Математический язык универсален. Он дает возможность выяснить многие вопросы грамматики и установить схемы, объясняющие синтаксическую структуру фраз современных или старых языков.

4. Преподаватель математики отвечает за усвоение учащимися возможности использовать математику. Он должен иметь открытую позицию перед лицом запросов со стороны тех, кто применяет математику.

С помощью координирования преподавания, преподаватели математики и других предметов науки должны познакомить учащихся с различными приложениями, увеличивая смену в двух направлениях: к математике и исходя из нее.

PEDRO ABELLANAS (Espagne): LE PRODUIT TENSORIEL ET LE PRODUIT EXTÉRIEUR DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

O. L'importance du produit tensoriel et du produit extérieur dans la mathématique, la physique et les autres sciences expérimentales est bien connue. Alors l'introduction de ces concepts dès l'enseignement secondaire semble un fait naturel. Mais il y a d'autres raisons. Ces concepts permettent de présenter quelques idées de la mathématique et de la physique d'une façon plus organisée et plus didactique. Nous allons présenter ici quelques exemples.

§ 1. **L'aire d'un polygone** (âge: 13—14 ans)

1. L'élève connaît la mesure des segments de droite et que l'ensemble des segments (plus exactement, l'ensemble des classes des segments par rapports à la relation d'équivalence définie par les mouvements du plan) a la structure d'espace vectoriel réel. Nous noterons par **V** cet espace vectoriel ayant la dimension 1.

Soit $\mathfrak{P}$ l'ensemble des polygones du plan. Dans $\mathfrak{P}$ on définit la relation E de la façon suivante: $\forall\ \mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathfrak{P}, \mathbf{P}\ E\ \mathbf{Q} \Leftrightarrow \mathbf{P} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{T}_i,\ \mathbf{Q} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{T}'_i$, et $\mathbf{T}_i = \mathbf{T}'_i,\ i = 1 \ldots n$; où $\mathbf{T} = \mathbf{T}'$ veut dire qu'il y a un mouvement plan qui transforme $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}'$. E est une relation d'équivalence. Soit P l'ensemble quotient et soit $[\mathbf{P}]$ la classe qui contient le polygone $\mathbf{P}$.

2. *Dans* $[\mathbf{P}]$ *il y a des rectangles*

Démonstration

(i) Soit le triangle $\mathbf{T} = ABC$. La construction bien connue de la Fig. 1 montre que $(ABC)\ E\ (TSQM)$.

(ii) Deux triangles qui ont la même base et la même hauteur sont équivalents. C'est une conséquence immédiate de (i).

(iii) Etant donnés un triangle ABC et un segment u, il y a un triangle ADE, tel que $(ABC)\ E\ (ADE)$ et $AD = u$. La Fig. 2, où $DC \parallel BE$, montre la construction.

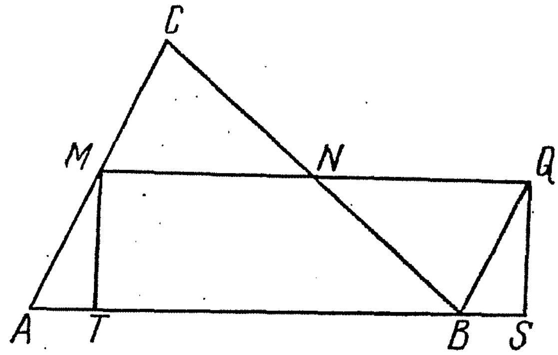


Fig. 1

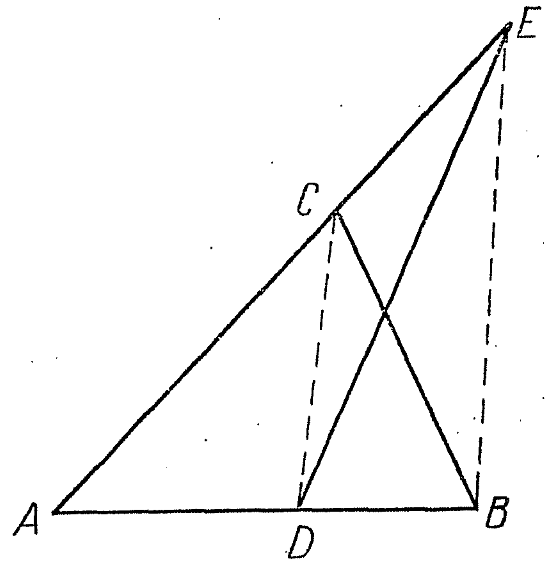


Fig. 2

(iv) Tout triangle est équivalent à un rectangle avec un de ses côtés égal à un segment donné. C'est une conséquence de (iii).

