Examen de Introducción a la Econometría (LECO).

Departamento de Economía Cuantitativa. Universidad Complutense de Madrid.

4 de septiembre de 2009. Duración: **2 horas**.

Apellidos:	Nombre:	DNI:
Nombre del profesor:		Grupo:

No desgrape las hojas de este cuadernillo. El examen está compuesto por diez preguntas tipo test y diez cuestiones cortas. Responda a las preguntas tipo test en la plantilla de ésta página. Las cuestiones tipo test suman tres puntos si la respuesta es correcta, restan un punto si es incorrecta y cero puntos si se deja en blanco. Debe obtener doce puntos en las preguntas tipo test para que se corrijan las cuestiones.

Pregunta 1	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 2	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 3	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 4	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 5	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 6	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 7	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 8	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 9	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 10	A	B	C	D	En blanco

Puntos test:	Correctas:	Incorrectas:	En blanco:
Calificación test	Puntos/6=		
Calificación cuestiones			
Calificación total			

Preguntas test

Enunciado para las tres preguntas siguientes. Sea un par de variables aleatorias con función de densidad conjunta $f_{XY}(x,y) = k,\ 0 < y < x < 3$.

Pregunta 1. El soporte de la función de densidad viene dado por los vértices:

A) (0,0), (0,3), (3,3).

B) (0,3), (3,3), (3,0).

C) * (0,0), (3,0), (3,3). Para obtener k: $\int_0^3 \left[\int_0^x k dy\right] dx = 1 \ \Rightarrow\ k = \frac{2}{9}$. Alternativamente, $\left(\frac{3\cdot 3}{2}\right) k = 1$

D) (0,0), (3,0), (0,3).

Pregunta 2. La esperanza de X es:

A) * $E(X) = \int_0^3 x \left[\int_0^x \frac{2}{9} dy\right] dx = \int_0^3 x \frac{2}{9} x dx = \frac{2}{9}\int_0^3 x^2 dx = 2$.

B) $E(X) = 1$.

C) $E(X) = 1/2$.

D) $E(X) = 1/4$.

Pregunta 3. La $Pr(Y < 1/2 | X = 1)$ resulta:

A) $Pr(Y < 1/2 | X = 1) = 0{,}1$.

B) $Pr(Y < 1/2 | X = 1) = 0{,}75$.

C) * $Pr(Y < 1/2 | X = 1) = \int_0^{1/2} f(y/X = 1) dy = \int_0^{1/2} \frac{f(1,y)}{f_1(1)} dy = \int_0^{1/2} \frac{2/9}{(2/9)\cdot 1} dy = 0{,}5$.

D) $Pr(Y < 1/2 | X = 1) = 0{,}25$.

Enunciado para las tres preguntas siguientes. Sea el par de variables aleatorias (X, Y), cuya distribución de probabilidad conjunta viene dada por la siguiente tabla:

	$X=1$	$X=2$	$X=3$		$X=1$	$X=2$	$X=3$	$P[Y=y]$
$Y=0$	1/9	1/3	2/9	$\Rightarrow$	2/18	6/18	4/18	12/18
$Y=1$	1/18	1/6	1/9		1/18	3/18	2/18	6/18
$P[X=x]$					3/18	9/18	6/18	

Pregunta 4. ¿Cuál es el coeficiente de correlación lineal ρ_{XY}?

A) 1,0.

B) 0,5.

C) * 0. Basta con comprobar que X e Y son independientes.

D) $-0{,}5$.

Pregunta 5. ¿Cuál es la $E[Y/X = 1]$?

A) * $E[Y/X = 1] = \sum_{y=0}^{1} yP[Y = y|X = 1] = \sum_{y=0}^{1} yP[Y = y] = 0\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3} = 1/3$, donde se ha tenido en cuenta que las variables aleatorias son independientes y, por tanto, las distribuciones condicionadas coinciden con las marginales.

B) $E[Y/X = 1] = 1/6$.

C) $E[Y/X = 1] = 1/9$.

D) $E[Y/X = 1] = 1/18$.

Pregunta 6. ¿Cuál es la $Pr[Y \geq 1/X = 2]$?

A) $Pr[Y \geq 1/X = 2] = 2/3$.

