MODELO SOLOW

Formulación del modelo

Supuestos:

Rendimientos constantes a escala y rendimientos decrecientes en el uso de factores (función de producción 1).
Tasa de ahorro exógena, ***s***.
Crecimiento exógeno, a tasa ***g***, de eficiencia del trabajo.
Equilibrio en el mercado de bienes, lo que supone igualdad ahorro e inversión (ecuación 2) y en el mercado de factores, lo que supone que la población activa está ocupada, por lo que el crecimiento del empleo es el mismo que el crecimiento de la población activa (ecuación 3).
Crecimiento exógeno de población, ***n***, y constancia de la tasa de actividad.

El modelo;

$$Y=K^{\alpha}\left(AN\right)^{1-\alpha} \qquad (1)$$

$$sY=\dot{K}+\delta K \qquad (2)$$

$$\frac{\dot{A}}{A}=g\,; \quad \frac{\dot{N}}{N}=n \qquad (3)$$

En magnitudes por unidad de trabajo efectivo:

$$y\equiv\frac{Y}{AN}; \quad k\equiv\frac{K}{AN};$$

$$y=k^{\alpha}$$

Dinámica

Dividiendo (2) por AN, teniendo en cuenta definiciones de las variables transformadas y las ecuaciones (1) y (3), se obtiene la siguiente ecuación dinámica (en tiempo continuo):

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - (n+\delta+g)k$$

porque

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}(AN) - K\left(\dot{A}N + \dot{N}A\right)}{(AN)^2} = \frac{\dot{K}}{AN} - k(g+n)$$

Estado estacionario (EE):

- Definición: $\gamma_y = cte. \;\Rightarrow\; \gamma_k = cte.$

Implicación para Modelo de Solow $\Rightarrow \dot{k} = o$ **(ver Apéndice A)** debido a los rendimientos constantes a escala.

Luego los valores de *k* e *y* en el EE son:

$$k^* = \left[\frac{s}{n+\delta+g}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$y^* = \left[\frac{s}{n+\delta+g}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

(Ver Figura 2.1)

Renta per cápita

$$y_c \equiv \frac{Y}{N}$$

En EE:

$$y_{Ct} \equiv y^* A_t \qquad\qquad y_{Ct} = \left[\frac{s}{n+\delta+g} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_t$$

En EE y_c crece a g y el capital por trabajador también.

Modelo en Tiempo discreto (ver Apéndice B):

Dinámica comparativa:

Ante un aumento de ***s*** $\uparrow s \rightarrow \dot{k}, \dot{y} > 0$, por ecuación dinámica. Renta per cápita crece en la transición por encima de g.

Ver Figuras 2.2, 2.3 y 2.4

Salario Real:

$$\omega = \frac{\partial Y}{\partial N} = A(1-\alpha)k^{\alpha}$$

En el EE crece a g, como la renta per cápita.

REGLA DE ORO

Regla de Oro: **EE con *c* máximo**.

En EE:

$$c^* = (1-s)y^*$$

$$c^* = (1-s)\left[\frac{s}{n+\delta+g}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\frac{\partial c^*}{\partial s} = 0$$

$$-\left[\frac{s}{n+\delta+g}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + (1-s)\frac{\alpha}{1-\alpha}\left[\frac{s}{n+\delta+g}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}\frac{1}{n+\delta+g} = 0$$

$$\textit{dividiendo por}\left[\frac{s}{n+\delta+g}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}$$

$$-\frac{s}{n+\delta+g} + \frac{\alpha(1-s)}{(1-\alpha)(n+\delta+g)} = 0$$

$\textit{Luego}:$

$$s_{RO} = \alpha$$

(¡ojo! caso particular: caso general $f'(k_{RO}) = n + \delta + g$)

(Figura 2.5)

Concepto de Estado DINAMICAMENTE INEFICIENTE.