(v) Soit $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{T}_i$ une division de $\mathbf{P}$ en triangles et soit u un segment. En vertu de (iv) il y a des rectangles R_i, $i = 1 \ldots, n$, équivalents à $\mathbf{T}_i$ et avec un côté égal à u. Le rectangle $\mathbf{R}$ ayant un côté égal à u et l'autre côté égal à la somme des côtés des rectangles $\mathbf{R}_i$ qui sont distincts de u, est équivalent à $\mathbf{P}$, d'où: $\mathbf{R} \in [\mathbf{P}]$.

3. *Etant donnés un segment arbitraire u et une classe $[\mathbf{P}]$ de polygones, il y a un rectangle $\mathbf{R}$ appartenant à $[\mathbf{P}]$ qui a un côté égal à u.* C'est ce qu'on vient de démontrer.

4. Soit $\mathbf{V}'$ le sous-ensemble de $\mathbf{V}$, formé par les segments non négatifs. On définit une application de $\mathbf{V}' \times \mathbf{V}'$ dans P, que nous appelerons σ, de la façon suivante:

(1) $\sigma(a, b) = [ABCD]$, où $ABCD$ est un rectangle avec

$$AB = a \quad \text{et} \quad AD = b.$$

***σ** est une application surjective* (on admet la classe zéro dans P).

En effet, si a et b sont deux côtés d'un rectangle de $[\mathbf{P}]$, on a $\sigma(a, b) = [P]$.

5. Soit σ la relation d'équivalence définie par l'application σ dans $\mathbf{V}' \times \mathbf{V}$. L'ensemble quotien par rapport à σ est noté par: $\mathbf{V}' \times \mathbf{V}' / \sigma = \mathbf{V}' \otimes \mathbf{V}'$. et la classe de $\mathbf{V}' \otimes \mathbf{V}'$, qui contient (a, b), est notée par $a \otimes b$.

6. Soit $\mathbf{b}$ la bijection canonique tel que:

$$\mathbf{be} = \boldsymbol{\sigma}$$

$\mathbf{e}$ étant la surjection naturelle $\mathbf{V}' \times \mathbf{V}' \xrightarrow{\mathbf{e}} \mathbf{V}' \otimes \mathbf{V}'$.

Soit $(a, b) \in \mathbf{V}' \times \mathbf{V}'$ et α un nombre réel pas négatif: On a:

$$(\alpha a) \otimes b = a \otimes (\alpha b) \tag{2}$$

Demonstration: Soient (Fig. 3) $OA = a$, $OA' = \alpha a$, $OB = b$, $OB' = \alpha b$. Alors, les droites AB et $A'B'$ sont parallèles et les rectangles $OA'CB$ et $OADB'$ appartiennent à $\mathbf{b}((\alpha a) \otimes b)$ et à $\mathbf{b}(a \otimes (\alpha b))$, respectivement. Mais, tenant compte de (iii) on a $(OAB')\,E\,(OA'B)$, d'où $(OA'CB)\,E\,(OADB')$ et $\mathbf{b}((\alpha a)\otimes b) = \mathbf{b}(a \otimes (\alpha b))$. Mais, $\mathbf{b}$ étant une bijection, cn a: $(\alpha a) \otimes b = a \otimes (\alpha b)$.

7. La propriété (2) permet d'écrire:

(3) $\alpha(a \otimes b) = (\alpha a) \otimes b = a \otimes (\alpha b)$.

Si u est un segment non nul quelconque, on a

$$a = \alpha u, \ b = \beta u,$$

d'où

(4) $a \otimes b = (\alpha u) \otimes (\beta u) = (\alpha\beta)\,(u \otimes u)$.

(4) permet de définir la structure de demi-espace vectoriel dans $\mathbf{V}' \otimes \mathbf{V}'$. La bijection $\mathbf{b}$ permet de transferer cette structure à P.

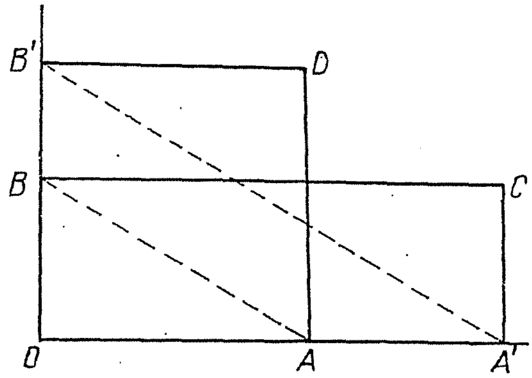


Fig. 3

8. Etant fixée une unité u des segments, on peut attacher à chaque polygone $\mathbf{P}$ le nombre *aire* ($\mathbf{P}$) défini par la relation

(5) $\mathbf{b}^{-1}([\mathbf{P}]) = \textit{aire}\ (\mathbf{P})\ (u \otimes u)$.

