MODELO SOLOW

MODELO

Rendimientos constantes a escala y decrecientes en uso de factores.
Tasa de ahorro exógena, ***s***.
Crecimiento exógeno, a tasa ***g***, de eficiencia del trabajo.
Equilibrio mercado de bienes y de factores.
Crecimiento exógeno de población, ***n***.

$$Y = K^{\alpha}\left(AN\right)^{1-\alpha} \qquad (1)$$

$$sY = \dot{K} + \delta K \qquad (2)$$

$$\frac{\dot{A}}{A} = g\,; \quad \frac{\dot{N}}{N} = n \qquad (3)$$

En magnitudes por unidad de trabajo efectivo:

$$y \equiv \frac{Y}{AN}; \quad k \equiv \frac{K}{AN};$$

$$y = k^{\alpha}$$

Dinámica

Dividiendo (2) por AN, teniendo en cuenta definiciones de las variables transformadas y las ecuaciones (1) y (3), se obtiene la siguiente ecuación dinámica (en tiempo continuo):

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - (n+\delta+g)k$$

Tiempo discreto (ver Apéndice B):

$$k_{t+1} - k_t = \frac{sk_t^{\alpha} + \left[(1-\delta) - (1+n)(1+g)\right]k_t}{(1+n)(1+g)}$$

Estado estacionario (EE):

- Definición: $\gamma_y = cte. \;\Rightarrow\; \gamma_k = cte.$

Implicación para Modelo de Solow $\Rightarrow \dot{k} = o$ **(ver Apéndice A)** debido a los rendimientos constantes a escala.

Luego los valores de *k* e *y* en el EE son:

$$k^* = \left[\frac{s}{n + \delta + g} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$y^* = \left[\frac{s}{n + \delta + g} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

(Ver Figura 2.1)

En tiempo discreto (ver Apéndice B):

$$k^* = \left[\frac{s}{(1+n)(1+g) - (1-\delta)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$y^* = \left[\frac{s}{(1+n)(1+g) - (1-\delta)} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Renta per cápita

$$y_c \equiv \frac{Y}{N}$$

En EE:

$$y_{Ct} \equiv y^* A_t \qquad\qquad y_{Ct} = \left[\frac{s}{n+\delta+g}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_t$$

En EE y_c crece a *g* y el capital por trabajador también.

Dinámica comparativa:

Ante un aumento de ***s*** $\uparrow s \rightarrow \dot{k}, \dot{y}$ > 0, por ecuación dinámica. Renta per cápita crece en la transición por encima de *g*.

Ver Figuras 2.2, 2.3 y 2.4

Salario Real:

$$\omega = \frac{\partial Y}{\partial N} = A(1-\alpha)k^{\alpha}$$

REGLA DE ORO

En EE:

$$c^* = (1-s)y^*$$

$$c^* = (1-s)\left[\frac{s}{n+\delta+g}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Regla de Oro: **EE con *c* máximo**.

$$\frac{\partial c^*}{\partial s} = 0 \quad \rightarrow \quad s_{RO} = \alpha$$

(¡ojo! caso particular: caso general $f'(k_{RO}) = n + \delta + g$)

(Figura 2.5)

Concepto de Estado DINAMICAMENTE INEFICIENTE.

Todo EE con un $s > s_{RO}$ es DINAMICAMENTE INEFICIENTE

(Ver Figura 2.6)

TRANSICION AL ESTADO ESTACIONARIO

Desarrollo en serie de Taylor de ecuación dinámica alrededor de *k**:

$$\dot{k}_t \simeq s(k^*)^\alpha - (n + \delta + g)k^* + \left[s\alpha(k^*)^{\alpha-1} - (n + \delta + g) \right](k_t - k^*)$$

El primer sumando es cero y utilizando la condición de Estado Estacionario en el corchete del segundo:

$$\dot{k}_t \simeq \left[\frac{s\alpha(k^*)^{\alpha-1}(n + \delta + g)k^*}{s(k^*)^\alpha} - (n + \delta + g) \right](k_t - k^*) =$$

$$= (\alpha - 1)(n + \delta + g)(k_t - k^*) = -(1 - \alpha)(n + \delta + g)(k_t - k^*)$$

Las variaciones de *k* dependen negativamente de la distancia al Estado Estacionario.

La solución a la ecuación diferencial es:

$$k_t - k^* = e^{-\lambda t}\left(k_0 - k^*\right) \qquad \lambda \equiv (1-\alpha)(n+\delta+g)$$

Cada período se cubrirá un λ por uno de la distancia inicial del Estado Estacionario.