Todo EE con un $\boldsymbol{s} > \boldsymbol{s_{RO}}$ es DINAMICAMENTE INEFICIENTE: En un estado así se puede elevar el consumo per cápita de forma permanente reduciendo la tasa de ahorro a $\boldsymbol{s_{RO}}$. El ahorro era excesivo y no facilitaba un consumo mayor. En un estado con $\boldsymbol{s} < \boldsymbol{s_{RO}}$ una elevación de la tasa de ahorro reduciría el consumo a corto plazo pero lo elevaría más adelante.

(Ver Figura 2.6)

TRANSICION AL ESTADO ESTACIONARIO

Desarrollo en serie de Taylor de ecuación dinámica alrededor de *k**:

$$\dot{k}_t \simeq s(k^*)^{\alpha} - (n + \delta + g)k^* + \left[s\alpha(k^*)^{\alpha-1} - (n + \delta + g)\right](k_t - k^*)$$

El primer sumando es cero y utilizando la condición de Estado Estacionario en el corchete del segundo:

$$\dot{k}_t \simeq \left[\frac{s\alpha(k^*)^{\alpha-1}(n + \delta + g)k^*}{s(k^*)^{\alpha}} - (n + \delta + g)\right](k_t - k^*) =$$

$$= (\alpha - 1)(n + \delta + g)(k_t - k^*) = -(1 - \alpha)(n + \delta + g)(k_t - k^*)$$

Las variaciones de k dependen negativamente de la distancia al Estado Estacionario.

La solución a la ecuación diferencial es:

$$k_t - k^* = e^{-\lambda t}\left(k_0 - k^*\right) \qquad \lambda \equiv (1-\alpha)(n+\delta+g)$$

Cada período se cubrirá un λ por uno de la distancia inicial del Estado Estacionario.

PIB PER CAPITA Y PIB POR TRABAJADOR

$$PIB\ per\ cápita\,(y_C) \equiv \frac{PIB}{Poblacion}$$
$$PIB\ x\ trabajador\,(y) \equiv \frac{PIB}{N}$$

Luego:

$$y_C = y\ x \frac{N}{POB}$$

CONTABILIDAD DE CRECIMIENTO

Vamos a suponer la siguiente función de producción:

$$Y_t = Z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

que se diferencia de la anterior en que el progreso técnico afecta de igual forma a todos los factores (*Progreso técnico neutral en el sentido de Hicks*), mientras que en la función inicial afectaba a la eficiencia con la que el trabajo es utilizado (*Progreso técnico neutral en el sentido de Harrod*).

Tomando logs y derivando respecto al tiempo:

$$\frac{\dot{Y}}{Y}=\frac{\dot{Z}}{Z}+\alpha\frac{\dot{K}}{K}+(1-\alpha)\frac{\dot{N}}{N}$$

Descompone el crecimiento del PIB en la aportación del capital, el empleo y el progreso técnico o productividad total de los factores (PTF). Con datos de Y, K y N se puede computar el crecimiento de Z, es decir de la PTF.

Para descomponer el crecimiento entre el año 0 y el año T y calcular el crecimiento de la PTF entre esas dos fechas:

$$\frac{\Delta PTF(T-0)}{PTF_0}=\left[\frac{1}{T}\left(\ln Y_T-\ln Y_0\right)-\alpha\frac{1}{T}\left(\ln K_T-\ln K_0\right)-\left(1-\alpha\right)\frac{1}{T}\left(\ln N_T-\ln N_0\right)\right]\times 100$$

El PIB por trabajador, o productividad media:

$$y=Zk^{\alpha}\qquad y\equiv\frac{Y}{N}\qquad k\equiv\frac{K}{N}$$

Luego:

$$\frac{\dot{y}}{y}=\alpha\frac{\dot{k}}{k}+\frac{\dot{Z}}{Z}$$

que descompone el crecimiento del PIB por trabajador en contribución del *capital deepening* (crecimiento del capital por empleado) y productividad total de los factores.

