Examen de Introducción a la Econometría (LECO).

Departamento de Economía Cuantitativa. Universidad Complutense de Madrid.
8 de septiembre de 2007. Duración: **2 horas y 30 minutos**.

Apellidos:	Nombre:	DNI:
Nombre del profesor:		Grupo:

No desgrape las hojas de este cuadernillo. El examen está compuesto por tres problemas y 10 cuestiones cortas. Elija SÓLO DOS DE LOS TRES problemas propuestos y respóndalos en hojas aparte. Las cuestiones cortas deben ser respondidas en el espacio debajo del enunciado en este mismo cuardernillo. Junto a cada pregunta y apartado se indica la puntuación.

Problemas

Problema 1. (2.5 pt.) Sean X e Y las rentabilidades diarias de las acciones de dos empresas que *se cree* que siguen una distribución normal con esperanzas y varianzas desconocidas. La primera empresa (con rentabilidad X) es de pequeño tamaño y se dedica a negocios de alto riesgo. La segunda, cuya rentabilidad es Y, es de mayor tamaño y sus actividades comportan un bajo riesgo.

Se dispone de datos de 20 días de cotización para la primera empresa y 25 para la segunda, con los que se han calculado los siguientes estadísticos:

$\bar{x} = 0.1$	$\sum x_i^2 = 1.76$
$\bar{y} = 0.01$	$\sum y_i^2 = 1.28$

Se quiere contrastar si las acciones de ambas empresas tienen igual rentabilidad esperada con un nivel de significación del 99 %.

1. (0.5 pt) Si cree que debe realizar algún contraste previo, explique porqué y plantee la hipótesis nula, la alternativa y la región crítica de dicho contraste preliminar.
2. (0.5 pt) Plantee la hipótesis nula, la alternativa y la región crítica del contraste óptimo de igualdad de rentabilidades esperadas.
3. (0.75 pt) Resuelva el contraste con los datos disponibles con un nivel de significación del 99 %. ¿Qué consecuencias hubiera tenido realizar el contraste al 90 %?
4. (0.75 pt) Se sabe que la rentabilidad de la primera empresa X, y el volumen negociado de sus acciones, V, tienen una distribución conjunta normal bivariante. También se dispone de la media del volumen negociado $\bar{V} = 4$, de la varianza muestral $s_V^2 = 100$ y de la covarianza muestral con X, $s_{X,V} = 4$. Estime la esperanza de la rentabilidad si el volumen negociado de la empresa ha sido $V = 5$.

Problema 2. (2.5 pt.) Sea X el número de llamadas por minuto que llegan a una centralita telefónica. Se supone que $X \sim P[X = x] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x \geq 0, 1, 2, \ldots$; esto es, sigue una distribución de Poisson con parámetro λ. Se pide:

1. (0.5 pt) Utilice la función generatriz para calcular $E(X)$ y $V(X)$. **Nota**: La función generatriz de momentos de una v.a. $\mathcal{P}(\lambda)$ es $M(t) = e^{[\lambda(e^t-1)]}$.
2. (0.5 pt) Formule la función de verosimilitud para una muestra tamaño n.
3. (0.5 pt) Encuentre la región crítica más potente para contrastar $H_0 : \lambda = 1$ frenta a la alternativa $H_1 : \lambda = 3$.
4. (0.5 pt) Sabiendo que el estadístico $\sum x_i \sim \mathcal{P}(n\lambda)$, donde x_i son los elementos de una muestra aleatoria simple tamaño n, encuentre el valor crítico para un contraste al 5 % de significación con $n = 5$.
5. (0.5 pt) Si con la muestra anterior se obtiene $\bar{x}$ =2.2, ¿cuál es el p-valor del contraste? ¿Qué decisión adoptaría sobre H_0 al 5 % de significación?

Problema 3. (2.5 pt.) Es frecuente oir comentarios sobre si el rendimiento de los estudiantes se evalúa de forma similar en distintas asignaturas o por diferentes profesores de la misma asignatura.

1. (0.5 pt) Si se dispone de las calificaciones de **los mismos estudiantes en dos asignaturas *similares***, ¿cómo contrastaría que la posición central de las calificaciones es igual en las dos asignaturas? Formule la hipótesis nula, la alternativa y escriba el estadístico que emplearía.
2. (0.75 pt) Aplique su respuesta anterior al siguiente conjunto de datos sobre las calificaciones de 10 estudiantes sin hacer ningún supuesto sobre la distribución de las mismas:

Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Asignatura 1	5.6	5.0	7.2	5.5	5.9	4.3	2.8	6.8	6.6	3.8
Asignatura 2	5.9	4.5	6.8	4.6	5.5	4.3	4.6	5.6	5.9	3.2

3. (0.5 pt) ¿Cómo cambiaría su respuesta al **apartado 1** si pudiese suponer normalidad de los datos de calificaciones?
4. (0.75 pt) Utilice el contraste de Kolmogorov-Smirnov para comprobar si los datos de la asignatura 1 siguen la misma distribución que los de la asignatura 2. ¿Es equivalente el resultado del apartado 2 y el obtenido en éste?