On dit que le nombre *aire* ($\mathbf{P}$) est l'aire du polygone $\mathbf{P}$ par rapport à l'unité $u \otimes u$.

§ 2. **L'aire d'un polygone orienté** (âge: 14—15 ans).

1. *L'orientation du plan.* On suppose que l'élève connaît le plan vectoriel. Soit P l'ensemble des paires ordonnées de vecteurs linéairement indépendants. Dans P on définit la relation O de la façon suivante:

$$(1) \quad (\underline{x},\underline{y})O(\underline{x}',\underline{y}') \Leftrightarrow \text{signe}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \text{signe}\begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

où $\underline{x} = x_1\underline{u}_1 + x_2\underline{u}_2$, $\underline{y} = y_1\underline{u}_1 + y_2\underline{u}_2$, $\underline{x}' = x_1'\underline{u}_1 + x_2'\underline{u}_2$, $\underline{y}' = y_1'\underline{u}_1 + y_2'\underline{u}_2$. On constate que la relation O ne dépend pas de la base $\underline{B} = (\underline{u}_1, \underline{u}_2)$. O c'est une relation d'équivalence et $P\,/\,O$ a deux uniques éléments appelés orientations du plan. Une paire $(\underline{x}, \underline{y}) \in P$ s'appele une indicatrice de l'orientation. Un plan avec une orientation est un plan orienté. Supposons le plan orienté par l'indicatrice $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ (Fig. 4). Étant donné le triangle ABC et la paire de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ on dit que le triangle a l'orientation positive ou négative, selon que les indicatrices $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ appartiennent ou non à la même classe. On peut donner aussi l'orientation $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ en ordonnant les sommets dans la forme (ABC) ou (BCA) ou (CAB).

Deux triangles consécutifs (Fig. 5) ont la même orientation quand leur côté commun est parcouru en sens inverse dans chaque triangle. Soit

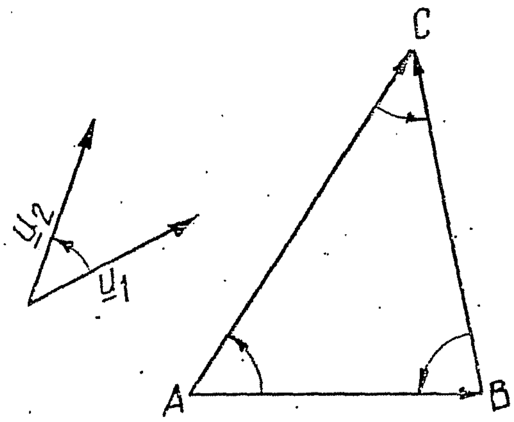


Fig. 4

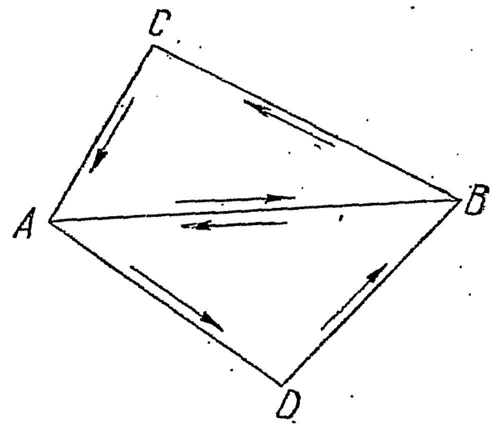


Fig- 5

P un polygone et soit $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{T}_i$ une partition de **P** en triangles. Un de ces triangles étant orienté, on obtient de proche en proche, une orientation de tous les triangles de la partition et toutes ces orientations sont égales à l'orientation du triangle de départ. On obtient ainsi une orientation du bord du polygone, qui ne dépend pas de la partition choisie et qu'on appelle orientation du polygone. On dit qu'un polygone orienté est positif ou négatif selon que son orientation est égale ou contraire à l'orientation du plan.

