♣ Examen de Introducción a la Econometría (LECO). ♣

Departamento de Economía Cuantitativa. Universidad Complutense de Madrid.

12 de septiembre de 2012. Duración: **2 horas**.

Apellidos:	Nombre:	DNI:
Nombre del profesor:		Grupo:

No desgrape las hojas de este cuadernillo. El examen está compuesto por diez preguntas tipo test y diez cuestiones cortas. Responda a las preguntas tipo test en la plantilla de esta página. Las cuestiones tipo test suman tres puntos si la respuesta es correcta, restan un punto si es incorrecta y cero puntos si se deja en blanco. Debe obtener al menos 2 puntos sobre 5 en cada parte para poder optar al aprobado.

Pregunta 1	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 2	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 3	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 4	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 5	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 6	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 7	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 8	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 9	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 10	A	B	C	D	En blanco

Puntos test:	Correctas:	Incorrectas:	En blanco:
Calificación test	Puntos/6=		
Calificación cuestiones			
Calificación total			

Preguntas test

Enunciado para las cuatro preguntas siguientes. Para una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 100$ se han calculado los siguientes estadísticos: $\bar{x} = -0{,}1065$, $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 102{,}9882$, $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3 = -10{,}6117$ y $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4 = 390{,}4633$.

Pregunta 1. Los coeficientes de asimetría y curtosis son:

A) $g_3 = -0{,}1061$, $g_4 = 3{,}9046$.

B) $g_3 = -0{,}1015$ y $g_4 = 3{,}6813$.

C) $g_3 = -10{,}6117$, $g_4 = 390{,}4633$.

D) No se pueden calcular con la información disponible.

Pregunta 2. El estadístico de Jarque-Bera resulta:

A) 56,6393.

B) 3,5972.

C) 2,7324.

D) 2,1060.

Pregunta 3. Con las tablas disponibles, el p-valor es, **aproximadamente**:

A) $< 0{,}001$.

B) 0,10.

C) 0,20.

D) 0,30.

Pregunta 4. La conclusión, a los niveles de significación habituales, es:

A) Se rechaza la hipótesis de que la muestra procede de una variable aleatoria normal.

B) Se rechaza la hipótesis de que la muestra procede de una variable aleatoria simétrica.

C) No se puede rechazar la hipótesis de que la muestra procede de una variable aleatoria normal.

D) No se puede rechazar la hipótesis de que la muestra procede de una variable aleatoria simétrica.

Enunciado para las cuatro preguntas siguientes. Sea la función de densidad continua, $f_{XY}(x,y) = k$, en el soporte $0 < x < 6$, $\frac{x}{2} < y < 3$.

Pregunta 5. El soporte de la función de densidad es el triángulo de vértices:

A) (0,0), (0,6), (6,3).

B) (0,0), (3,0), (6,0).

C) (0,0), (6,0), (6,3).

D) (0,0), (0,3), (6,3).

Pregunta 6. ¿Cómo calcularía la función de densidad marginal de Y, $f_2(y)$?

A) $\int_{2y}^{6} f_{XY}(x,y)\, dx$.

B) $\int_{2y}^{3} f_{XY}(x,y)\, dx$.

C) $\int_{0}^{2y} f_{XY}(x,y)\, dx$.

D) $\int_{0}^{3} f_{XY}(x,y)\, dx$.

Pregunta 7. ¿Cómo calcularía $P(X+Y \leq 2)$?

A) $\int_{0}^{2/3} \int_{2-x}^{x/2} f_{XY}(x,y)\, dy\, dx$.

B) $\int_{0}^{2/3} \int_{x/2}^{2-x} f_{XY}(x,y)\, dy\, dx$.

C) $\int_{0}^{4/3} \int_{0}^{2-x} f_{XY}(x,y)\, dy\, dx$.

D) $\int_{0}^{4/3} \int_{x/2}^{2-x} f_{XY}(x,y)\, dy\, dx$.

Enunciado para las cuatro preguntas siguientes. La rentabilidad diaria de cierto activo (que se supone sigue una normal), durante los últimos 20 días de cotización, presenta una media de -0.02 y una desviación típica muestral de 0.01.

Pregunta 8. Si se desea contrastar la hipótesis de que la varianza de las rentabilidades diarias es 0.0002 frente a que sea superior ¿cuáles son la hipótesis nula y alternativa adecuadas?

A) $H_0 : \sigma^2 = 0{,}0002$ y $H_1 : \sigma^2 > 0{,}0002$.

B) $H_0 : \sigma^2 \neq 0{,}0002$ y $H_1 : \sigma^2 = 0{,}0002$.