Cuestiones cortas. Debe obtener más de 2 puntos en estas preguntas para que se califiquen los problemas.

El siguiente enunciado sirve para las siguientes dos cuestiones. La siguiente tabla recoge la evolución de los precios de tres bienes (A, B y C) desde 2003 hasta 2006.

	A	B	C
2003	800	9	55
2004	850	10	50
2005	1200	18	65
2006	1400	24	75

Cuestión 1. (0.5 pt) Construya la serie de **índices simples** para el bien A con base en 2003 y otra con base en 2006.

Cuestión 2. (0.5 pt) Calcule las tasas de variación anuales para las dos series de **índices simples**. ¿Dependen las tasas de variación de los índices simples del año base que hayamos considerado? Razone la respuesta

El siguiente enunciado sirve para las siguientes tres cuestiones. Para cierto par de variables aleatorias, la función de densidad de Y condicionada a X es $f(y/X = x) = \frac{1}{3-(x/2)}$, $0 < x < 6$, $\frac{x}{2} < y < 3$.

Cuestión 3. (0.5 pt) Halle la esperanza de Y condicionada a X. ¿Cuánto es el valor esperado de Y cuando X toma valores 2, 4 y 6? **Nota:** recuerde que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Cuestión 4. (0.5 pt) Represente gráficamente el soporte de la función de densidad y la función esperanza condicionada. A la vista del resultado anterior ¿son independientes las variables X e Y?

Cuestión 5. (0.5 pt) Sabiendo que $E(Y^2/X=x) = \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$, $0 < x < 6$, calcule la varianza de Y condicionada a X. Si se sabe que $X = 6$ ¿cuánta dispersión habrá en los valores de Y? Razone el resultado.

Cuestión 6. (0.5 pt) Una variable aleatoria bidimensional $(X, Y)'$, se distribuye normal bivariante con vector de esperanzas $(0, 0)'$ y matriz de varianzas covarianzas $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Cuál es la probabilidad de que $(X - Y)$ sea mayor que 1.28 condicionado a que $X = 1$?

Cuestión 7. (0.5 pt) La función generatriz de momentos de una v.a. Poisson con parámetro λ es $M(t) = \exp[\lambda(e^t - 1)]$. Demuestre que si se tienen n variables aleatorias independientes $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, n$, entonces $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{P}(\sum \lambda_i)$.

El siguiente enunciado sirve para las tres últimas cuestiones. Sea la posible función de cuantía conjunta para X e Y, $P(X = x, Y = y) = \frac{x \cdot y}{k}$, en el soporte $x = 0, 1$, $y = 0, 1, 2$.

Cuestión 8. (0.5 pt) Encuentre k para que la función anterior sea una función de cuantía.

Cuestión 9. (0.5 pt) Obtenga las funciones de cuantía marginal de X e Y. ¿Son independientes X e Y?

Cuestión 10. (0.5 pt) Halle la función de cuantía condicionada $P(Y = y/X = 1)$. Calcule $E(Y/X = 1)$.

Fórmulas de posible utilidad

Transformación de variables. Sea $X \sim f_X(x)$ y se define $Y = h(X)$. Entoces $f_Y(y) = f_X\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|$ donde $h^{-1}(\cdot)$ es la *función inversa* de $h(\cdot)$.

Aproximación lineal a la esperanza condicional.

$$E^*(Y/X=x) = E(Y) - \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}E(X) + \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} \cdot x$$

Varianza condicional de la normal bivariante. $V(Y/X=x) = V(Y)(1-\rho^2_{XY})$.

Modelo de regresión lineal. Sea $E(Y_i/X_i = x_i) = a + bx_i$ (o $Y_i = a + bx_i + U_i$, $U_i \underset{iid}{\sim} N(0,\sigma^2)$). Si $\hat{a}$ y $\hat{b}$ son los estimadores por el método de los momentos de a y b, entonces:

$$\frac{\hat{a}-a}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2\sum x_i^2}{T\sum(x_i-\bar{x})^2}}} \sim t_{n-2}; \qquad \frac{\hat{b}-b}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}}} \sim t_{n-2}.$$

Distribuciones de funciones de variables aleatorias. Si $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ y $X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ e independientes y se dispone de muestras de tamaños n, n_1 y n_2 respectivamente:

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1); \qquad \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{s^2/n}} \sim t_{n-1}; \qquad \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}; \qquad \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_s^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$$

$$\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1); \qquad \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\frac{n_1s_1^2+n_2s_2^2}{n_1+n_2-2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

donde s^2 denota la *cuasivarianza* muestral.