2. *Equivalence des polygones orientés.* Soit P^* l'ensemble des polygones orientés du plan. Dans P^* on définit la relation E^* de la façon suivante: $\mathbf{P}E^*\mathbf{Q} \Leftrightarrow \mathbf{P}E\mathbf{Q}$ et l'orientation de **P** est égale à l'orientation de **Q**, où E est la relation définie dans § 1. E^* est une relation d'équivalence. Soit $P^* = \mathfrak{P}^*/E^*$. Dans chaque classe [**P**] de P^* il y a des rectangles orientés.

Soit **V** l'espace vectoriel des segments; on définit:

$$\mathbf{V} \times \mathbf{V} \xrightarrow{\sigma^*} P^*$$

de la façon suivante: $\sigma^*(a, b) = [\mathbf{P}]$, où **P** c'est un rectangle avec des côtés a et b et avec orientation positive ou négative, selon que: signe $(a) =$ signe (b), ou signe $(a) \neq$ signe (b), respectivement.

On voit, comme dans le § 1, que $\mathbf{V} \times \mathbf{V} / \mathbf{e}^* = \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$, c'est un produit tensoriel, avec la différence que dans ce cas, **V** est un espace vectoriel.

Si

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \times \mathbf{V} \arrow[r, "\sigma^*"] \arrow[d, "\mathbf{e}^*"'] & P^* \\ \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} \arrow[ur, "\mathbf{b}^*"'] & \end{tikzcd}$$

est la factorisation canonique de σ^*, on peut définir l'aire d'un polygone orienté par:

$$\mathbf{b}^{*-1}[\mathbf{P}] = aire\ (\mathbf{P})\ (u \otimes u),$$

u étant le segment unité.

La bijection $\mathbf{b}^*$ permet de définir la structure d'espace vectoriel dans P^*.

3. *L'aire d'un polygone orienté comme produit extérieur.* Soit P^* l'ensemble des classes de polygones orientés (avec la classe zéro) et soit $\mathbf{V}_2$ le plan vectoriel. On définit la correspondance:

$$\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_2 \xrightarrow{\mathbf{e}} P^*$$

telle que: $\mathbf{e}(\underline{x}, \underline{y}) = [\mathbf{P}]$, où $\mathbf{P}$ est le parallélogramme orienté $OABC$ (Fig. 6), tel que $\overrightarrow{OA} \in \underline{x}$, $\overrightarrow{OC} \in \underline{y}$ et l'orientation de $OABC$ est celle définie par $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$, quand $\underline{x}$ et $\underline{y}$ sont linéairement indépendants et $\mathbf{e}(\underline{x}, \underline{y}) = 0$, dans le cas contraire; $\mathbf{e}$ est une surjection. Soit $\mathbf{e}'$ la relation d'équivalence définie par $\mathbf{e}$. Nous noterons par $\mathbf{V}_2 \wedge \mathbf{V}_2$ l'ensemble quotient $\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_2/\mathbf{e}$.

Soit

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_2 \arrow[r, "\mathbf{e}"] \arrow[d, "\mathbf{e}'"'] & P^* \\ \mathbf{V}_2 \wedge \mathbf{V}_2 \arrow[ur, "\mathbf{b}"'] & \end{tikzcd}$$

la factorisation canonique de $\mathbf{e}$. Dans 2 on a vu que P^* est un espace vectoriel. Alors, la bijection $\mathbf{b}$ permet de transférer cette structure à $\mathbf{V}_2 \wedge \mathbf{V}_2$.

Comme dans 6 § 1, on prouve (avec la seul différence que dans ce cas au lieu de rectangles on a des parallélogrammes) que

(7) $\alpha(\underline{a} \wedge \underline{b}) = (\alpha\underline{a}) \wedge \underline{b} = \underline{a} \wedge (\alpha\underline{b})$.

Soit $\overrightarrow{OA} \in \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} \in \underline{b}$, $\overrightarrow{OA'} \in -\underline{a}$. Alors on a (Fig. 7):

