♣ Examen de Introducción a la Econometría (LECO). ♣

Departamento de Economía Cuantitativa. Universidad Complutense de Madrid.

12 de septiembre de 2012. Duración: **2 horas**.

Apellidos:	Nombre:	DNI:
Nombre del profesor:		Grupo:

No desgrape las hojas de este cuadernillo. El examen está compuesto por diez preguntas tipo test y diez cuestiones cortas. Responda a las preguntas tipo test en la plantilla de esta página. Las cuestiones tipo test suman tres puntos si la respuesta es correcta, restan un punto si es incorrecta y cero puntos si se deja en blanco. Debe obtener al menos 2 puntos sobre 5 en cada parte para poder optar al aprobado.

Pregunta 1	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 2	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 3	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 4	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 5	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 6	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 7	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 8	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 9	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 10	A	B	C	D	En blanco

Puntos test:	Correctas:	Incorrectas:	En blanco:
Calificación test	Puntos/6=		
Calificación cuestiones			
Calificación total			

Preguntas test

Enunciado para las cuatro preguntas siguientes. Para una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 100$ se han calculado los siguientes estadísticos: $\bar{x} = -0{,}1065$, $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 102{,}9882$, $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3 = -10{,}6117$ y $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4 = 390{,}4633$.

Pregunta 1. Los coeficientes de asimetría y curtosis son:

A) $g_3 = -0{,}1061$, $g_4 = 3{,}9046$.

B) $g_3 = -0{,}1015$ y $g_4 = 3{,}6813$. El coeficiente de asimetría es $g_3 = \frac{m_3}{S^3}$, donde $m_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3}{n} = \frac{-10{,}6117}{100} = -0{,}1061$ y $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{102{,}9882}{100} = 1{,}0299$, por lo que $g_3 = \frac{-0{,}1061}{1{,}0299^{3/2}}$. De manera análoga, el coeficiente de curtosis es $g_4 = \frac{m_4}{S^4}$, donde $m_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^4}{n} = \frac{390{,}4633}{100} = 3{,}9066$, por lo que $g_4 = \frac{3{,}9066}{1{,}0299^2}$.

C) $g_3 = -10{,}6117$, $g_4 = 390{,}4633$.

D) No se pueden calcular con la información disponible.

Pregunta 2. El estadístico de Jarque-Bera resulta:

A) 56,6393.

B) 3,5972.

C) 2,7324.

D) 2,1060. $JB = n\left(\frac{g_3^2}{6} + \frac{(g_4-3)^2}{24}\right) = 100\left(\frac{(-0{,}1015)^2}{6} + \frac{(3{,}6813-3)^2}{24}\right)$.

Pregunta 3. Con las tablas disponibles, el p-valor es, **aproximadamente**:

A) $< 0{,}001$.

B) 0,10.

C) 0,20.

D) 0,30. La región crítica del contraste JB es la cola derecha de la distribución χ_2^2. Así, el p-valor es $\alpha^* = Pr[\chi_2^2 \geq 2{,}1060]$, con la información disponible en la tabla, $0{,}25 < \alpha^* < 0{,}5$.

Pregunta 4. La conclusión, a los niveles de significación habituales, es:

A) Se rechaza la hipótesis de que la muestra procede de una variable aleatoria normal.

B) Se rechaza la hipótesis de que la muestra procede de una variable aleatoria simétrica.

C) No se puede rechazar la hipótesis de que la muestra procede de una variable aleatoria normal. *

D) No se puede rechazar la hipótesis de que la muestra procede de una variable aleatoria simétrica.

Enunciado para las cuatro preguntas siguientes. Sea la función de densidad continua, $f_{XY}(x, y) = k$, en el soporte $0 < x < 6$, $\frac{x}{2} < y < 3$.

Pregunta 5. El soporte de la función de densidad es el triángulo de vértices:

A) (0,0), (0,6), (6,3).

B) (0,0), (3,0), (6,0).

C) (0,0), (6,0), (6,3).

D) (0,0), (0,3), (6,3). *

Pregunta 6. ¿Cómo calcularía la función de densidad marginal de Y, $f_2(y)$?