C) $H_0 : \sigma^2 = 0{,}0002$ y $H_1 : \sigma^2 < 0{,}0002$.

D) $H_0 : \sigma^2 = 0{,}0002$ y $H_1 : \sigma^2 \neq 0{,}0002$.

Pregunta 9. ¿Cuál es el valor del estadístico de contraste?

A) 1.

B) 2.

C) 10.

D) 20.

Pregunta 10. El intervalo del 90 % confianza para σ^2 es:

A) $0{,}0000593693, 0{,}0001458173$.

B) $0{,}0000608785, 0{,}0002245547$.

C) $0{,}0000663492, 0{,}0001976868$.

D) $0{,}0000735198, 0{,}0001716604$.

Cuestiones cortas

Enunciado para las tres cuestiones siguientes. Suponga que durante 100 días medimos la rentabilidad de dos fondos de inversión tecnológicos ofrecidos por dos entidades financieras distintas, la entidad A y la entidad B. Se definen seis intervalos de rentabilidades y en la siguente tabla figura el número de días que cada fondo ha arrojado una determinanda rentabilidad.

	(-3,-2]	(-2,-1]	(-1,0]	(0,1]	(1,2]	(2,3]
Fondo A	2	14	35	39	9	1
Fondo B	12	19	13	13	13	30

Cuestión 1. (0.5 pt) Realice un contraste de Kolmogorov-Smirnov para decidir si los rendimientos del Fondo A se ajustan a una distribución normal con esperanza cero y varianza uno.

Cuestión 2. (0.5 pt) Realice un contraste Chi-cuadrado de igualdad de distribución. ¿Se puede concluir que ambos fondos tienen igual distribución de rentabilidad en el período considerado?

Cuestión 3. (0.5 pt) Discuta la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación de un estadístico enamorado en el contexto de un modelo de regresión lineal simple: “Si cada día que estamos juntos te quiero más, antes de que nos conociéramos te odiaba”.

Cuestión 4. (0.5 pt) Discuta la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: "Si se rechaza H_0 con un nivel de significación $\alpha = 0{,}05$, no se rechaza H_0 con un nivel de significación $\alpha = 0{,}01$".

Enunciado para las cuatro cuestiones siguientes. Sea X una variable aleatoria con distribución Exponencial con parámetro λ ($X \sim Exp(\lambda)$), cuya **función de distribución** es $F(x) = P[X \leq x] = 1 - e^{-\lambda x}, \; x \geq 0$.

Cuestión 5. (0.5 pt) Obtenga $E(X)$.

Cuestión 6. (0.5 pt) Obtenga la función generatriz de momentos de X.

Cuestión 7. (0.5 pt) Demuestre que si $X_i \sim Exp(\lambda), \quad i = 1 \dots k$, independientes, entonces $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i$ sigue una distribución Gamma de parámetros k y λ ($Y \sim \Gamma(k, \lambda)$), cuya generatriz es $\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-k}$.

Cuestión 8. (0.5 pt) Encuentre la mejor región crítica para contrastar $H_0 : \lambda = 1$ frente a $H_1 : \lambda > 1$ con una muestra aleatoria simple tamaño n.

Enunciado para las dos cuestiones siguientes. Sea T_1 el tiempo que transcurre entre un accidente de automóvil y que se entrega el parte en la compañía de seguros. Sea T_2 el tiempo que pasa entre la entrega del parte de accidente y el pago de la indemnización por parte de la aseguradora. La función de densidad conjunta de T_1 y T_2, es $f(t_1, t_2) = k$ definida sobre el soporte $\{0 < t_1 < 6,\ 0 < t_2 < 6,\ t_1 + t_2 < 10\}$.

Cuestión 9. (0.5 pt) Dibuje el soporte de $f(t_1, t_2)$ y encuentre k.

Cuestión 10. (0.5 pt) Determine $E(T_1 + T_2)$, el tiempo esperado entre el accidente y el pago.

Fórmulas de posible utilidad

Transformación de variables. Sea $X \sim f_X(x)$ y se define $Y = h(X)$. Entoces $f_Y(y) = f_X\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|$ donde $h^{-1}(\cdot)$ es la *función inversa* de $h(\cdot)$.

Aproximación lineal a la esperanza condicional.

$$E^*(Y/X = x) = E(Y) - \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} \cdot E(X) + \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} \cdot x$$

Varianza condicional de la normal bivariante. $V(Y/X = x) = V(Y)(1 - \rho_{XY}^2)$.

