EXAMEN DE SEPTIEMBRE, MATEMÁTICAS I

DEBE CONTESTAR ÚNICAMENTE A 4 DE LOS SIGUIENTES 5 EJERCICIOS

1. **(2.5 ptos)** Sean f y g funciones con derivadas primeras y segundas continuas de las que se sabe que

$$f(3) = 5, \quad f'(3) = 2, \quad f''(3) = 3$$
$$g(5) = 9, \quad g'(5) = 4, \quad g''(5) = -1$$

Sea $h(x) = g(f(x))$.

a) Usa la regla de la cadena para calcular $h'(3)$. ¿Cuál es aproximadamente la variación porcentual en $h(x)$ si estando en $x = 3$ la variable x se incrementa un 3%?

b) Usa la regla de la cadena para demostrar que $h''(3) = 8$. Calcula el polinomio de Taylor de orden 2 para la función $h(x)$ en $x = 3$ y úsalo para calcular cuál es aproximadamente $h(3.1)$.

a) Por la regla de la cadena,

$$h'(x) = g'(f(x))\, f'(x),$$

así que evaluando en el punto dado tenemos

$$h'(3) = g'(f(3))\, f'(3) = g'(5)\, f'(3) = 4 \cdot 2 = 8.$$

Para ver la variación porcentual en $h(x)$ podemos usar la elasticidad de la función respecto a x, que viene dada por

$$E_x h(x) = \frac{x}{h(x)} h'(x). \qquad \text{En el punto } x = 3, \qquad E_x h(3) = \frac{3}{h(3)} h'(3) = \frac{3 \cdot 8}{9} = \frac{8}{3}$$

La variación porcentual de la función será aproximadamente el valor de la elasticidad multiplicado por la variación porcentual de la función,

$$\frac{8}{3} \cdot 3 = 8$$

Es decir, $h(x)$ se incrementa aproximadamente en un 8%.

b) Para calcular la derivada segunda de $h(x)$ tenemos que calcular la derivada de $h'(x)$, teniendo en cuenta que es la derivada de un producto. Para calcular la derivada de $g'(f(x))$ usamos la regla de la cadena, por lo tanto,

$$h''(x) = g''(f(x))\, f'(x)\, f'(x) + g'(f(x))\, f''(x)$$

y evaluando en el punto,

$$h''(3) = g''(f(3))\, (f'(3))^2 + g'(f(3))\, f''(3) = g''(5) \cdot 2^2 + g'(5) \cdot 3 = -1 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 8$$

El polinomio de Taylor de $h(x)$ es

$$P_2(x) = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} h''(x_0)(x - x_0)^2$$

En $x_0 = 3$ el polinomio de Taylor es

$$\begin{aligned} P_2(x) &= h(3) + h'(3)(x-3) + \frac{1}{2} h''(3)(x-3)^2 \\ &= 9 + 8(x-3) + 4(x-3)^2 \end{aligned}$$

El valor del polinomio en $x = 3.1$ es

$$P_2(3.1) = 9 + 8(3.1 - 3) + 4(3.1 - 3)^2 = 9 + 8 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.1^2 = 9.84$$

El polinomio de Taylor de orden 2 aproxima a la función $h(x)$, así que el valor aproximado de $h(3.1)$ es 9.84.

2. **(2.5 ptos)** Dado el problema de optimización $\begin{array}{ll} \text{min y max} & \frac{1}{4}x^3 + (2-x)^3 \\ s.a. & 0 \leq x \leq 4 \end{array}$

a) ¿Puede garantizarse que este problema tiene mínimo y máximo global? Estudia en qué intervalos, de su dominio de definición, la función objetivo es cóncava y en cuáles es convexa.

b) Resuelve el problema encontrando todos los óptimos locales y globales.

a) Sí, por el teorema de Weierstrass, porque estamos maximizando y minimizando en un intervalo cerrado y acotado en el que la función es continua.

Para estudiar los intervalos en los que es cóncava y convexa calculamos la derivada segunda de la función $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + (2-x)^3$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{4}x^2 + 3(2-x)^2(-1) = -\frac{9}{4}x^2 + 12x - 12 \\ f''(x) &= -\frac{9}{2}x + 12 \end{aligned}$$

Miramos a ver en qué puntos se anula la derivada segunda, para ver los intervalos en los que tenemos que mirar la concavidad y la convexidad.

$$-\frac{9}{2}x + 12 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{8}{3}$$

La derivada segunda se anula en el punto $\frac{8}{3}$, que pertenece al intervalo $[0,4]$. Tenemos por tanto dos intervalos para mirar la concavidad y la convexidad, $[0, \frac{8}{3})$ y $(\frac{8}{3}, 4]$. Para ver la concavidad y convexidad cogemos un punto de cada intervalo y evaluamos la función $f''(x)$.