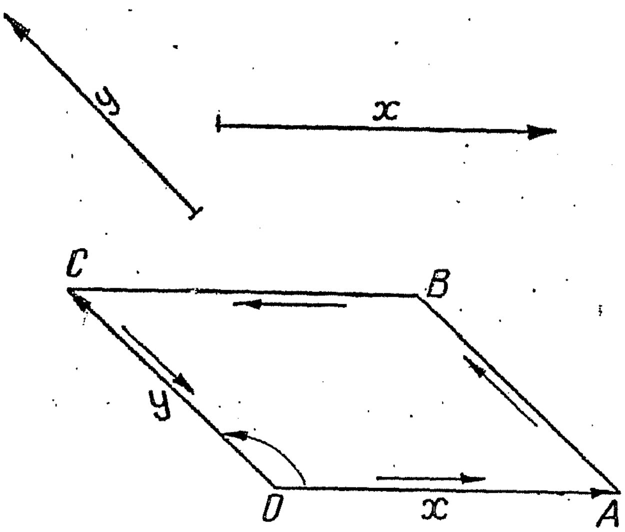


Fig. 6

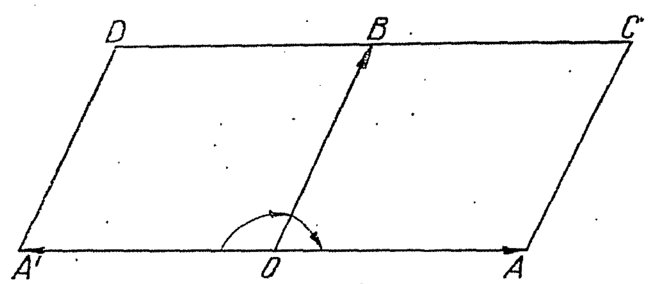


Fig. 7

$(OACB) \in \mathbf{e}(\underline{a}, \underline{b})$, $(OBCA) \in \mathbf{e}(\underline{b}, \underline{a})$, $(OA'DB) \in \mathbf{e}(-\underline{a}, \underline{b})$. Or, les parallélogrammes $OBCA$ et $OA'DB$ sont équivalents et ont la même orientation, d'où il résulte

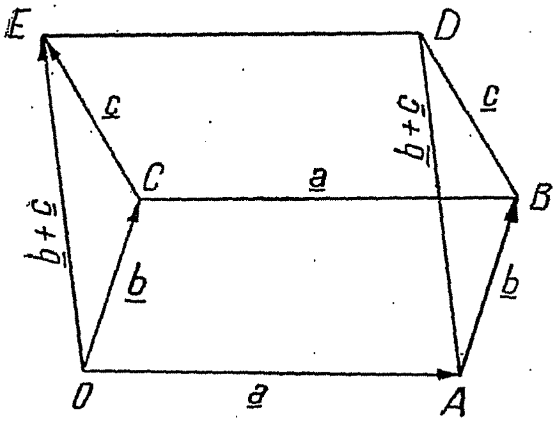
(8) $\underline{b} \wedge \underline{a} = (-\underline{a}) \wedge \underline{b} = ((-1)\underline{a}) \wedge \underline{b} = (-1)\,(\underline{a} \wedge \underline{b}) = -(\underline{a} \wedge \underline{b})$.

Soit $\overrightarrow{OA} \in \underline{a}$, $\overrightarrow{OC} \in \underline{b}$, $\overrightarrow{CE} \in \underline{c}$. Alors on a (Fig. 8):

$\overrightarrow{OE} \in \underline{b} + \underline{c}$, $(OABC) \in \mathbf{b}\,(\underline{a} \wedge \underline{b})$, $(CBDE) \in \mathbf{b}(\underline{a} \wedge \underline{c})$,

$$(OADE) \in \mathbf{b}\ (\underline{a} \wedge (\underline{b} + \underline{c})).$$

Or, $(OADE) = (OABC) + (CBDE)$,
d'où $\mathbf{b}(\underline{a} \wedge (\underline{b} + \underline{c})) = \mathbf{b}(\underline{a} \wedge \underline{b}) + \mathbf{b}(\underline{a} \wedge \underline{c})$,
et compte tenu que $\mathbf{b}$ est une bijection,



Fig, 8

(9) $\underline{a} \wedge (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \wedge \underline{b} + \underline{a} \wedge \underline{c}$.

De (8) on déduit aisément que:
$\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont *linéairement dépendants* $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \underline{a} \wedge \underline{b} = \underline{O}$.

Étant donné les vecteurs $\underline{u}$ et $\underline{v}$, on peut définir l'aire par rapport à l'unité $\underline{u} \wedge \underline{v}$, comme le nombre: *aire*($\mathbf{P}$) tel que:

$$\mathbf{b}^{-1}[\mathbf{P}] = aire\ (\mathbf{P})\ (\underline{u} \wedge \underline{v}).$$

Cette définition permet d'obtenir aisément la formule d'échange de variables pour les intégrales doubles.

On peut transférer tout cela au cas du volume des polyèdres. Mais ici se présente une difficulté à cause de la définition de l'équivalence des polyèdres.