A) $\int_{2y}^{6} f_{XY}(x, y)\, dx$.

B) $\int_{2y}^{3} f_{XY}(x, y)\, dx$.

C) $\int_{0}^{2y} f_{XY}(x, y)\, dx$. El soporte de la densidad, dejando y libre es $0 < y < 3$, $0 < x < 2y$.

D) $\int_{0}^{3} f_{XY}(x, y)\, dx$.

Pregunta 7. ¿Cómo calcularía $P(X + Y \leq 2)$?

A) $\int_{0}^{2/3} \int_{2-x}^{x/2} f_{XY}(x, y)\, dy\, dx$.

B) $\int_{0}^{2/3} \int_{x/2}^{2-x} f_{XY}(x, y)\, dy\, dx$.

C) $\int_{0}^{4/3} \int_{0}^{2-x} f_{XY}(x, y)\, dy\, dx$.

D) $\int_{0}^{4/3} \int_{x/2}^{2-x} f_{XY}(x, y)\, dy\, dx$. El soporte de la probabilidad pedida es el triángulo de vértices (0, 0), (4/3, 2/3) y (0, 2).

Enunciado para las cuatro preguntas siguientes. La desviación típica muestral de las rentabilidades diarias (que se supone siguen una normal) de cierto activo durante los últimos 20 días de cotización ha sido 0.01, con una media de -0.02.

Pregunta 8. Si se desea contrastar la hipótesis de que la varianza de las rentabilidades diarias es 0.0002 o más ¿cuáles son la hipótesis nula y alternativa adecuadas?

A) $H_0 : \sigma^2 = 0{,}0002$ y $H_1 : \sigma^2 > 0{,}0002$.*

B) $H_0 : \sigma^2 \neq 0{,}0002$ y $H_1 : \sigma^2 = 0{,}0002$.

C) $H_0 : \sigma^2 = 0{,}0002$ y $H_1 : \sigma^2 < 0{,}0002$.

D) $H_0 : \sigma^2 = 0{,}0002$ y $H_1 : \sigma^2 \neq 0{,}0002$.

Pregunta 9. ¿Cuál es el valor del estadístico de contraste?

A) 1.

B) 2.

C) 10. *

D) 20.

Pregunta 10. El intervalo del 90 % confianza para σ^2 es:

A) $0{,}0000593693, 0{,}0001458173$.

B) $0{,}0000608785, 0{,}0002245547$.

C) $0{,}0000663492, 0{,}0001976868$. El intervalo de confianza del 90 % para la varianza de una normal es $\left(\frac{(n-1)s^2}{\lambda_2}, \frac{(n-1)s^2}{\lambda_1}\right)$, siendo λ_1 y λ_2 los percentiles del 5 % y el 95 % de una distribución χ^2_{n-1}.

D) $0{,}0000735198, 0{,}0001716604$.

Cuestiones cortas

Enunciado para las tres cuestiones siguientes. Suponga que durante 100 días medimos la rentabilidad de dos fondos de inversión tecnológicos ofrecidos por dos entidades financieras distintas, la entidad A y la entidad B. Se definen seis intervalos de rentabilidades y en la siguente tabla figura el número de días que cada fondo ha arrojado una determinanda rentabilidad.

	(-3,-2]	(-2,-1]	(-1,0]	(0,1]	(1,2]	(2,3]
Fondo A	2	14	35	39	9	1
Fondo B	12	19	13	13	13	30

Cuestión 1. (0.5 pt) Realice un contraste de Kolmogorov-Smirnov para decidir si los rendimientos del Fondo A se ajustan a una distribución normal con esperanza cero y varianza uno.

