Examen de Introducción a la Econometría (LECO).

Departamento de Economía Cuantitativa. Universidad Complutense de Madrid.

23 de junio de 2010. Duración: **2 horas**.

Apellidos:	Nombre:	DNI:
Nombre del profesor:		Grupo:

No desgrape las hojas de este cuadernillo. El examen está compuesto por diez preguntas tipo test y diez cuestiones cortas. Responda a las preguntas tipo test en la plantilla de ésta página. Las cuestiones tipo test suman tres puntos si la respuesta es correcta, restan un punto si es incorrecta y cero puntos si se deja en blanco. Debe obtener doce puntos en las preguntas tipo test para que se corrijan las cuestiones.

Pregunta 1	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 2	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 3	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 4	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 5	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 6	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 7	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 8	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 9	A	B	C	D	En blanco
Pregunta 10	A	B	C	D	En blanco

Puntos test:	Correctas:	Incorrectas:	En blanco:
Calificación test	Puntos/6=		
Calificación cuestiones			
Calificación total			

Preguntas test

Enunciado para las tres preguntas siguientes. Sea un par de variables aleatorias con función de densidad conjunta $f_{XY}(x,y)$ en el soporte $0 \leq 1-x \leq y \leq 1$.

Pregunta 1. El soporte de la función de densidad viene dado por los vértices:

A) (1,0), (0,1), (1,1).

B) (0,0), (0,1), (1,0).

C) (0,0), (0,1), (1,1).

D) (0,0), (1,0), (1,1).

Pregunta 2. La esperanza de X es:

A) $E(X) = \int_0^1 \int_0^1 f_{XY}(x,y)\, dy\, dx$.

B) $E(X) = \int_0^1 \int_{1-x}^1 x f_{XY}(x,y)\, dy\, dx$.

C) $E(X) = \int_0^1 \int_0^{1-x} x f_{XY}(x,y)\, dy\, dx$.

D) $E(X) = \int_0^1 \int_0^1 x f_{XY}(x,y)\, dy\, dx$.

Pregunta 3. La función de densidad marginal de Y es:

A) $f_Y(y) = \int_{1-y}^1 f_{XY}(x,y)\, dy$.

B) $f_Y(y) = \int_{1-y}^1 f_{XY}(x,y)\, dx$.

C) $f_Y(y) = \int_{1-x}^1 y f_{XY}(x,y)\, dy$.

D) $f_Y(y) = \int_{1-x}^1 f_{XY}(x,y)\, dx$.

Enunciado para las cuatro preguntas siguientes. Sean dos variables aleatorias (X, Y), discretas, que reflejan la siguiente información. Si $X = 1$ se produce un shock positivo de oferta en la economía (por ejemplo, el precio del petroleo se reduce a la mitad), $X = 0$ si la economía no sufre ningún shock (por ejemplo, el precio del petroleo se mantiene alrededor de su media de los últimos meses) y $X = -1$ si el shock es negativo (por ejemplo, el precio del petroleo se dobla). Por su parte, $Y = 1$ si el nivel de empleo aumenta, $Y = 0$ si se mantiene y $Y = -1$ si se reduce el empleo. La siguiente tabla muestra la función de cuantía conjunta:

	$Y=-1$	$Y=0$	$Y=1$
$X=-1$	5/24	3/24	0
$X=0$	2/24	6/24	2/24
$X=1$	1/24	2/24	3/24

Pregunta 4. Sin tener información acerca del shock económico, ¿qué es más probable que ocurra con el empleo?

A) Que aumente.

B) Que disminuya.

C) Que se quede igual.

D) No se puede afirmar nada.

Pregunta 5. Suponga que se aprecia un shock negativo ¿cuál es la probabilidad de que el empleo caiga?

A) 5/8.

B) 2/10.

C) 1/6.

D) 5/24.

Pregunta 6. ¿Cuál es el valor esperado de la variación del empleo si el shock ha sido negativo?

A) 5/8.

B) 6/8.

C) $-6/8$.

D) $-5/8$.

Pregunta 7. A la vista de los resultados anteriores ¿son independientes los shocks de oferta y el empleo?

A) No son independientes.

B) Son independientes.

C) Aproximadamente, son independientes.

D) No se puede saber sin comprobarlo.