PIB PER CAPITA Y PIB POR TRABAJADOR

$$PIB\ per\ cápita\,(y_C) \equiv \frac{PIB}{Poblacion}$$
$$PIB\ x\ trabajador\,(y) \equiv \frac{PIB}{N}$$

Luego:

$$y_C = y\, x \frac{N}{POB}$$

CONTABILIDAD DE CRECIMIENTO

Vamos a suponer la siguiente función de producción:

$$Y_t = Z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

que se diferencia de la anterior en que el progreso técnico afecta de igual forma a todos los factores (*Progreso técnico neutral en el sentido de Hicks*), mientras que en la función inicial afectaba a la eficiencia con la que el trabajo es utilizado (*Progreso técnico neutral en el sentido de Harrod*).

Tomando logs y derivando respecto al tiempo:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{Z}}{Z} + \alpha \frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)\frac{\dot{N}}{N}$$

Descompone el crecimiento del PIB en la aportación del capital, el empleo y el progreso técnico o productividad total de los factores (PTF). Con datos de Y, K y N se puede computar el crecimiento de Z, es decir de la PTF.

Para descomponer el crecimiento entre el año 0 y el año T y calcular el crecimiento de la PTF entre esas dos fechas:

$$\frac{\Delta PTF(T-0)}{PTF_0}=\left[\frac{1}{T}\left(\ln Y_T-\ln Y_0\right)-\alpha\frac{1}{T}\left(\ln K_T-\ln K_0\right)-\left(1-\alpha\right)\frac{1}{T}\left(\ln N_T-\ln N_0\right)\right]\times 100$$

EL MODELO DE SOLOW Y LOS DATOS DEL CRECIMIENTO

Si ***A*** fuera constante (supongamos que igual a 1):

$$y=k^{\alpha} \quad y\equiv\frac{Y}{N} \quad k\equiv\frac{K}{N}$$

En el s. XX el producto por trabajador en EE.UU. se ha multiplicado por 8. Si α = 1/3, para que el aumento de ***k*** explique este hecho tendría que haberse multiplicado por 512, cuando realidad se ha multiplicado por poco más de ocho. Luego el aumento de ***k*** explicaría solamente la **duplicación** de ***y***.

Por otra parte, el producto por trabajador puede ser 15 o 20 veces mayor en un grupo de países que en otros. Las diferencias en tasas de ahorro entre países ricos y pobres no son mayores que 3 veces y también hay apreciables diferencias en el crecimiento de la población (por ejemplo, 3% en los países pobres y 0,5% en los ricos). ¿Pero cuánta diferencia en el producto por trabajador es explicada por esas diferencias en ***s*** y en ***n*** si no hubiera diferencias en ***A***?

Suponiendo que se cumple la expresión de $\boldsymbol{y_{ct}}$ en EE para los dos grupos de países (ricos, R, y pobres, P) tomando logaritmos y bajo el supuesto de que **α, δ** y ***g***, y también ***A***, son iguales para los dos grupos se obtiene:

$$\ln\frac{y_R}{y_P}=\frac{\alpha}{1-\alpha}\left[\ln\frac{s_R}{s_P}-\ln\frac{(n_R+\delta+g)}{(n_P+\delta+g)}\right]$$

Si suponemos que $\alpha=\frac{1}{3};\ \delta=0.07;\ g=0.015$, las diferencias en ***s*** y en ***n*** indicadas más arriba explican un múltiplo de **1,96** (el 82% por las diferencias en ***s*** y un 18% las diferencias en ***n***). Muy lejos del múltiplo de 15 o 20 que se puede dar en la realidad. La mayor parte lo explicarían las diferencias en ***A***.