Proporciones. $\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \to N(0,1)$. Con dos poblaciones y muestras de tamaños n_1 y n_2:

$$\frac{(\hat{p_1}-\hat{p_2})-(p_1-p_2)}{\sqrt{\left(\frac{n_1+n_2}{n_1\cdot n_2}\right)\hat{p_T}(1-\hat{p_T})}} \to N(0,1),$$

donde $\hat{p_T} = \frac{n_1\hat{p_1}+n_2\hat{p_2}}{n_1+n_2}$.

Contraste de Jarque-Bera. $JB = n\left[\frac{AS^2}{6}+\frac{(K-3)^2}{24}\right] \to \chi^2_2$.

Contraste Chi cuadrado. $\sum_{i=1}^k \frac{(T_i-O_i)^2}{T_i} \sim \chi^2$ donde T_i y O_i son, respectivamente las i-ésimas frecuencias absolutas esperadas y observadas.

Contrastes de Kolmogorov-Smirnov. Para una muestra $D_n = \sup|F_n^*(x)-F(x)|$. Para dos muestras $D_{n,m} = \sup|F_n^*(x)-G_m^*(x)|$. $F_n^*(x)$ y $G_m^*(x)$ son funciones de distribución empíricas (o muestrales) y $F(x)$ es una función de distribución teórica.

Contraste de Wilcoxon. El estadístico $T = T^+ - T^-$, bajo H_0 cumple $E(T)=0$ y $V(T) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Contraste de Mann-Whitney. $U = \text{mín}(U_1,U_2)$, donde $U_1 = n_1n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1$ y $U_2 = n_1n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2$. Bajo H_0 se cumple $E(U) = \frac{n_1n_2}{2}$ y $V(U) = \frac{n_1n_2(n_1+n_2+1)}{12}$.

Aproximación a los valores críticos en los contrastes de Kolmogorov-Smirnov. Para el contraste de una muestra, el valor crítico c^* con un nivel de significación α se aproxima mediante $c^*_\alpha = k_\alpha\sqrt{1/n}$, donde k_α es 1.07, 1.22, 1.36, 1.52 y 1.63 para niveles de significación del 20 %, 10 %, 5 %, 2 % y 1 %, respectivamente.

Para el contraste de dos muestras, el valor crítico aproximado se calcula:

$$c^*_\alpha = k_\alpha\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1\cdot n_2}},$$

donde k_α es 1.07, 1.22 y 1.52 para niveles de significación α del 10 %, 5 % y 1 %, respectivamente.

Tablas estadísticas

	x.xx	x.x1	x.x2	x.x3	x.x4	x.x5	x.x6	x.x7	x.x8	x.x9
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993

Cuadro 1: Función de distribución de la $N(0,1)$

r	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.999
1	0.3249	0.7265	1.3764	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	318.3088
3	0.2767	0.5844	0.9785	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	10.2145
5	0.2672	0.5594	0.9195	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	5.8934
7	0.2632	0.5491	0.8960	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	4.7853
9	0.2610	0.5435	0.8834	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	4.2968
11	0.2596	0.5399	0.8755	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	4.0247
13	0.2586	0.5375	0.8702	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.8520
15	0.2579	0.5357	0.8662	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	3.7328
17	0.2573	0.5344	0.8633	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	3.6458
19	0.2569	0.5333	0.8610	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	3.5794
20	0.2567	0.5329	0.8600	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	3.5518

Cuadro 2: Función de distribución de la t_r.

λ	0.5	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.925	0.95	0.975	0.99	0.999
1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	5
2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	5	5	6	8
3	3	3	4	4	4	4	5	5	6	6	7	8	10
4	4	4	5	5	5	6	6	7	7	8	8	9	11
5	5	5	6	6	6	7	7	8	8	9	10	11	13
7	7	8	8	8	9	9	10	10	11	12	13	14	16
9	9	10	10	10	11	11	12	13	13	14	15	17	20
11	11	12	12	13	13	14	14	15	16	17	18	19	23
13	13	14	14	15	15	16	17	18	18	19	21	22	25
15	15	16	16	17	18	18	19	20	21	22	23	25	28
20	20	21	22	22	23	24	25	26	27	28	29	31	35

Cuadro 3: Función de distribución de la $\mathcal{P}(\lambda)$.