Pregunta 8. Sea una población X que se distribuye $N(\mu, 1)$. Se desea contrastar $H_0 : \mu = 5$ frente a $H_1 : \mu > 5$. Se tiene una muestra aleatoria simple de tamaño 16, con $\bar{x} = 5{,}5$, calcule el p-valor del contraste.

A) $\alpha^* = 0{,}0228$.

B) $\alpha^* = 0{,}0456$.

C) $\alpha^* = 0{,}0500$.

D) $\alpha^* = 0{,}0250$.

Enunciado para las dos preguntas siguientes. Sean X e Y los volúmenes de ventas de dos bienes producidos por una empresa, con distribución normal bivariante con vector de esperanzas $\mu = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ y matriz de varianzas-covarianzas $\Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.

Pregunta 9. ¿Cuál es la probabilidad de que el volumen de ventas del primer producto supere el volumen de ventas del segundo?

A) $P(X > Y) = 0{,}1814$.

B) $P(X > Y) = 0{,}0907$.

C) $P(X > Y) = 0{,}0454$.

D) $P(X > Y) \simeq 0$.

Pregunta 10. ¿Cuál es la predicción de ventas del producto Y si se sabe que las ventas del otro producto han sido $X = 8$?

A) $E(Y/X = 8) = 15{,}44$.

B) $E(Y/X = 8) = 14{,}56$

C) $E(Y/X = 8) = 11{,}00$.

D) $E(Y/X = 8) = 8{,}44$.

Cuestiones cortas

Cuestión 1. (0.5 pt) Discuta la veracidad de la siguiente afirmación: "Si la hipótesis nula no es rechazada, entonces es cierta".

Enunciado para las tres cuestiones siguientes. Sea X una variable aleatoria con distribución simétrica alrededor de su esperanza nula ($\mu_1 = 0$ y $\mu_3 = 0$).

Cuestión 2. (0.5 pt) Relacione el momento de tercer orden respecto a la esperanza de X con los momentos respecto al origen de orden 3 ó inferior; esto es, obtenga la función $g(\cdot)$ tal que $E[(X-\alpha_1)^3] = \mu_3 = g(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)$. [Sugerencia: utilice la expansión del binomio $(a-b)^3$].

Cuestión 3. (0.5 pt) Si se define $Y = X^2$, demuestre que $cov(X, Y) = 0$. ¿Son X e Y independientes?

Cuestión 4. (0.5 pt) Si $X \sim N(0, 1)$ ¿Cómo se distribuye Y? Calcule $P(Y > 4)$.

Enunciado para las tres cuestiones siguientes. Sean X e Y variables aleatorias **independientes** con función generatriz de momentos $(1-t^2)^{-1}$ (distribución de Laplace) y con **esperanza nula**.

Cuestión 5. (0.5 pt) Sea $U = X + Y$. Demuestre que la función generatriz de momentos de U es $(1-t^2)^{-2}$ y que la de $V = X - Y$ es idéntica a la de U.

Cuestión 6. (0.5 pt) Encuentre la función generatriz conjunta de U y V.

Cuestión 7. (0.5 pt) Compruebe que U y V no son independientes.

Cuestión 8. (0.5 pt) Un canal de televisión realiza una encuesta a 500 menores de 30 años y la siguiente tabla de contingencia resume la informacón acerca del gusto por las películas de Van Damme y el sexo del entrevistado:

	Gusta	No gusta
Chico	35	312
Chica	8	142

Obtenga el p-valor del estadístico Chi-cuadrado para contrastar la hipótesis nula de independencia entre el sexo del entrevistado y el gusto por las películas de Van Damme.

Enunciado para las dos cuestiones siguientes. Considere una variable aleatoria $X \sim U(a, 1)$. Se desea contrastar $H_0 : a = -1$ frente a la alternativa $H_1 : a > -1$, para lo que se dispone de X_1, una muestra de tamaño $n = 1$.

Cuestión 9. (0.5 pt) Si la región crítica del contraste es $\{X_1 \geq k\}$, halle k para una significación del $\alpha = 0{,}05$.

Cuestión 10. (0.5 pt) Considere las regiones críticas del tipo $\{X_1 \geq k\}$. Calcule el nivel de significación como una función de k y la función de potencia del contraste.

Fórmulas de posible utilidad

Transformación de variables. Sea $X \sim f_X(x)$ y se define $Y = h(X)$. Entoces $f_Y(y) = f_X\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|$ donde $h^{-1}(\cdot)$ es la *función inversa* de $h(\cdot)$.