B) * $Pr[Y \geq 1/X = 2] = Pr[Y = 1/X = 2] = Pr[Y = 1] = 6/18 = 2/6$, donde se ha tenido en cuenta que X e Y son variables aleatorias independientes, por lo que la probabilidad condicionada coincide con la marginal.

C) $Pr[Y \geq 1/X = 2] = 2/9$.

D) $Pr[Y \geq 1/X = 2] = 2/18$.

Enunciado para las cuatro preguntas siguientes. La desviación típica muestral de las rentabilidades diarias (que se supone siguen una normal) de cierto activo durante los últimos 20 días de cotización ha sido 0.01, con una media de -0.02.

Pregunta 7. Si se desea contrastar que la varianza de las rentabilidades diarias es 0.0002 o menos ¿cuáles son la hipótesis nula y alternativa adecuadas?

A) $H_0 : \sigma = 0{,}01$ y $H_1 : \sigma < 0{,}01$.

B) $H_0 : \sigma^2 \neq 0{,}0002$ y $H_1 : \sigma^2 = 0{,}0002$.

C) * $H_0 : \sigma^2 = 0{,}0002$ y $H_1 : \sigma^2 < 0{,}0002$. Puesto que sólo se contempla la alternativa de que la varianza sea menor que en la hipótesis nula.

D) $H_0 : \sigma^2 = 0{,}0002$ y $H_1 : \sigma^2 \neq 0{,}0002$.

Pregunta 8. ¿Cuál es el valor del estadístico de contraste?

El estadístico para el contraste de la varianza de una población normal se puede expresar de varias formas equivalentes:

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \equiv \frac{nS^2}{\sigma^2} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

A) 1.

B) 2.

C) * $10 = \frac{nS^2}{\sigma_0^2} = \frac{20 \cdot 0{,}01^2}{0{,}0002}$, donde se ha elegido la versión que depende de la varianza muestral, ya que es el dato del enunciado.

D) 20.

Pregunta 9. ¿Cuánto es, aproximadamente, el p-valor del contraste anterior?

Por error, el resultado hay que obtenerlo con una χ^2_9, en vez de la χ^2_{19} que es la distribución correcta del estadístico.

A) 0,15.

B) 0,25.

C) * 0,65, $\alpha^* \simeq P\left(\frac{nS^2}{\sigma_0^2} \leq 10 \middle| \frac{nS^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_9\right)$, que es el valor más aproximado dadas las tablas estadísticas disponibles. Nótese que dada la hipótesis alternativa, la región crítica se encuentra en la cola izquierda de la distribución.

D) 0,95.

Pregunta 10. Asumiendo un 5 % de probabilidad de cometer el error tipo I ¿Cuál es la conclusión?

A) La conclusión depende del valor crítico.

B) * No se rechaza la hipótesis nula, puesto que el p-valor (α^*) hallado en el apartado anterior es muy superior al nivel se significación (α).

C) La bolsa es muy volátil.

D) Se rechaza la hipótesis nula.

Cuestiones cortas

Cuestión 1. (Junio 2007) La función generatriz de momentos de una v.a. chi-cuadrado de r grados de libertad es $M(t) = (1-2t)^{-r/2}$. Demuestre que si se tienen n variables aleatorias independientes $X_i \sim \chi^2_{r_i}$, $i = 1, \ldots, n$, entonces $\sum_{i=1}^n X_i \sim \chi^2_{\sum r_i}$.

Si $Y = \sum a_i X_i$, con X_i independientes y las a_i constantes conocidas, $M_Y(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(a_i t)$. Así:

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^n (1-2t)^{-r_i/2} = (1-2t)^{-\frac{1}{2}\sum r_i},$$

que es la generatriz de una v. a. $\chi^2_{\sum r_i}$.

Cuestión 2. (Junio 2007) Si una variable aleatoria sigue una distribución exponencial con parámetro θ, $X \sim f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}x}$, $x \geq 0$, obtenga su función generatriz de momentos.