EL MODELO DE SOLOW Y LOS DATOS DEL CRECIMIENTO

Si ***A*** fuera constante (supongamos que igual a 1):

$$y = k^{\alpha} \qquad y \equiv \frac{Y}{N} \qquad k \equiv \frac{K}{N}$$

En el s. XX el producto por trabajador en EE.UU. se ha multiplicado por 8. Si α = 1/3, para que el aumento de ***k*** explique este hecho tendría que haberse multiplicado por 512, cuando realidad se ha multiplicado por poco más de ocho. Luego el aumento de ***k*** explicaría solamente la **duplicación** de ***y***.

Por otra parte, el producto por trabajador puede ser 15 o 20 veces mayor en un grupo de países que en otros. Las diferencias en tasas de ahorro entre países ricos y pobres no son mayores que 3 veces y también hay apreciables diferencias en el crecimiento de la población (por ejemplo, 3% en los países pobres y 0,5% en los ricos). ¿Pero cuánta diferencia en el producto por trabajador es explicada por esas diferencias en ***s*** y en ***n*** si no hubiera diferencias en ***A***?

Suponiendo que se cumple la expresión de y_{ct} en EE para los dos grupos de países (ricos, R, y pobres, P) tomando logaritmos y bajo el supuesto de que **α, δ** y ***g***, y también ***A***, son iguales para los dos grupos se obtiene:

$$\ln\frac{y_R}{y_P} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[\ln\frac{s_R}{s_P} - \ln\frac{(n_R+\delta+g)}{(n_P+\delta+g)}\right]$$

Si suponemos que $\alpha = \frac{1}{3}$; $\delta = 0.07$; $g = 0.015$, las diferencias en ***s*** y en ***n*** indicadas más arriba explican un múltiplo de **1,96** (el 82% por las diferencias en ***s*** y un 18% las diferencias en ***n***). Muy lejos del múltiplo de 15 o 20 que se puede dar en la realidad. La mayor parte lo explicarían las diferencias en ***A***.