Para llevar a cabo el contraste pedido necesitamos calcular la función de distribución empírica de rentabilidades del Fondo A y la función de distribución suponiendo que la nula es cierta (tabulada al final) evaluadas en los mismos puntos. Dado que los datos estan agrupados, seleccionamos los límites superiores de los intervalos, lo que tiene como resultado:

z	-2	-1	0	1	2	3
$F^*_{100}(z)$	0.0200	0.1600	0.5100	0.9000	0.9900	1.0000
$F(z\|H_0)$	0.0228	0.1587	0.5000	0.8413	0.9772	0.9987
$\|F(z) - F^*_{100}(z)\|$	0.0028	0.0013	0.0100	0.0587	0.0128	0.0013

El estadístico de contraste resulta $D_{100} = 0{,}0587$. El valor crítico aproximado para una significación del 5 % es $c^*_{0,05} \simeq 1{,}36\sqrt{1/100} = 0{,}136$, por lo que **no se puede rechazar** la hipótesis nula de que la rentabilidad del Fondo A sigue una distribución normal estándar (y se llegaría a idéntica conclusión con cualquier otra significación habitual).

Cuestión 2. (0.5 pt) Realice un contraste Chi-cuadrado de igualdad de distribución. ¿Se puede concluir que ambos fondos tienen igual distribución de rentabilidad en el período considerado?

Para realizar el contraste Chi-cuadrado se estiman las frecuencias esperadas bajo la hipótesis nula de que las rentabilidades se distribuyan igual en ambos fondos. Denotamos por n_A y n_B las observaciones procedentes de cada uno de los fondos ($n = n_A + n_B$), por $A_j,\ j = 1, \ldots, 6$ a los intervalos y por n_{ij} las observaciones del fondo i que pertenecen al intervalo j. Si la nula es cierta, $\widehat{P(X \in A_j)} = \widehat{P(Y \in A_j)} = \hat{p}_j = \frac{n_{Aj}+n_{Bj}}{n}$; esto es, la probabilidad estimada de cada intervalo es igual en los dos fondos. Así, las frecuencias esperadas son $E_{ij} = n_i \hat{p}_j$, $i = A, B$, $j = 1, \ldots, 6$. Las frecuencias esperadas aparecen a continuación:

	(-3,-2]	(-2,-1]	(-1,0]	(0,1]	(1,2]	(2,3]
Fondo A	7.0	16.5	24.0	26.0	11.0	15.5
Fondo B	7.0	16.5	24.0	26.0	11.0	15.5

El estadístico de contraste es:

$$Q = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{6} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} = \frac{(2-7)^2}{7} + \frac{(14-16{,}5)^2}{16{,}5} + \ldots + \frac{(13-11)^2}{11} + \frac{(30-15{,}5)^2}{15{,}5} = 58{,}84.$$

A la vista de las tablas de la χ^2_5 (o de la χ^2_{10} que habría que usar en este caso), es claro que se rechaza la hipótesis nula (de igual distribución) a los niveles de significación habituales.

Cuestión 3. (0.5 pt) Discuta la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación de un estadístico enamorado en el contexto de un modelo de regresión lineal simple: "Si cada día que estamos juntos te quiero más, antes de que nos conociéramos te odiaba".

El enamorado está suponiendo un modelo lineal para el amor dado por $AMOR_t = \alpha + \beta DIAS_t + \varepsilon_t$. De acuerdo con su afirmación, $\beta > 0$, puesto que cada día que pasa con ella quiere más a su amada. Implícitamente, $\alpha = 0$, puesto que no dice nada de cuánto la quería antes de estar juntos. Así, la recta pasa por el origen, y antes de conocerse *días juntos negativos*, el valor esperado de amor también era negativo (odio).

Cuestión 4. (0.5 pt) Discuta la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: "Si se rechaza H_0 con un nivel de significación $\alpha = 0{,}05$, no se rechaza H_0 con un nivel de significación $\alpha = 0{,}01$".

Falsa. Si se rechaza H_0 con una signifiación del 5 % es porque $\alpha^* < 0{,}05$, donde α^* es el p-valor del contraste. Pero lo anterior no implica que α^* sea menor que 0,01, que es la condición para rechazar al 1 %.

Enunciado para las cuatro cuestiones siguientes. Sea X una variable aleatoria con distribución Exponencial con parámetro λ ($X \sim Exp(\lambda)$), cuya **función de distribución** es $F(x) = P[X \leq x] = 1 - e^{-\lambda x}, \;\; x \geq 0$.

Cuestión 5. (0.5 pt) Obtenga $E(X)$. Primero necesitamos la función de densidad $f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} = \lambda e^{-\lambda x}$, definida en el mismo soporte que la función de distribución.