La función generatriz de una v.a. X se define $M_X(t) = E(e^{tX})$, pero además debe cumplirse que $M(0) = 1$ y $\exists\ M_X(t)\ \ \forall t \in (-h, h)$, esto es, debe existir en un intervalo alrededor de cero. En este caso:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx}\, \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}x} dx = \frac{1}{\theta} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{1}{\theta}-t\right)x} dx,$$

si se hace el cambio de variable $\left(\frac{1}{\theta} - t\right) x = z \Rightarrow x = \frac{\theta}{1-\theta t} z$, resulta:

$$M_X(t) = \frac{1}{\theta} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{\theta}-t\right)x} dx = \frac{1}{\theta} \int_0^{\infty} e^{-z} \frac{\theta}{1-\theta t} dz = \frac{1}{\theta} \frac{\theta}{1-\theta t} \Gamma(1) = (1-\theta t)^{-1}.$$

Se puede comprobar que $M_X(0) = 1$ y que $\exists\ M_X(t)\ \ \forall t \in (-\frac{1}{\theta}, \frac{1}{\theta})$, por lo que es una función generatriz.

Cuestión 3. (Junio 2007) **Utilizando los resultados de las dos cuestiones previas**, para una muestra aleatoria simple de tamaño n obtenida de una distribución exponencial con parámetro θ, demuestre que $\frac{2n}{\theta}\bar{x} \sim \chi^2_{2n}$.

En primer lugar, es necesario notar que Y$=\frac{2n}{\theta}\bar{x} = \frac{2}{\theta}\sum X_i = \sum \frac{2}{\theta} X_i$. También, como se indicó antes, si $Y = \sum a_i X_i$, con X_i independientes y las a_i constantes conocidas, $M_Y(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(a_i t)$. Entonces:

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} M_X\left(\frac{2}{\theta}t\right) = \left[M_X\left(\frac{2}{\theta}t\right)\right]^n = \left[\left(1 - \theta\left\{\frac{2}{\theta}t\right\}\right)^{-1}\right]^n = (1-2t)^{-n},$$

que es la función generatriz de momentos de una χ^2_{2n}.

Enunciado para las cuatro cuestiones siguientes. Sean los siguientes datos referidos a cinco familias:

Familia	y_i	x_i	$y_i - \bar{y}$	$x_i - \bar{x}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$
A	2	4	-2	-4	4	16	8
B	3	7	-1	-1	1	1	1
C	1	3	-3	-5	9	25	15
D	5	9	1	1	1	1	1
E	9	17	5	9	25	81	45
sumas	20	40	–	–	40	124	70

donde y_i es el gasto semanal de las familias, y x_i es su ingreso semanal.

Suponga que se desea calcular $E^*(Y/X = x) = a + bx$, pero no se dispone de la función de densidad conjunta y se plantea el modelo $y_i = a + bx_i + u_i$, donde u_i son otros factores que afectan al consumo familiar distintos de sus ingresos.

Cuestión 4. (1 pt) Estime los parámetros del modelo por mínimos cuadrados.

Una vez calculadas las columnas $y_i - \bar{y}$, $x_i - \bar{x}$, $(y_i - \bar{y})^2$, $(x_i - \bar{x})^2$ y $(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$ se dispone de los elementos necesarios para la estimación de los parámetros desconocidos.

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \frac{S_{XY}}{S_X^2} = \frac{\sum_{=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})/n}{\sum_{=1}^n (x_i - \bar{x})^2/n} = \frac{70/5}{124/5} = 0{,}5645, \\ \hat{a} &= \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 4 - 8 \cdot \hat{b} = -0{,}5161. \end{aligned}$$

El modelo estimado se puede expresar $y_i = -0{,}5161 + 0{,}5645 x_i + \hat{u}_i$.

Cuestión 5. (0.5 pt) Calcule el coeficiente de correlación lineal muestral entre X e Y.

$$\hat{\rho}_{XY} = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_X^2 S_Y^2}} = \frac{70/5}{\sqrt{124/5 \cdot 40/5}} = \frac{70}{\sqrt{124 \cdot 40}} = 0{,}9939.$$

Cuestión 6. (0.5 pt) Relacione analíticamente la pendiente de la recta $E^*(Y/X = x)$ y el coeficiente de correlación teórico ρ_{XY}.

$$b = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}\frac{\sqrt{\sigma_Y^2}}{\sqrt{\sigma_Y^2}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}}\frac{\sqrt{\sigma_Y^2}}{\sqrt{\sigma_X^2}} = \rho_{XY}\frac{\sqrt{\sigma_Y^2}}{\sqrt{\sigma_X^2}}.$$

Cuestión 7. (0.5 pt) Compruebe numéricamente que en la muestra también se mantiene la relación anterior.