FIGURAS

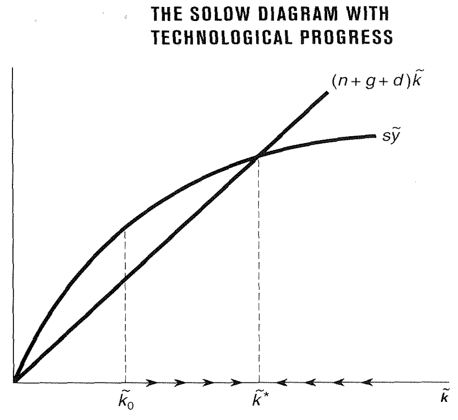


Figura 2.1

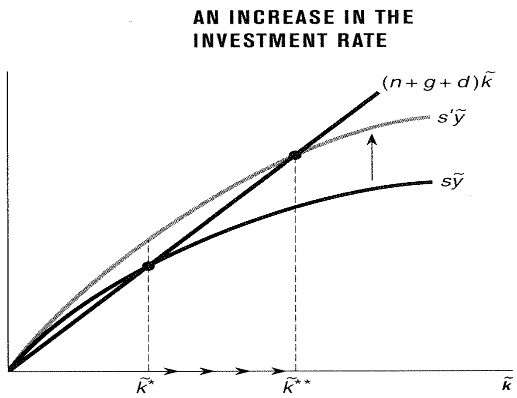
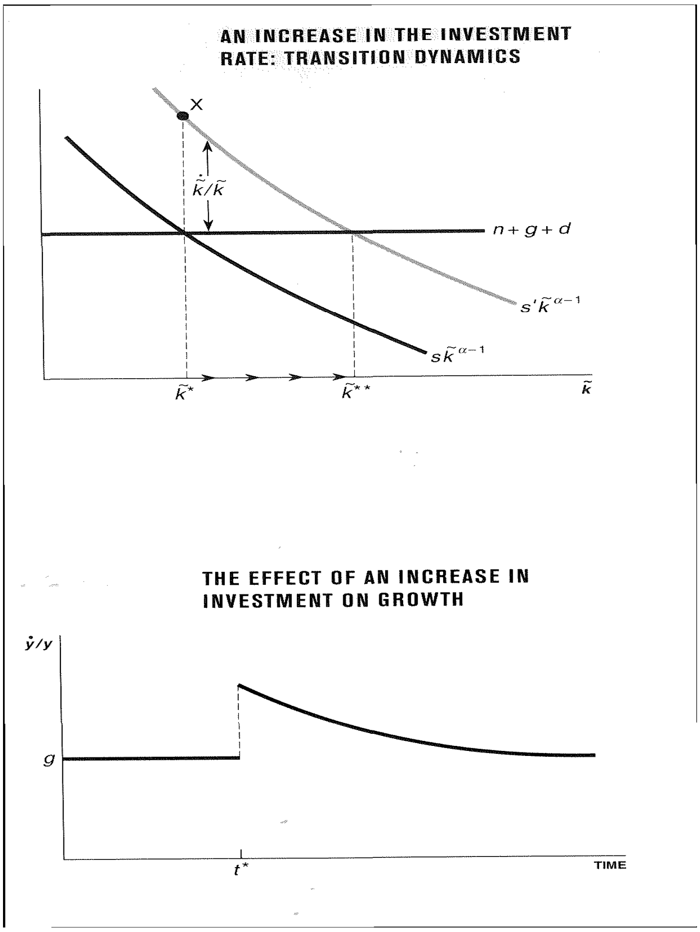
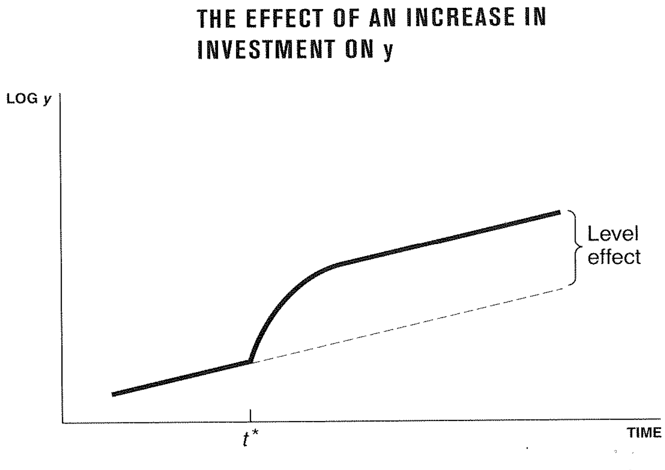