La esperanza pedida es:

$$E(X) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty z e^{-z} \frac{1}{\lambda} dz = \frac{1}{\lambda}\Gamma(2) = \frac{1}{\lambda},$$

donde se ha hecho el cambio de variable $z = \lambda x$.

Cuestión 6. (0.5 pt) Obtenga la función generatriz de momentos de X.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda - t)x} dx = \int_0^\infty \lambda e^{-z} \frac{1}{\lambda - t} dz = \frac{\lambda}{\lambda - t}\Gamma(1) = \frac{1}{1 - \frac{t}{\lambda}},$$

donde se ha hecho el cambio de variable $z = (\lambda - t)x$. Se puede comprobar que es función generatriz puesto que $M(0) = 1$ y existe en el intervalo $t \in (-\lambda, \lambda)$.

Cuestión 7. (0.5 pt) Demuestre que si $X_i \sim Exp(\lambda), \quad i = 1 \ldots k$, independientes, entonces $Y = \sum_{i=1}^k X_i$ sigue una distribución Gamma de parámetros k y λ ($Y \sim \Gamma(k, \lambda)$), cuya generatriz es $\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-k}$.

La función generatriz de una combinación lineal de variables aleatorias independientes viene dada por $\prod_{i=1}^k M_{X_i}(a_i t)$, donde $M_{X_i}()$ es la generatriz de X_i y a_i es el coeficiente que multiplica a X_i en la combinación lineal. En este caso, $a_i = 1, \forall i$, y las generatrices son idénticas puesto que todas las X_i tiene la misma distribución, por lo que la generatriz de la suma es:

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^k M_X(t) = [M_X(t)]^k = \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^k} = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-k}.$$

Cuestión 8. (0.5 pt) Encuentre la mejor región crítica para contrastar $H_0 : \lambda = 1$ frente a $H_1 : \lambda > 1$ con una muestra aleatoria simple tamaño n.

Para encontrar la mejor región crítica recurrimos el Teorma de Neyman-Pearson, que prueba que dicha región crítica se obtiene del cociente de la función de verosimilitud en la nula entre la verosimilitud en la alternativa. Así:

$$\frac{\pounds(\lambda_0)}{\pounds(\lambda_1)} = \frac{\lambda_0^n e^{-\lambda_0 \sum_{i=1}^n x_i}}{\lambda_1^n e^{-\lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i}} = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^n \exp\left[-(\lambda_0 - \lambda_1)\sum_{i=1}^n x_i\right] \leq k \Rightarrow RH_0.$$

Ahora es necesario transformar la región crítica en un suceso equivalente en función de un estadístico cuya distribución sea conocida bajo la nula:

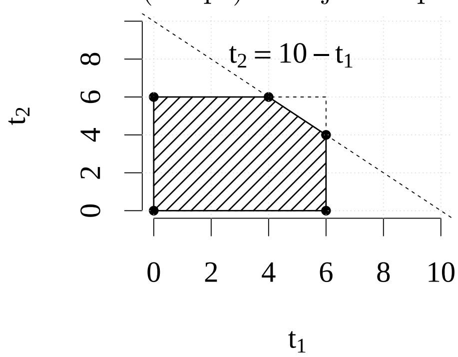
$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^n \exp\left[-(\lambda_0 - \lambda_1)\sum_{i=1}^n x_i\right] &\leq k, \\ \exp\left[-(\lambda_0 - \lambda_1)\sum_{i=1}^n x_i\right] &\leq k', \\ -(\lambda_0 - \lambda_1)\sum_{i=1}^n x_i &\leq k'', \\ \sum_{i=1}^n x_i &\leq k''', \end{aligned}$$

donde en el último paso hay que tener en cuenta que, dadas las hipótesis nula y alternativa, $-(\lambda_0 - \lambda_1) > 0$.

La región crítica es $\{\sum_{i=1}^n x_i \leq c^*\}$ y el estadístico de contraste se distribuye $\sum_{i=1}^n x_i \sim \Gamma(n, \lambda_0)$ bajo la hipótesis nula.