FIGURAS

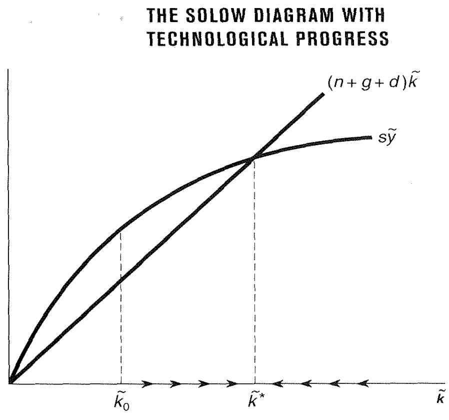


Figura 2.1

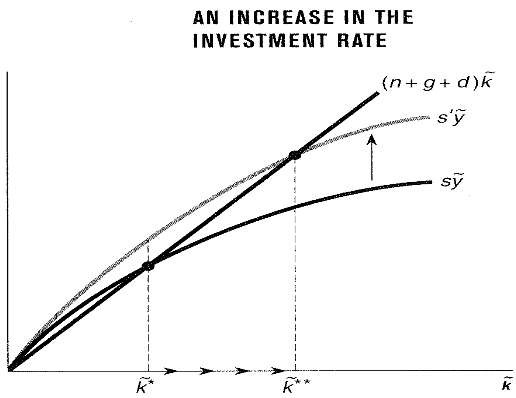
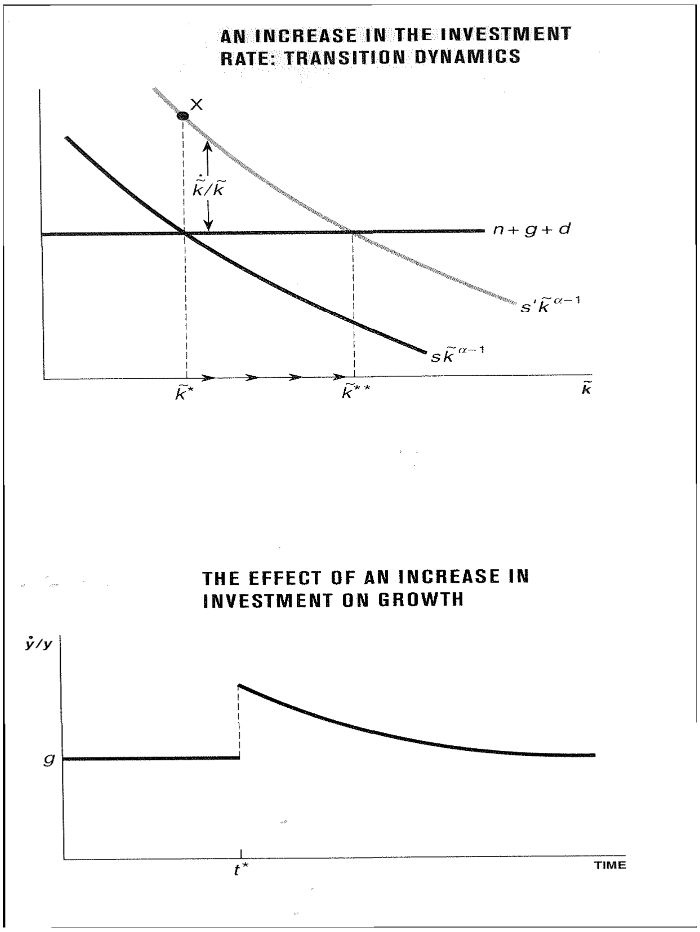
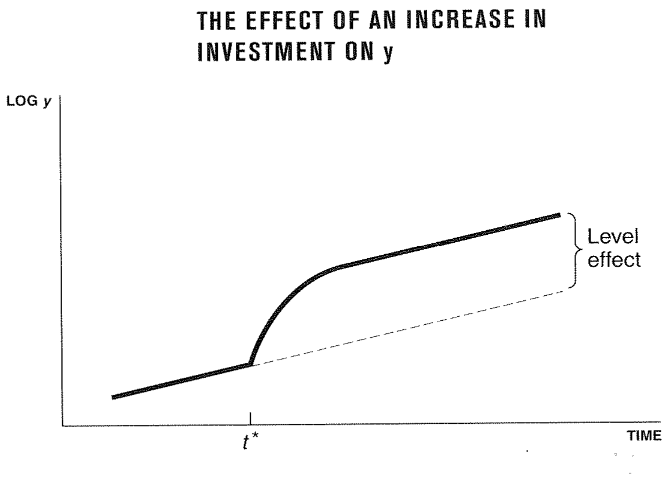