§ 3. Quantités de la physique

1. *L'espace dual.* Soit $\mathbf{V}$ un espace vectoriel réel de dimension 1. Soit $\mathbf{V}^*$ l'ensemble de tous les homomorphismes de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ étant le corps des réels. On constate aisément qu'un homomorphisme x^* est déterminé par l'image d'un vecteur $\underline{a} \neq \underline{O}$. Tous les homomorphismes à l'esception du homomorphisme zéro, sont des isomorphismes. Dans $\mathbf{V}^*$ on définit la structure d'espace vectoriel par les opérations suivantes:

(1) $\forall\, x^*,\ y^* \in \mathbf{V}^*,\ (x^* + y^*)(x) = x^*(x) + y^*(x)$,

(2) $\forall\, \lambda \in \mathbf{R}, \forall x^* \in \mathbf{V}^*,\ (\lambda x^*)(x) = \lambda\,(x^*(x))$.

Si $\underline{u}$ est une base de $\mathbf{V}$, la base $\underline{u}^*$ de $\mathbf{V}^*$ est univoquement déterminée par la condition:

$$\underline{u}^*(\underline{u}) = 1$$

et s'appelle base duale de $\underline{u}$.

2. *Les quantités de la physique* (âge: 14—15 ans)

Soient $\mathbf{E}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{M}$ les espaces vectoriels de dimension un, appelés espace, temps et masse, respectivement, par les physiciens. Soit $\mathbf{T}^*$ l'espace dual de $\mathbf{T}$. Alors, l'espace vectoriel: $\mathbf{E} \otimes \mathbf{T}^*$ est la vitesse. Les espaces vectoriels de dimensions un: $\mathbf{E} \otimes \mathbf{T} \otimes \mathbf{T}^*$, $\mathbf{M} \otimes \mathbf{E} \otimes \mathbf{T}^* \otimes \mathbf{T}^*$, $\mathbf{M} \otimes \mathbf{E} \otimes \mathbf{T}^* \otimes \mathbf{T}^* \otimes \mathbf{E}$, $\mathbf{M} \otimes \mathbf{E} \otimes \mathbf{T}^* \otimes \mathbf{T}^* \otimes \mathbf{E} \otimes \mathbf{T}^*$, sont respectivement, l'accélération, la force, le travail et la puissance. Alors, la définition des unités de ces quantités n'offre pas de difficultés, tout comme le problème de l'échange d'unités. Par exemple on a:

$$x\ kg \otimes m \otimes h^{-1} \otimes h^{-1} \otimes m \otimes h^{-1} =$$

$= 10 \cdot 36^{-3} \cdot x\ gr \otimes cm \otimes s^{-1} \otimes s^{-1} \otimes cm \otimes s^{-1}$, où h^{-1} est l'unité duale de l'heure h et s^{-1} est l'unité duale de la seconde s, c'est-à-dire: $h^{-1}(h) = 1$ et $s^{-1}(s) = 1$. Alors, si $h^{-1} = a\, s^{-1}$, de $h^{-1}(h) = 1$, on déduit:

$$as^{-1}(36 \cdot 10^2\, s) = a \cdot 36 \cdot 10^2 \cdot s^{-1}\,(s) = 1,$$

et

$$a = 36^{-1} \cdot 10^{-2}.$$

§ 4. Le produit tensoriel dans l'école primaire

1. Dans l'école primaire, à l'âge de 10 à 12 ans, on présente aux élèves un ensemble de techniques pour résoudre des problèmes de la vie ordinaire sans tenir compte des structures sur lesquelles s'appuient toutes ces questions. Il s'agit de la règle des trois. Ici nous sommes aussi en présence des produits tensoriels, mais pas en général des produits tensoriels des espaces vectoriels, mais des produits tensoriels de semi-modules. Alors, il semble naturel de présenter avec clarté ces structures. Voyons une esquisse en quelques exemples.

2. Considérons l'ensemble **O** des ouvriers d'une spécialité, par exemple les ouvriers maçons. Si nous admettons que deux ouvriers quelconques font la même quantité d'œuvre dans un temps donné, on peut considérer l'ensemble suivant: $\{1\ ou., 2\ ou., 3\ ou., \ldots\}$ appelé ensemble de quantités d'ouvriers. Dans cet ensemble on peut faire deux opérations:

$$5\ ou. + 4\ ou. = (5 + 4)\ ou. = 9\ ou. \tag{1}$$

qu'on peut énoncer de la façon suivante: une quantité de cinq ouvriers plus une quantité de quatre ouvriers est égale à une quantité de neuf ouvriers.

$$3 \times (5\ ou.) = 5\ ou. + 5\ ou. + 5\ ou. = (3 \times 5)\ ou. \tag{2}$$

On constate que l'ensemble **O** des quantités d'ouvriers avec ces deux opérations est un semi-module.