En el intervalo $[0, \frac{8}{3})$ podemos coger el punto $x = 1$. En este punto, $f''(1) = \frac{15}{2} > 0$, así que la función es convexa.

En el intervalo $(\frac{8}{3}, 4)$ podemos coger el punto $x = 3$. En este punto, $f''(3) = -\frac{3}{2} < 0$, así que la función es cóncava.

b) Para hallar los óptimos locales y globales tenemos que mirar los puntos dónde se anula la derivada primera. Es una ecuación de segundo grado,

$$-\frac{9}{4}x^2 + 12x - 12 = 0$$

que tiene como soluciones $x = \frac{4}{3}$ y $x = 4$, que es justamente uno de los extremos del intervalo. Evaluando la derivada segunda,

$$\begin{aligned} f''(\frac{4}{3}) &= 6 > 0 \qquad \text{es un mínimo local} \\ f''(4) &= -6 < 0 \qquad \text{es un máximo local} \end{aligned}$$

Evaluamos además en los extremos del intervalo para ver dónde se alcanzan el máximo y em mínimo global,

$$\begin{aligned} f(0) &= 8 \\ f(\frac{4}{3}) &= \frac{8}{9} \\ f(4) &= 8 \end{aligned}$$

Tenemos entonces que el máximo valor se alcanza en los extremos del intervalo, así que en los puntos $x = 0$ y $x = 4$ se alcanza el máximo global. El mínimo global está en el punto $\frac{4}{3}$.

3. **(2.5 ptos)** Sea la función de producción Cobb-Douglas $f(x,y) = 20x^{3/4}y^{1/5}$ donde x e y son las cantidades utilizadas de los factores X e Y.

a) Calcula las productividades marginales de los factores y analiza si las productividades marginales de los factores son crecientes en x y/o en y.

b) Supón que $x_0 = 16$ e $y_0 = 1$. Si la cantidad empleada de x disminuye en un 1%, ¿cuál es aproximadamente la cantidad producida?

a) Las productividades marginales son las parciales de la función respecto de los factores, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 15x^{-1/4}y^{1/5} \quad \text{productividad marginal de } X \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 4x^{3/4}y^{-4/5} \quad \text{productividad marginal de } Y \end{aligned}$$

Analizamos ahora si las productividades marginales son crecientes o decrecientes en x y/o en y.

Productividad marginal de X:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\frac{15}{4}x^{-5/4}y^{1/5} < 0 \quad \text{decreciente en } x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 3x^{-1/4}y^{-4/5} > 0 \quad \text{creciente en } y\end{aligned}$$

Productividad marginal de Y:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 3x^{-1/4}y^{-4/5} > 0 \quad \text{creciente en } x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -\frac{16}{5}x^{-3/4}y^{-9/5} < 0 \quad \text{decreciente en } y\end{aligned}$$

b) Tenemos que $f(16,1) = 160$. La elasticidad de f respecto de x es

$$E_x f(x,y) = \frac{x}{f(x,y)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

Evaluando en $x_0 = 16$ e $y_0 = 1$, $E_x f(16,1) = \frac{3}{4}$. Si la cantidad de x disminuye en un 1%, entonces la variación porcentual de f es aproximadamente

$$\frac{3}{4} \cdot (-1) = -\frac{3}{4}$$

Es decir, f disminuye en $160 \cdot \frac{3}{4}\frac{1}{100} = \frac{6}{5}$ unidades, así que la cantidad producida ahora es $160 - \frac{6}{5}$.

Otra forma es usando la derivada primera. Sabemos que x disminuye un 1%, así que la variación en x es $\Delta x = -16 \cdot 0.01 = -0.16$. Utilizando esto, la variación en unidades de f es

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}(16,1) \cdot \Delta x = \frac{15}{2} \cdot (-0.16) = -\frac{6}{5}$$

así que llegamos al mismo resultado.