Figura 2.2

Figuras 2.3 y 2.4





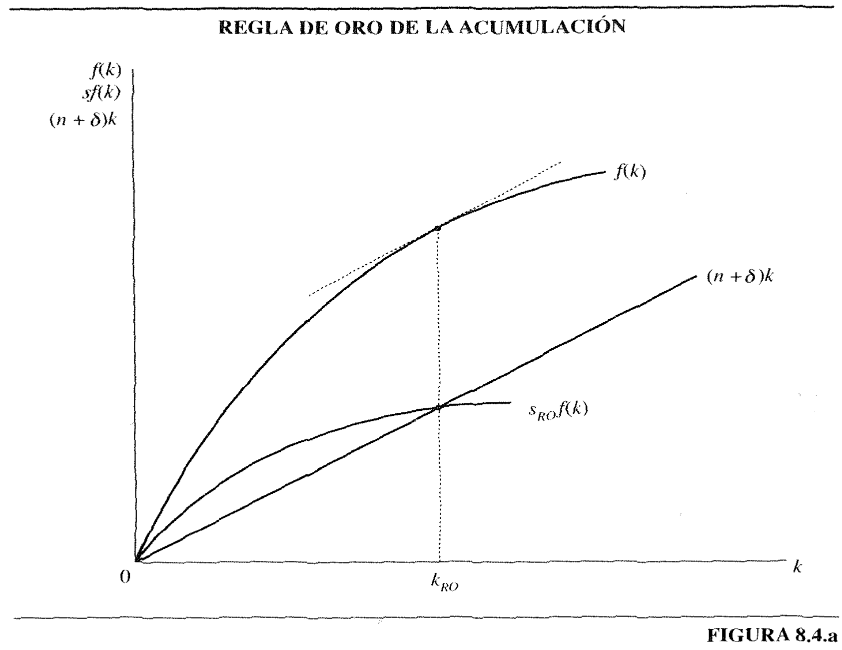


Figura 2.5

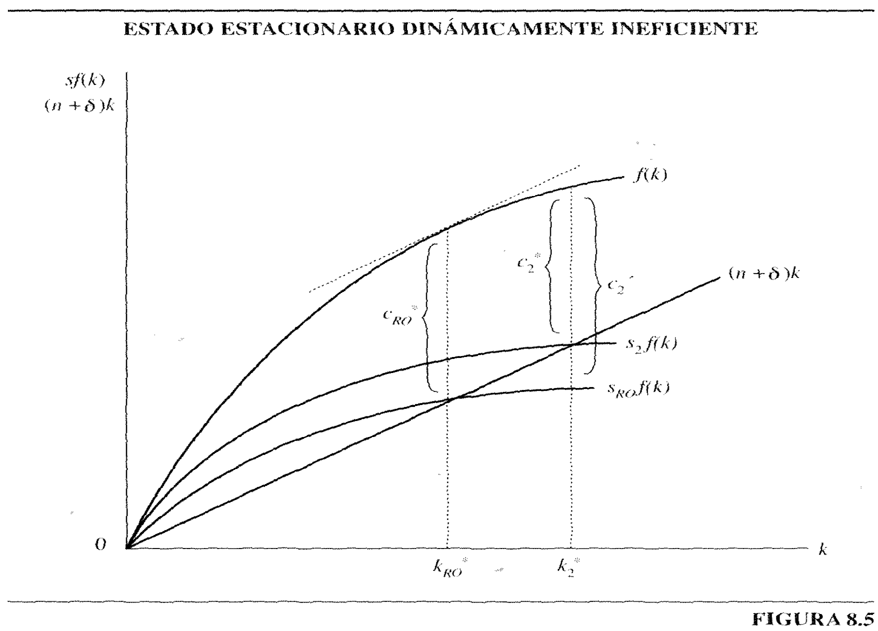


Figura 2.6

APÉNDICE A
Rendimiento a escala y Estado Estacionario

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - (n+\delta+g)k$$

$$\gamma_k \equiv \frac{\dot{k}}{k} = sk^{\alpha-1} - \left(n+\delta+g\right)$$

$$\frac{\gamma_k + n + \delta + g}{s} = k^{\alpha-1}$$

$$\ln\left[\frac{\gamma_k + n + \delta + g}{s}\right] = \left(\alpha - 1\right)\ln k$$

Estado Estacionario = crecimiento constante de magnitudes per cápita

La derivada respecto al tiempo del lado izquierdo en el Estado Estacionario (EE) **tiene que ser cero** (porque en EE γ constante). Luego en Estado Estacionario, derivando respecto al tiempo:

$$0 = \left(\alpha - 1\right)\gamma^{*}{}_{k}$$

Pero como $\alpha<1$:

$$\gamma^{*}{}_{k} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{k} = 0$$

APÉNDICE B
Formulación en tiempo discreto

La restricción de ahorro en tiempo discreto es:

$$sY_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t$$

La función de producción en términos de unidades de eficiencia:

$$y_t = k_t^{\alpha}$$

La ecuación dinámica en términos de unidades de trabajo efectivo:

$$s\,y_t = k_{t+1}\left(1+n\right)\left(1+g\right) - \left(1-\delta\right)k_t$$

Que puede expresarse como:

$$k_{t+1} = \frac{sk_t^{\alpha} + \left(1-\delta\right)k_t}{\left(1+n\right)\left(1+g\right)}$$

Restando k_t de ambos lados, en EE el lado izquierdo será cero, por lo que dividiendo ambos lados por k_t se obtiene:

$$k^* = \left[\frac{s}{(1+n)\left(1+g\right) - (1-\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$y^* = \left[\frac{s}{(1+n)\left(1+g\right) - (1-\delta)}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$