Modelo de regresión lineal. Sea $E(Y_i/X_i = x_i) = a + bx_i$ (o también $Y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$, $\varepsilon_i \underset{iid}{\sim} N(0, \sigma_\varepsilon^2)$). Si $\hat{a}$ y $\hat{b}$ son los estimadores por el método de los momentos (o de mínimos cuadrados) de a y b, y $\hat{\varepsilon}_i$ los residuos del modelo, entonces:

$$\frac{\hat{a} - a}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \sum x_i^2}{T \sum (x_i - \bar{x})^2}}} \sim t_{n-2}, \qquad \frac{\hat{b} - b}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}} \sim t_{n-2}; \qquad \text{donde} \qquad \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2.$$

Distribuciones de funciones de variables aleatorias. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ e independientes y se dispone de muestras de tamaños n, n_1 y n_2 respectivamente:

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1); \qquad \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \sim t_{n-1}; \qquad \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2; \qquad \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$$

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1); \qquad \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}} \sim t_{n+m-2},$$

donde s^2 denota la *cuasivarianza* muestral.

Proporciones. $\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \to N(0,1)$. Con dos poblaciones y muestras de tamaños n_1 y n_2:

$$\frac{(\hat{p_1} - \hat{p_2}) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}\right) \hat{p_T}(1 - \hat{p_T})}} \to N(0,1),$$

donde $\hat{p_T} = \frac{n_1 \hat{p_1} + n_2 \hat{p_2}}{n_1 + n_2}$.

Contraste de Jarque-Bera. $JB = n\left[\frac{AS^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24}\right] \to \chi_2^2$.

Contraste Chi cuadrado. $\sum_{i=1}^{k} \frac{(T_i - O_i)^2}{T_i} \sim \chi^2$ donde T_i y O_i son, respectivamente las i-ésimas frecuencias absolutas esperadas y observadas.

Contrastes de Kolmogorov-Smirnov. Para una muestra $D_n = \sup |F_n^*(x) - F(x)|$. Para dos muestras $D_{n,m} = \sup |F_n^*(x) - G_m^*(x)|$. $F_n^*(x)$ y $G_m^*(x)$ son funciones de distribución empíricas (o muestrales) y $F(x)$ es una función de distribución teórica.

Contraste de Wilcoxon. El estadístico $T = T^+ - T^-$, bajo H_0 cumple $E(T) = 0$ y $V(T) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Contraste de Mann-Whitney. $U = \text{mín}(U_1, U_2)$, donde $U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1$ y $U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2$. Bajo H_0 se cumple $E(U) = \frac{n_1 n_2}{2}$ y $V(U) = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}$.

Aproximación a los valores críticos en los contrastes de Kolmogorov-Smirnov. Para el contraste de una muestra, el valor crítico c^* con un nivel de significación α se aproxima mediante $c_\alpha^* = k_\alpha \sqrt{1/n}$, donde k_α es 1.07, 1.22, 1.36, 1.52 y 1.63 para niveles de significación del 20 %, 10 %, 5 %, 2 % y 1 %, respectivamente.

Para el contraste de dos muestras, el valor crítico aproximado se calcula:

$$c_\alpha^* = k_\alpha \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}},$$

donde k_α es 1.07, 1.22 y 1.52 para niveles de significación α del 10 %, 5 % y 1 %, respectivamente.

Tablas estadísticas

	x.x0	x.x1	x.x2	x.x3	x.x4	x.x5	x.x6	x.x7	x.x8	x.x9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993

Cuadro 1: Función de distribución de la $N(0, 1)$

r	0.01	0.05	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95	0.99
1	0.000157	0.003932	0.015791	0.101531	0.454936	1.323304	2.705543	3.841459	6.634897
2	0.020101	0.102587	0.210721	0.575364	1.386294	2.772589	4.605170	5.991465	9.210340
3	0.114832	0.351846	0.584374	1.212533	2.365974	4.108345	6.251389	7.814728	11.344867
5	0.554298	1.145476	1.610308	2.674603	4.351460	6.625680	9.236357	11.070498	15.086272
10	2.558212	3.940299	4.865182	6.737201	9.341818	12.548861	15.987179	18.307038	23.209251
15	5.229349	7.260944	8.546756	11.036538	14.338860	18.245086	22.307130	24.995790	30.577914
17	6.407760	8.671760	10.085186	12.791926	16.338182	20.488676	24.769035	27.587112	33.408664
18	7.014911	9.390455	10.864936	13.675290	17.337902	21.604890	25.989423	28.869299	34.805306
19	7.632730	10.117013	11.650910	14.561997	18.337653	22.717807	27.203571	30.143527	36.190869
20	8.260398	10.850811	12.442609	15.451774	19.337429	23.827692	28.411981	31.410433	37.566235

Cuadro 2: Función de distribución de la χ^2_r.

Operaciones