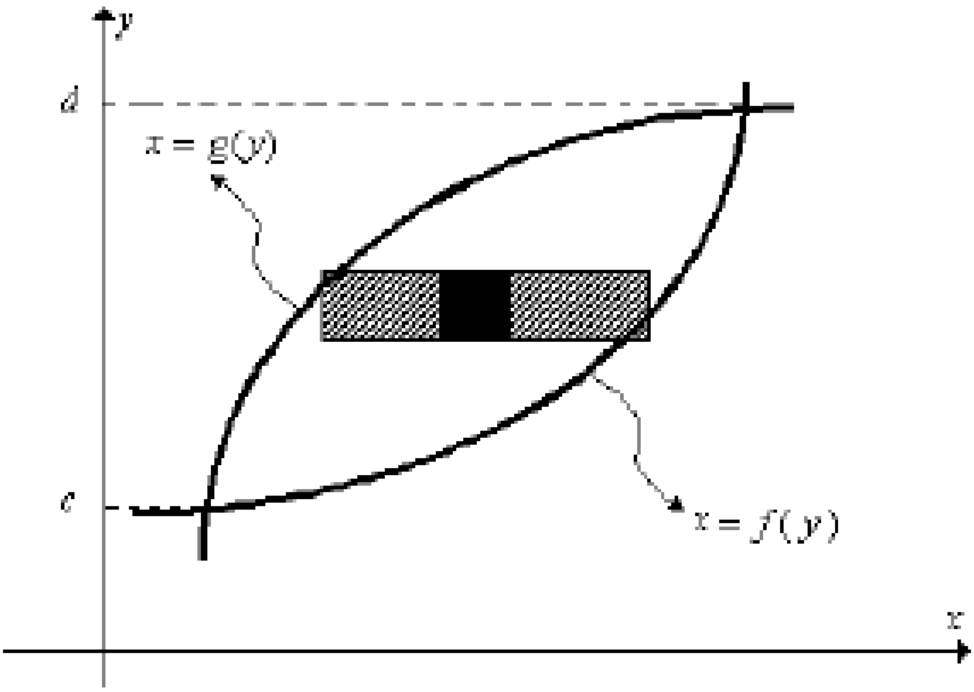
Esta integral doble puede ser calculada de dos maneras:

1) Haciendo un barrido vertical:



$$\int_{x=a}^{x=b}\left[\int_{y=g(x)}^{y=f(x)} f(x,y)\,dy\right]dx$$

2) Haciendo un barrido horizontal:



$$\int_{y=c}^{y=d}\left[\int_{x=g(y)}^{x=f(y)} f(x,y)\,dx\right]dy$$

Ejemplo 1

Calcular $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 160xy^3\,dy\,dx$

SOLUCIÓN:
Integrando desde adentro hacia afuera, tenemos:

$$\int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 160xy^3 dy\right] dx = \int_0^1 \left[160x \left.\frac{y^4}{4}\right|_{x^2}^{\sqrt{x}}\right] dx = \int_0^1 \left[40x\left(\sqrt{x}\right)^4 - 40x\left(x^2\right)^4\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[40x^3 - 40x^9\right] dx = \left.\left(40\frac{x^4}{4} - 40\frac{x^{10}}{10}\right)\right|_0^1 = 10 - 4 = 6$$

Ejemplo 2

Calcular $\int_0^1 \int_0^y y^2 e^{xy}\,dx\,dy$

SOLUCIÓN:
Integrando desde adentro hacia afuera, tenemos:

$$\int_0^1 \left[\int_0^y y^2 e^{xy} dx\right] dy = \int_0^1 \left[y^2 \left.\frac{e^{xy}}{y}\right|_0^y\right] dy = \int_0^1 \left[ye^{yy} - ye^{(0)y}\right] dy$$

$$= \int_0^1 \left[ye^{y^2} - y\right] dy = \int_0^1 ye^{y^2} dy - \int_0^1 y dy$$

$$= \left.\left(\frac{e^{y^2}}{2} - \frac{y^2}{2}\right)\right|_0^1 = \left(\frac{e^{1^2}}{2} - \frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{e^{0^2}}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \frac{e}{2} - 1$$

Ejemplo 3

Calcular $\int_0^1 \int_{1-y}^1 e^y dxdy$

SOLUCIÓN:

Integrando desde adentro hacia afuera, tenemos:

$$\int_0^1 \left[\int_{1-y}^1 e^y dx \right] dy = \int_0^1 e^y \left[\int_{1-y}^1 dx \right] dy = \int_0^1 \left[e^y x \right]_{1-y}^1 dy$$

$$= \int_0^1 e^y (1-(1-y))dy = \int_0^1 ye^y dy$$

La última integral, se la realiza POR PARTES:

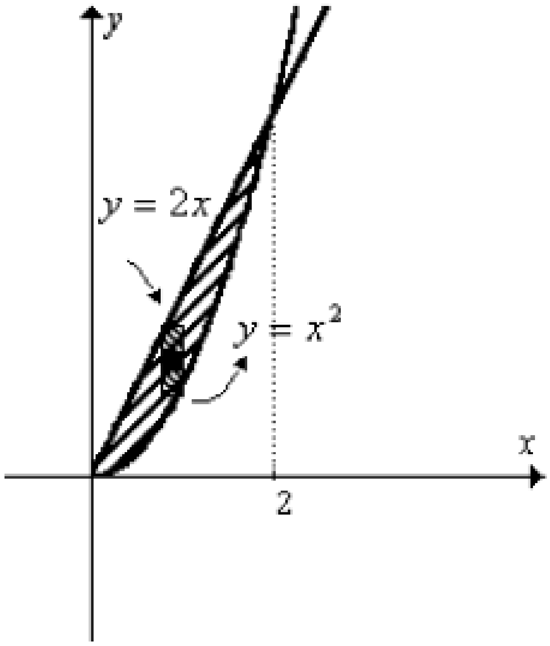
$$\int_0^1 \underbrace{y}_{u} \underbrace{e^y dy}_{dv} = \overbrace{y}^{u}\overbrace{e^y}^{v} - \int \overbrace{e^y}^{v} \overbrace{dy}^{du} = \left(ye^y - e^y \right)\Big|_0^1 = (e-e)-(0-1) = 1$$

Ejemplo 4

Calcular $\iint_R x dA$ donde R es la región limitada por $y = 2x$ y $y = x^2$

SOLUCIÓN:

Primero identificamos la región R :



Note que es una región simple-, la calcularemos de las dos formas.

PRIMER MÉTODO: Haciendo primero un barrido vertical.

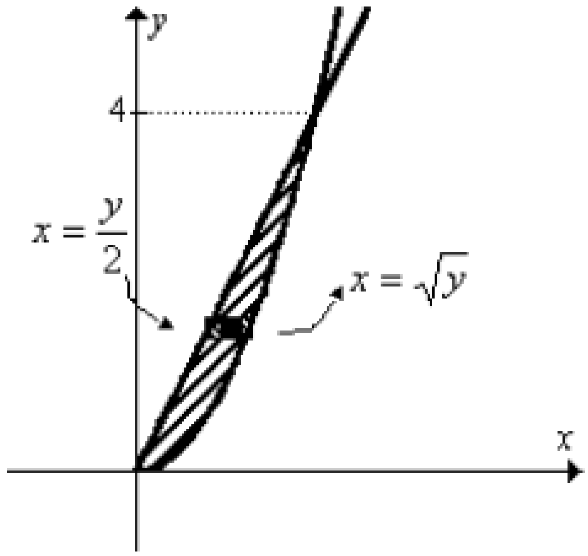
La integral doble con límites será: $\int_{0}^{2}\int_{x^2}^{2x} x\,dy\,dx$

Calculando la integral, resulta:

$$\int_{0}^{2}\left[\int_{x^2}^{2x} x\,dy\right]dx = \int_{0}^{2}\left[xy\right]_{x^2}^{2x}dx = \int_{0}^{2}\left[x(2x) - x\left(x^2\right)\right]dx$$

$$= \int_{0}^{2}\left(2x^2 - x^3\right)dx = \left(2\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$$

SEGUNDO METODO: Haciendo primero un barrido horizontal.