4. **(2.5 ptos)** Dada la función de dos variables $f(x,y) = y + 2ln\, x$

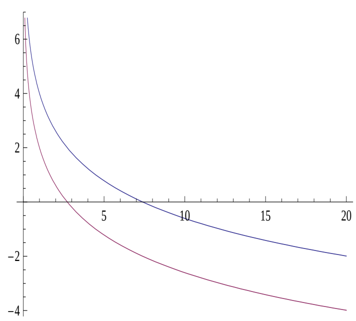
a) Representa dos de sus curvas de nivel. Si estando en el punto $(1,1)$ la variable x se incrementa en una cantidad pequeña Δx, ¿cómo debe ser Δy para que aproximadamente el valor de la función f no varíe?

b) Resuelve gráficamente el problema

$$\max_{x,y}\, y + 2ln\, x$$
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x > 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

proporcionando las coordenadas de la solución.

a) Tenemos que dibujar dos curvas $y + 2ln\, x = C$. En este caso es sencillo despejar la y, así que dibujar las curvas de nivel es equivalente a dibujar $y = C - 2ln\, x$.



En la gráfica tenemos las curvas de nivel $y + 2ln\, x = 2$ (en color rosa) y $y + 2ln\, x = 4$ (en color azul).
La variación de f, cuando nos movemos a partir del punto $(1, 1)$ viene dada por la expresión

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\Delta y$$

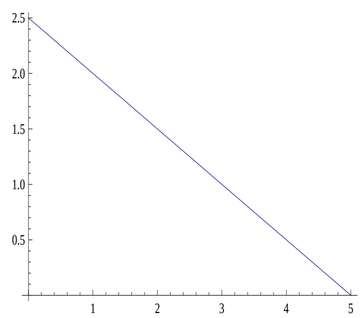
con

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1$$

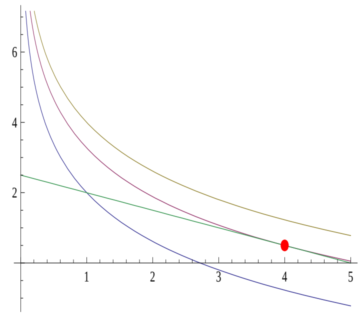
Como buscamos que f aproximadamente no varíe, estamos pidiendo $\Delta f = 0$, tenemos que resolver

$$0 = 2\Delta x + \Delta y \qquad \text{de donde } \Delta y = -2\Delta x$$

b) El conjunto en el que estamos calculando el máximo es el que viene dado por el trozo de recta que tenemos



Cuando hemos dibujado las curvas de nivel hemos podido ver que "van hacia arriba" según aumenta C, así que el máximo es el punto de tangencia entre la última curva de nivel que toca a la recta y la recta, marcado por el punto rojo.



Para calcular las coordenadas exactas utilizamos que el máximo se encuentra en el punto de tangencia de una curva de nivel de la función $f(x, y) = y + 2ln\, x$ y de la recta $g(x, y) = 5$, con $g(x, y) = x + 2y$ y que además el punto está en la recta. Por tanto,

$$\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} \Longrightarrow \frac{-\frac{2}{x}}{1} = \frac{-1}{2} \Longrightarrow x = 4$$

y como $x + 2y = 5$, entonces $y = \frac{1}{2}$.

5. **(2.5 ptos)** Calcula las siguientes integrales.

$$(a) \int_0^1 \frac{3x}{x^2+1}dx; \qquad (b) \int \frac{dx}{x(ln\, x)^4}; \qquad (c) \int (x-2)e^{-x}dx.$$

Indicación: Puedes usar el cambio de variable $t = ln\, x$ para la integral (b).

a) Utilizamos el cambio de variable $x^2+1=u$, $2x\,dx=du$. Con este cambio, ahora pasamos a integrar entre 1 y 2.

$$\int_0^1 \frac{3x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{3}{u} = \frac{3}{2}lnu|_1^2 = \frac{3}{2}ln2 - \frac{3}{2}ln1 = \frac{3}{2}ln2$$

b) Si usamos el cambio sugerido, tenemos $t = lnx$, $dt = dx/x$

$$\int \frac{dx}{x(ln\,x)^4} = \int \frac{dt}{t^4} = \frac{t^{-3}}{-3} + C = -\frac{-1}{3(ln\,x)^3} + C$$

c) Lo más sencillo es hacer la integral por partes, usando la fórmula

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

Tomamos $u = x-2$, con $du = dx$ y $e^{-x}dx = dv$ y por tanto $-e^{-x} = v$

$$\int (x-2)e^{-x}dx = -(x-2)e^{-x} + \int e^{-x}dx = -(x-2)e^{-x} - e^{-x} + C = (1-x)e^{-x} + C$$