Enunciado para las dos cuestiones siguientes. Sea T_1 el tiempo que transcurre entre un accidente de automóvil y que se entrega el parte en la compañía de seguros. Sea T_2 el tiempo que pasa entre la entrega del parte de accidente y el pago de la indemnización por parte de la aseguradora. La función de densidad conjunta de T_1 y T_2, es $f(t_1, t_2) = k$ definida sobre el soporte $\{0 < t_1 < 6,\ 0 < t_2 < 6,\ t_1 + t_2 < 10\}$.

Cuestión 9. (0.5 pt) Dibuje el soporte de $f(t_1, t_2)$ y encuentre k.



Dado que la densidad es constante, la vía más simple para encontrar k es usar geometría. El volumen de la función de densidad es el área del cuadrado de lado 6 multiplicada por k, menos el volumen por encima del triangulo blanco que tiene lado 2: $6^2k - \frac{2\cdot 2}{2}k = 34k$, por lo que $k = 1/34$.

Cuestión 10. (0.5 pt) Determine $E(T_1+T_2)$, el tiempo esperado entre el accidente y el pago.

Sabemos que $E(T_1+T_2)=E(T_1)+E(T_2)$, por lo que necesitamos encontrar las marginales.

$$f_1(t_1)=\begin{cases}\int_0^6 \frac{1}{34}dt_2=\frac{6}{34}, & 0<t_1<4;\\ \int_0^{10-t_1}\frac{1}{34}dt_2=\frac{10-t_1}{34}, & 4\le t_1<6.\end{cases}$$

La esperanza de T_1 resulta:

$$E(T_1)=\int_0^4 t_1\frac{6}{34}dt_1+\int_4^6 t_1\frac{10-t_1}{34}dt_1=\frac{6}{34}\frac{4^2}{2}+\frac{10}{34}\frac{6^2-4^2}{2}-\frac{1}{34}\frac{6^3-4^3}{3}=2{,}8627.$$

La función de densidad marginal de T_2 es idéntica a la de T_1 (es suficiente plantearla para comprobarlo), por lo que también lo serán sus momentos. Así, $E(T_1+T_2)=E(T_1)+E(T_2)=2E(T_1)=5{,}7255$.

Fórmulas de posible utilidad

Transformación de variables. Sea $X\sim f_X(x)$ y se define $Y=h(X)$. Entoces $f_Y(y)=f_X\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|$ donde $h^{-1}(\cdot)$ es la *función inversa* de $h(\cdot)$.

Aproximación lineal a la esperanza condicional.

$$E^*(Y/X=x)=E(Y)-\frac{Cov(X,Y)}{V(X)}\cdot E(X)+\frac{Cov(X,Y)}{V(X)}\cdot x$$

Varianza condicional de la normal bivariante. $V(Y/X=x)=V(Y)(1-\rho^2_{XY})$.

Modelo de regresión lineal. Sea $E(Y_i/X_i=x_i)=a+bx_i$ (o también $Y_i=a+bx_i+\varepsilon_i$, $\varepsilon_i \underset{iid}{\sim} N(0,\sigma^2_\varepsilon)$). Si $\hat{a}$ y $\hat{b}$ son los estimadores por el método de los momentos (o de mínimos cuadrados) de a y b, y $\hat{\varepsilon}_i$ los residuos del modelo, entonces:

$$\frac{\hat{a}-a}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2_\varepsilon\sum x_i^2}{T\sum(x_i-\bar{x})^2}}}\sim t_{n-2},\qquad \frac{\hat{b}-b}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2_\varepsilon}{\sum(x_i-\bar{x})^2}}}\sim t_{n-2};\qquad \text{donde}\qquad \hat{\sigma}^2_\varepsilon=\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^n\hat{\varepsilon}_i^2.$$

Distribuciones de funciones de variables aleatorias. Si $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ y $X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ e independientes y se dispone de muestras de tamaños n, n_1 y n_2 respectivamente:

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\sim N(0,1);\qquad \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{s^2/n}}\sim t_{n-1};\qquad \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-1};\qquad \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2}\sim F_{n_1-1,n_2-1}$$

$$\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1);\qquad \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}}\sim t_{n+m-2},$$

donde s^2 denota la *cuasivarianza* muestral.