Figura 2.2

Figuras 2.3 y 2.4





REGLA DE ORO DE LA ACUMULACIÓN

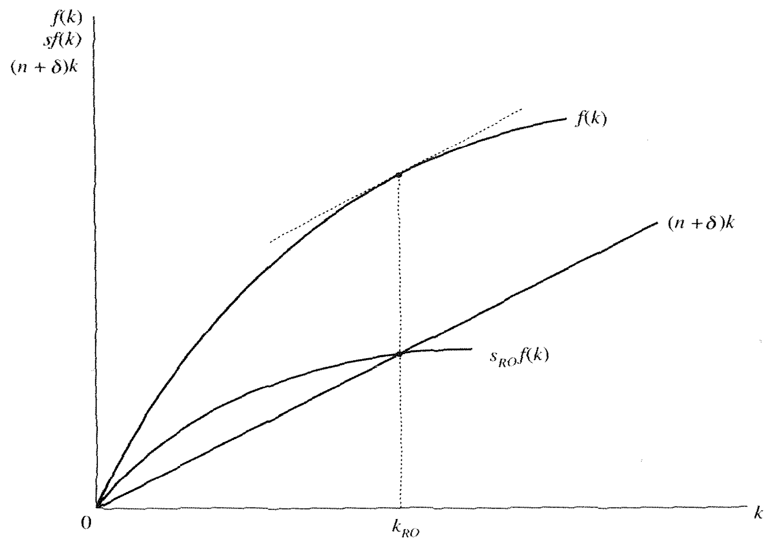


FIGURA 8.4.a

Figura 2.5

ESTADO ESTACIONARIO DINÁMICAMENTE INEFICIENTE

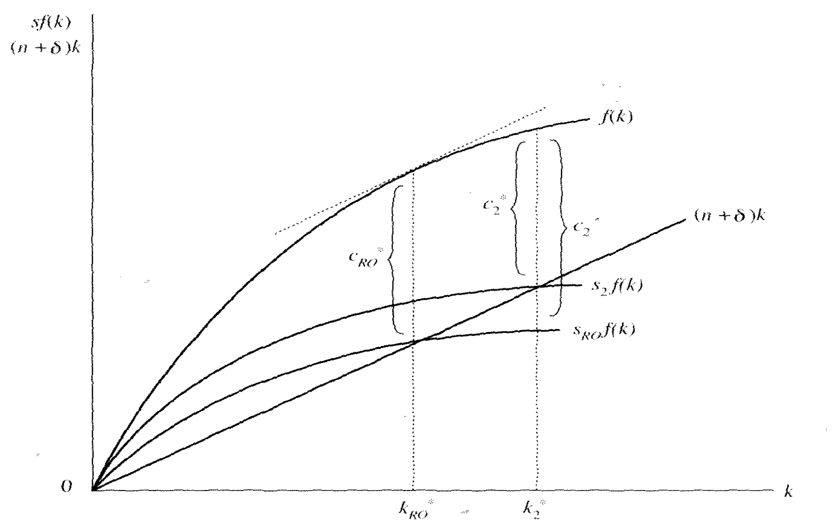


FIGURA 8.5

Figura 2.6

APÉNDICE A
Rendimiento a escala y Estado Estacionario

$$\dot{k}=sk^{\alpha}-(n+\delta+g)k$$

$$\gamma_k \equiv \frac{\dot{k}}{k}=sk^{\alpha-1}-\left(n+\delta+g\right)$$

$$\frac{\gamma_k+n+\delta+g}{s}=k^{\alpha-1}$$

$$\ln\left[\frac{\gamma_k+n+\delta+g}{s}\right]=\left(\alpha-1\right)\ln k$$

Estado Estacionario = crecimiento constante de magnitudes per cápita

La derivada respecto al tiempo del lado izquierdo en el Estado Estacionario (EE) **tiene que ser cero** (porque en EE γ constante). Luego en Estado Estacionario, derivando respecto al tiempo:

$$0=\left(\alpha-1\right)\gamma^{*}{}_{k}$$

Pero como α<1:

$$\gamma^{*}{}_{k}=0 \quad \rightarrow \quad \dot{k}=0$$

APÉNDICE B
Formulación en tiempo discreto

La restricción de ahorro en tiempo discreto es:

$$sY_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t$$

La función de producción en términos de unidades de eficiencia:

$$y_t = k_t^{\alpha}$$

La ecuación dinámica en términos de unidades de trabajo efectivo:

$$s\,y_t = k_{t+1}(1+n)(1+g) - (1-\delta)k_t$$

Que puede expresarse como:

$$\boxed{k_{t+1} = \frac{sk_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t}{(1+n)(1+g)}}$$

$$\boxed{k_{t+1} - k_t = \frac{sk_t^{\alpha} + \left[(1-\delta) - (1+n)(1+g)\right]k_t}{(1+n)(1+g)}}$$

$$k^{*}=\left[\frac{s}{(1+n)\left(1+g\right)-(1-\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$y^{*}=\left[\frac{s}{(1+n)\left(1+g\right)-(1-\delta)}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$