Sustituyendo por las estimaciones muestrales obtenidos en las cuestiones anteriores, resulta:

$$\hat{\rho}_{XY}\frac{\sqrt{S_Y^2}}{\sqrt{S_X^2}} = 0{,}9939\frac{\sqrt{40/5}}{\sqrt{124/5}} = 0{,}5645,$$

que coincide con la estimación de la pendiente $\hat{b}$ de la cuestión 4.

Cuestión 8. (0.5 pt) Demuestre que $\mu_{11} = \alpha_{11} - \alpha_{10}\alpha_{01}$, donde μ_{rs} denota el momento respecto a la esperanza y α_{rs} el momento respecto al origen. Primero defina μ_{rs} y α_{rs}.

La defición de los momentos para un par de varibles aleatorias X e Y es: $\alpha_{rs} = E[X^r Y^s]$ y $\mu_{rs} = E[(X - \alpha_{10})^r (Y - \alpha_{01})^s]$.

$$\begin{aligned}
\mu_{11} &= E[(X - \alpha_{10})(Y - \alpha_{01})] = E[XY - \alpha_{10}Y - \alpha_{01}X + \alpha_{10}\alpha_{01}] \\
&= E[XY] - \alpha_{10}E[Y] - \alpha_{01}E[X] + \alpha_{10}\alpha_{01} = \alpha_{11} - \alpha_{10}\alpha_{01} - \alpha_{01}\alpha_{10} + \alpha_{10}\alpha_{01} \\
&= \alpha_{11} - \alpha_{10}\alpha_{01}.
\end{aligned}$$

Cuestión 9. (Junio 2007) Considere una economía con sólo dos bienes de consumo: A y B. Se tienen los siguientes datos:

	Bien A		Bien B	
	precio	cantidad	precio	cantidad
1998	5	30	2	20
1999	6	35	4	10

Tomando como base el año 1998, ¿cuál es la inflación anual en 1999?

El índice de precios de Laspeyres en el año 1 con base año 0 para un conjunto de bienes $i = 1, \ldots, n$ viene dado por la expresión:

$$L_{1/0} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^1 q_i^0}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^0} = \frac{6 \cdot 30 + 4 \cdot 20}{5 \cdot 30 + 2 \cdot 20} = 1{,}3684.$$

El índice de precios se suele expresar 136,84 % y el índice en el año base es 100 %. La inflación interanual, que es la tasa de variación, resulta $\pi_{99/98} = \frac{L_{1/0} - L_{0/0}}{L_{0/0}} = 36{,}8\,\%$.

Fórmulas de posible utilidad

Transformación de variables. Sea $X \sim f_X(x)$ y se define $Y = h(X)$. Entoces $f_Y(y) = f_X\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|$ donde $h^{-1}(\cdot)$ es la *función inversa* de $h(\cdot)$.

Aproximación lineal a la esperanza condicional.

$$E^*(Y/X=x) = E(Y) - \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} \cdot E(X) + \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} \cdot x$$

Varianza condicional de la normal bivariante. $V(Y/X=x) = V(Y)(1-\rho^2_{XY})$.

Modelo de regresión lineal. Sea $E(Y_i/X_i = x_i) = a + bx_i$ (o también $Y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$, $\varepsilon_i \underset{iid}{\sim} N(0,\sigma^2_\varepsilon)$). Si $\hat{a}$ y $\hat{b}$ son los estimadores por el método de los momentos (o de mínimos cuadrados) de a y b, entonces:

$$\frac{\hat{a}-a}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2_\varepsilon \sum x_i^2}{T\sum(x_i-\bar{x})^2}}} \sim t_{n-2}; \qquad \frac{\hat{b}-b}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2_\varepsilon}{\sum(x_i-\bar{x})^2}}} \sim t_{n-2}; \qquad \hat{\sigma}^2_\varepsilon = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}^2_i.$$

Distribuciones de funciones de variables aleatorias. Si $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ y $X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ e independientes y se dispone de muestras de tamaños n, n_1 y n_2 respectivamente:

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1); \qquad \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{s^2/n}} \sim t_{n-1}; \qquad \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}; \qquad \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_s^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$$

$$\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1); \qquad \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\frac{n_1s_1^2+n_2s_2^2}{n_1+n_2-2}}} \sim t_{n+m-2}$$

donde s^2 denota la *cuasivarianza* muestral.