On a beaucoup de semi-modules analogues, ainsi $\mathbf{M} = \{1m., 2m., \ldots\}$ $\mathbf{A} = \{1fr., 2fr., \ldots\}$, $\mathbf{T} = \{1j., 2j., \ldots\ldots\}$, $\mathbf{H} = \{1h., 2h., \ldots\}$, où $m., fr., j., h.$, sont mètre, franc, journée de travail, heure de travail etc. On peut appeler tous ces semi-modules, des semi-modules discrètes ou quantités.

3. Entre les quantités on peut définir une sorte d'application très importante, telle que la suivante:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & 1\ ou., & & & 2\ ou., & & & 3\ ou., & & 4\ ou., \\ & & \searrow & & & \searrow & & & \searrow & & \\ 1\ fr., & 2fr., & 3fr., & 4fr., & 5fr., & 6fr., & 7fr., & 8fr., & 9fr., & 10fr., & 11fr., \end{array}$$

(poursuivre la collocation des flèches).
Quelle quantité de francs correspond à 16 ouvriers? etc.

Poursuivre la collocation des flèches dans l'application suivante:

1 *m.*, 2 *m.*, 3 *m.*, 4 *m.*, 5 *m.*, 6 *m.*,

1 *fr.*, 2*fr.*, 3*fr.*, 4*fr.*, 5*fr.*, 6*fr.*, 7*fr.*, 8*fr.*, 9*fr.*, 10*fr.*, 11*fr.*, 12*fr.*, 13*fr.*

Les applications comme celle qu'on vient de considérer s'appelent homomorphismes. L'application suivante n'est pas un homomorphisme. Pourquoi?

1 livre, 2 livres, 3 livres, 4 livres, 5 livres,...

1*fr.*, 2*fr.*, 3*fr.*, 4*fr.*, 5*fr.*, 6*fr.*, 7*fr.*, 8*fr.*, 9*fr.*,...

Peut-on poursuivre la collocation des flèches dans la suivante application, bien entendu s'il s'agit d'un homomorphisme?

1 livre, 2 livres, 3 livres, 4 livres,...

1. *fr.*, 2*fr.*, 3*fr.*, 4*fr.*, 5*fr.*, 6*fr.*,...

Et s'il ne s'agit pas d'homomorphisme, est-il possible?

Combien de flèches sont nécessaires pour pouvoir poursuivre la collocation des flèches dans un homomorphisme? Poursuivre la collocation des flèches dans l'homomorphisme suivant:

1 *h.*, 2 *h.*, 3 *h.*, 4 *h.*, ...

1 *km.*, 2 *km.*, 3 *km.*, 4 *km.*, 5 *km.*, 6 *km.*, 7 *km.*, 8 *km*,...

Si nous appelons f l'homomorphisme antérieur, on écrira:

$$f(2h.) = 6\ km.$$

compléter les égalités suivantes: $f(1h.) =$, $f(2h.) =$, $f(3h.) =$, $f(7h.) =$

Si f est un homomorphisme entre la quantité des ouvriers et la quantité des francs, et si $f(5\ ou.) = 60\ fr.$..., $f(8\ ou.) = 96\ fr.$ compléter:

$$f(5\ ou. + 8\ ou.) = \quad , f(4 \times (5\ ou.)) =$$

On doit insister, moyennant des exemples, sur ces deux propriétés de l'homomorphisme.

4. Un ouvrier pendant une journée de travail fait deux mètres d'œuvre. Nous exprimerons brièvement cela de la façon suivante:

$$1\ ou. \otimes 1\ j. = 2\ m.$$

Combien de *m.* d'œuvre ferront 2 *ou.* pendant 1 *j.*? Exprimer ça symboliquement. Compléter:

$1\ ou. \otimes 2j. =$, $3\ ou. \otimes 1\ j. =$, $1\ ou. \otimes 3\ j. =$, $3\ ou. \otimes 2\ j. =$

Constater que:

(1) $7\,ou. \otimes 4\,j. = 4\,ou \otimes 7\,j.$

(2) $(2\ ou. + 5\ ou.) \otimes 4j. = (2\,ou. \otimes 4\,j.) + (5\,ou. \otimes 4\,j.)$

(3) $7\,ou. \otimes (1\,j. + 3\,j.) = (7\,ou. \otimes 1\ j.) + (7\,ou. \otimes 3\,j.)$