La integral doble con límites será: $$\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} xdxdy$$

Calculando la integral doble, resulta:

$$\int_0^4 \left[\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} xdx \right] dy = \int_0^4 \left[\left. \frac{x^2}{2} \right|_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} \right] dy = \int_0^4 \left(\frac{\left(\sqrt{y}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^2}{2} \right) dy = \int_0^4 \left(\frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} \right) dy$$

$$= \left. \left(\frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{24} \right) \right|_0^4 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

PROPIEDADES

Sean f y g funciones de dos variables continuas en una región R, entonces:

1. $\iint\limits_R k\,dA = k\iint\limits_R dA \quad ;\forall k \in \Re$

2. $\iint\limits_R (f \pm g)\,dA = \iint\limits_R f\,dA \pm \iint\limits_R g\,dA$

3. $\iint\limits_R dA = \iint\limits_{R_1} dA + \iint\limits_{R_2} dA$ donde $R = R_1 \cup R_2$

Invierta el orden de integración para $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} f(x,y)\,dy\,dx$

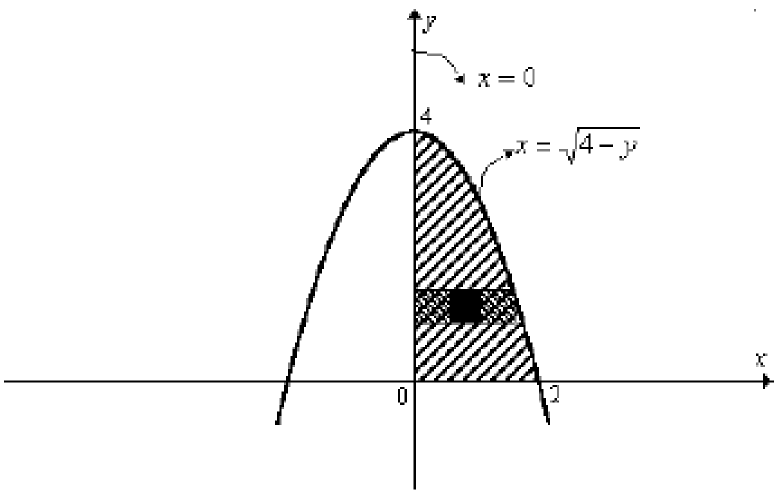
SOLUCIÓN:

Interpretando los límites de integración dados, tenemos: $\int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=4-x^2} f(x,y)\,dy\,dx$. Se ha hecho primero un barrido vertical

Entonces la región de integración es $R:\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Ahora hay que hacer un barrido horizontal primero, es decir:

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} f(x,y)\,dx\,dy$$



VALOR MEDIO PARA UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Sea f una función continua en las variables x y y. El valor Medio de f en una región plana R está dado por:

$$Valor\,Medio = \frac{\iint\limits_R f(x,y)dA}{\iint\limits_R dA}$$

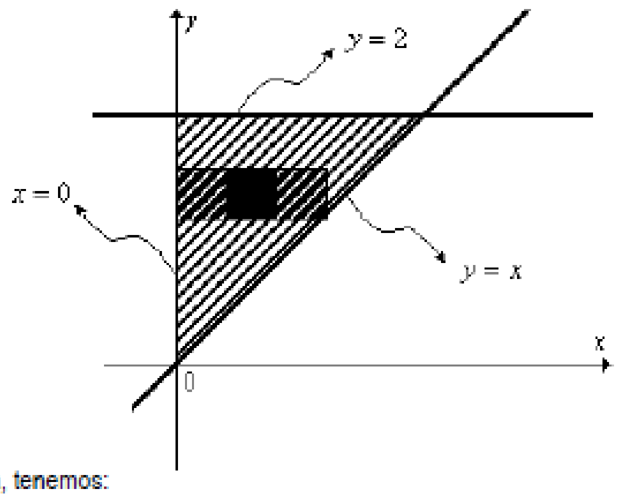
Ejemplo

Encuentre el valor medio de la función $f(x,y) = x\sqrt{1+y^3}$

sobre la región limitada por $\begin{cases} y = 2 \\ y = x \\ x = 0 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

La región de integración es:



Empleando la fórmula, tenemos:

$$Valor\ Medio = \frac{\iint_R f(x,y)\,dA}{\iint_R dA} = \frac{\int_0^2 \int_0^y x\sqrt{1+y^3}\,dx\,dy}{\int_0^2 \int_0^y dx\,dy}$$

$$= \frac{\int_0^2 \sqrt{1+y^3}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^y dy}{\int_0^2 \left.(x)\right|_0^y dy}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\int_0^2 y^2\sqrt{1+y^3}\,dy}{\int_0^2 y\,dy}$$

$$= \frac{\left.\frac{1}{2}\frac{\left(1+y^3\right)^{3/2}}{2\left(\frac{3}{2}\right)}\right|_0^2}{\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^2} = \frac{\frac{1}{6}(27-1)}{2}$$

$$= \frac{13}{6}$$