Proporciones. $\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \to N(0,1)$. Con dos poblaciones y muestras de tamaños n y m:

$$\frac{(\hat{p_1}-\hat{p_2})-(p_1-p_2)}{\sqrt{\left(\frac{n+m}{n\cdot m}\right)\hat{p_T}(1-\hat{p_T})}} \to N(0,1),$$

donde $\hat{p_T} = \frac{n\hat{p_1}+m\hat{p_2}}{n+m}$.

Contraste de Jarque-Bera. $JB = n\left[\frac{AS^2}{6}+\frac{(K-3)^2}{24}\right] \to \chi^2_2$.

Contraste Chi cuadrado. $\sum_{i=1}^{k}\frac{(T_i-O_i)^2}{T_i} \sim \chi^2$ donde T_i y O_i son, respectivamente las i-ésimas frecuencias absolutas esperadas y observadas.

Contrastes de Kolmogorov-Smirnov. Para una muestra $D_n = \sup|F_n^*(x)-F(x)|$. Para dos muestras $D_{n,m} = \sup|F_n^*(x)-G_m^*(x)|$. $F_n^*(x)$ y $G_m^*(x)$ son funciones de distribución empíricas (o muestrales) y $F(x)$ es una función de distribución teórica.

Contraste de Wilcoxon. El estadístico $T = T^+ - T^-$, bajo H_0 cumple $E(T) = 0$ y $V(T) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Contraste de Mann-Whitney. $U = \text{mín}(U_1,U_2)$, donde $U_1 = n_1n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1$ y $U_2 = n_1n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2$. Bajo H_0 se cumple $E(U) = \frac{n_1n_2}{2}$ y $V(U) = \frac{n_1n_2(n_1+n_2+1)}{12}$.

Aproximación a los valores críticos en los contrastes de Kolmogorov-Smirnov. Para el contraste de una muestra, el valor crítico c^* con un nivel de significación α se aproxima mediante $c^*_\alpha = k_\alpha\sqrt{1/n}$, donde k_α es 1.07, 1.22, 1.36, 1.52 y 1.63 para niveles de significación del 20 %, 10 %, 5 %, 2 % y 1 %, respectivamente.

Para el contraste de dos muestras, el valor crítico aproximado se calcula:

$$c^*_\alpha = k_\alpha\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1\cdot n_2}},$$

donde k_α es 1.07, 1.22 y 1.52 para niveles de significación α del 10 %, 5 % y 1 %, respectivamente.

Tablas estadísticas

	x.xx	x.x1	x.x2	x.x3	x.x4	x.x5	x.x6	x.x7	x.x8	x.x9
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993

Cuadro 1: Función de distribución de la $N(0,1)$

r	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.999
1	0.06	0.15	0.27	0.45	0.71	1.07	1.64	2.71	3.84	5.02	6.63	10.83
2	0.45	0.71	1.02	1.39	1.83	2.41	3.22	4.61	5.99	7.38	9.21	13.82
3	1.01	1.42	1.87	2.37	2.95	3.66	4.64	6.25	7.81	9.35	11.34	16.27
4	1.65	2.19	2.75	3.36	4.04	4.88	5.99	7.78	9.49	11.14	13.28	18.47
5	2.34	3.00	3.66	4.35	5.13	6.06	7.29	9.24	11.07	12.83	15.09	20.52
6	3.07	3.83	4.57	5.35	6.21	7.23	8.56	10.64	12.59	14.45	16.81	22.46
7	3.82	4.67	5.49	6.35	7.28	8.38	9.80	12.02	14.07	16.01	18.48	24.32
8	4.59	5.53	6.42	7.34	8.35	9.52	11.03	13.36	15.51	17.53	20.09	26.12
9	5.38	6.39	7.36	8.34	9.41	10.66	12.24	14.68	16.92	19.02	21.67	27.88
10	6.18	7.27	8.30	9.34	10.47	11.78	13.44	15.99	18.31	20.48	23.21	29.59

Cuadro 2: Función de distribución de la χ^2_r.