Proporciones. $\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \to N(0,1)$. Con dos poblaciones y muestras de tamaños n_1 y n_2:

$$\frac{(\hat{p_1}-\hat{p_2})-(p_1-p_2)}{\sqrt{\left(\frac{n_1+n_2}{n_1 \cdot n_2}\right)\hat{p_T}(1-\hat{p_T})}} \to N(0,1),$$

donde $\hat{p_T} = \frac{n_1\hat{p_1}+n_2\hat{p_2}}{n_1+n_2}$.

Contraste de Jarque-Bera. $JB = n\left[\frac{AS^2}{6}+\frac{(K-3)^2}{24}\right] \to \chi^2_2$.

Contraste Chi cuadrado. $\sum_{i=1}^{k}\frac{(T_i-O_i)^2}{T_i} \sim \chi^2$ donde T_i y O_i son, respectivamente las i-ésimas frecuencias absolutas esperadas y observadas.

Contrastes de Kolmogorov-Smirnov. Para una muestra $D_n = \sup|F_n^*(x)-F(x)|$. Para dos muestras $D_{n,m} = \sup|F_n^*(x)-G_m^*(x)|$. $F_n^*(x)$ y $G_m^*(x)$ son funciones de distribución empíricas (o muestrales) y $F(x)$ es una función de distribución teórica.

Contraste de Wilcoxon. El estadístico $T = T^+ - T^-$, bajo H_0 cumple $E(T) = 0$ y $V(T) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Contraste de Mann-Whitney. $U = \text{mín}(U_1, U_2)$, donde $U_1 = n_1n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1$ y $U_2 = n_1n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2$. Bajo H_0 se cumple $E(U) = \frac{n_1n_2}{2}$ y $V(U) = \frac{n_1n_2(n_1+n_2+1)}{12}$.

Aproximación a los valores críticos en los contrastes de Kolmogorov-Smirnov. Para el contraste de una muestra, el valor crítico c^* con un nivel de significación α se aproxima mediante $c^*_\alpha = k_\alpha\sqrt{1/n}$, donde k_α es 1.07, 1.22, 1.36, 1.52 y 1.63 para niveles de significación del 20 %, 10 %, 5 %, 2 % y 1 %, respectivamente.

Para el contraste de dos muestras, el valor crítico aproximado se calcula:

$$c^*_\alpha = k_\alpha\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 \cdot n_2}},$$

donde k_α es 1.07, 1.22 y 1.52 para niveles de significación α del 10 %, 5 % y 1 %, respectivamente.

Tablas estadísticas

	x.x0	x.x1	x.x2	x.x3	x.x4	x.x5	x.x6	x.x7	x.x8	x.x9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993

Cuadro 1: Función de distribución de la $N(0,1)$

r	0.01	0.05	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95	0.99
1	0.000157	0.003932	0.015791	0.101531	0.454936	1.323304	2.705543	3.841459	6.634897
2	0.020101	0.102587	0.210721	0.575364	1.386294	2.772589	4.605170	5.991465	9.210340
3	0.114832	0.351846	0.584374	1.212533	2.365974	4.108345	6.251389	7.814728	11.344867
5	0.554298	1.145476	1.610308	2.674603	4.351460	6.625680	9.236357	11.070498	15.086272
10	2.558212	3.940299	4.865182	6.737201	9.341818	12.548861	15.987179	18.307038	23.209251
15	5.229349	7.260944	8.546756	11.036538	14.338860	18.245086	22.307130	24.995790	30.577914
17	6.407760	8.671760	10.085186	12.791926	16.338182	20.488676	24.769035	27.587112	33.408664
18	7.014911	9.390455	10.864936	13.675290	17.337902	21.604890	25.989423	28.869299	34.805306
19	7.632730	10.117013	11.650910	14.561997	18.337653	22.717807	27.203571	30.143527	36.190869
20	8.260398	10.850811	12.442609	15.451774	19.337429	23.827692	28.411981	31.410433	37.566235

Cuadro 2: Función de distribución de la χ^2_r.