Aproximación lineal a la esperanza condicional.

$$E^*(Y/X=x) = E(Y) - \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} \cdot E(X) + \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} \cdot x$$

Varianza condicional de la normal bivariante. $V(Y/X=x) = V(Y)(1-\rho^2_{XY})$.

Modelo de regresión lineal. Sea $E(Y_i/X_i = x_i) = a + bx_i$ (o también $Y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$, $\varepsilon_i \underset{iid}{\sim} N(0,\sigma^2_\varepsilon)$). Si $\hat{a}$ y $\hat{b}$ son los estimadores por el método de los momentos (o de mínimos cuadrados) de a y b, y $\hat{\varepsilon}_i$ los residuos del modelo, entonces:

$$\frac{\hat{a}-a}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2_\varepsilon \sum x_i^2}{T\sum(x_i-\bar{x})^2}}} \sim t_{n-2}, \qquad \frac{\hat{b}-b}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2_\varepsilon}{\sum(x_i-\bar{x})^2}}} \sim t_{n-2}; \qquad \text{donde} \qquad \hat{\sigma}^2_\varepsilon = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2.$$

Distribuciones de funciones de variables aleatorias. Si $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ y $X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ e independientes y se dispone de muestras de tamaños n, n_1 y n_2 respectivamente:

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1); \qquad \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{s^2/n}} \sim t_{n-1}; \qquad \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}; \qquad \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$$

$$\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1); \qquad \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}} \sim t_{n+m-2},$$

donde s^2 denota la *cuasivarianza* muestral.

Proporciones. $\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \to N(0,1)$. Con dos poblaciones y muestras de tamaños n_1 y n_2:

$$\frac{(\hat{p_1}-\hat{p_2})-(p_1-p_2)}{\sqrt{\left(\frac{n_1+n_2}{n_1\cdot n_2}\right)\hat{p_T}(1-\hat{p_T})}} \to N(0,1),$$

donde $\hat{p_T} = \frac{n_1\hat{p_1}+n_2\hat{p_2}}{n_1+n_2}$.

Contraste de Jarque-Bera. $JB = n\left[\frac{AS^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24}\right] \to \chi^2_2$.

Contraste Chi cuadrado. $\sum_{i=1}^k \frac{(T_i-O_i)^2}{T_i} \sim \chi^2$ donde T_i y O_i son, respectivamente las i-ésimas frecuencias absolutas esperadas y observadas.

Contrastes de Kolmogorov-Smirnov. Para una muestra $D_n = \sup|F_n^*(x) - F(x)|$. Para dos muestras $D_{n,m} = \sup|F_n^*(x) - G_m^*(x)|$. $F_n^*(x)$ y $G_m^*(x)$ son funciones de distribución empíricas (o muestrales) y $F(x)$ es una función de distribución teórica.

Contraste de Wilcoxon. El estadístico $T = T^+ - T^-$, bajo H_0 cumple $E(T) = 0$ y $V(T) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Contraste de Mann-Whitney. $U = \text{mín}(U_1,U_2)$, donde $U_1 = n_1n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1$ y $U_2 = n_1n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2$. Bajo H_0 se cumple $E(U) = \frac{n_1n_2}{2}$ y $V(U) = \frac{n_1n_2(n_1+n_2+1)}{12}$.

Aproximación a los valores críticos en los contrastes de Kolmogorov-Smirnov. Para el contraste de una muestra, el valor crítico c^* con un nivel de significación α se aproxima mediante $c^*_\alpha = k_\alpha\sqrt{1/n}$, donde k_α es 1.07, 1.22, 1.36, 1.52 y 1.63 para niveles de significación del 20 %, 10 %, 5 %, 2 % y 1 %, respectivamente.

Para el contraste de dos muestras, el valor crítico aproximado se calcula:

$$c^*_\alpha = k_\alpha\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1\cdot n_2}},$$

donde k_α es 1.07, 1.22 y 1.52 para niveles de significación α del 10 %, 5 % y 1 %, respectivamente.

Tablas estadísticas

	x.xx	x.x1	x.x2	x.x3	x.x4	x.x5	x.x6	x.x7	x.x8	x.x9
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993

Cuadro 1: Función de distribución de la $N(0,1)$

Operaciones