Exercices:

(a) Si $3\,ou. \otimes 4j. = 36\,m.$, compléter:

$1\ ou. \otimes 1\ j. =\quad$, $5\,ou. \otimes 7\,j. =$, $3\,ou. \otimes \square\,j. = 45\,m.$,

$\square\,ou. \times 7\,j. = 84\,m.$

(b) Un ouvrier fait pendant une journée, travaillant une heure par jour, 12 *cm.* d'œuvre. On peut le symboliser de la façon suivante:

$1\ ou. \otimes 1\ j. \otimes 1\ h. = 12\ cm.$

Compléter:

$2ou. \otimes 1j. \otimes 1h. =\quad$, $1ou. \otimes 2j. \otimes 1h. =\quad$, $1ou. \otimes 1j. \otimes 2h =$
$2ou. \otimes 2j. \otimes 1h. =\quad$, $1ou. \otimes 2j. \otimes 2h. =\quad$, $2ou. \otimes 1j. \otimes 2h =$
$2ou. \otimes 2j. \otimes 3h. =\quad$, $2ou. \otimes 4j. \otimes 7h. =\quad$, $5ou. \otimes 4j. \otimes 7h =$

(c) Constater que:

(4) $4ou. \otimes 5j. \otimes 6h. = 4ou. \otimes 6j. \otimes 5h. = 5ou. \otimes 6j. \otimes 4h. =$
(5) $4ou. \otimes (2j. + 3j.) \otimes 6h. = 4ou. \otimes 2j. \otimes 6h. + 4ou. \otimes 3j. \otimes 6h.$

(d) Si $3ou. \otimes 4j. \otimes 6h. = 36\,cm.$, compléter:

$1\,ou. \otimes 1\,j. \otimes 1h. =\quad$, $7ou. \otimes 3j. \otimes 5h. =$

$5ou. \otimes 4j. \otimes \square\,h = 70$ cm.

$\square\,ou. \otimes 5j. \otimes 4h. = 80\ cm.$ etc.

ABSTRACT

There are some problems treated in the primary and secondary schools whose own structure is that of a tensorial or exterior product. The author means that one can utilize these opportunities for introducing in those levels the very important concepts for the mathematics and other sciences of tensorial and exterior products. One gives a scheme of how one can proceed for the proportionality rules in the primary school and for the introduction of the concepts of area and volume and of the physical quantities in the secondary school.

РЕЗЮМЕ

Существуют проблемы, изучаемые в начальной и неполной средней школах, которые по своей структуре напоминают тензорное или внешнее произведение. По мнению автора можно воспользоваться этими обстоя-

тельствами, чтобы на этом этапе обучения ввести понятия тензорного и внешнего произведений, весьма необходимых при изучении математики и других наук. Даются указания, относящиеся к способу изложения правил пропорциональности в начальной школе и введения понятий площади и объема, а также физических величин в неполной средней школе.

CAIUS IACOB (Roumanie): L'INTRODUCTION DE LA NOTION D'INTÉGRALE DÉFINIE EN CLASSE DE XII^e RÉELLE

Le programme prévoit en classe de XII^e réelle l'enseignement de quelques éléments de calcul intégral, d'équations différentielles et l'application des méthodes mathématiques à l'étude de la mécanique théorique.

On a publié récemment notre manuel „Éléments d'analyse mathématique et mécanique" comprenant la présentation détaillée de la matière prévue par le nouveau programme [1, 2].

Dans ce manuel, la I-ère partie (p. 6—92) est consacrée aux éléments d'analyse mathématique. Elle comprend quatre chapitres: I. Intégrales (p. 6—34); II. Méthodes de calcul des intégrales (p. 35—60); III. Applications de l'intégrale (p. 61—75); IV. Notions de la théorie des équations différentielles (p. 77—92).

Par le passé, une partie de la matière d'analyse correspondante était traitée en classe de XI^e. Le nouveau programme a ajouté maintenant les éléments de la théorie des équations différentielles, qui sont nécessaires en mécanique.

Par rapport à l'ancien manuel de XI^e réelle, dû à *N. Dinculeanu* et *E. Radu* [3], le nouveau manuel de XII^e, qui reprend les chapitres concernant la théorie de l'intégrale et ses applications, diffère surtout par la manière dont on introduit la notion d'intégrale simple.

Dans ce qui suit, nous insisterons sur le mode d'introduire cette notion.

2. On a renoncé à adopter, comme point de départ, le calcul des aires des surfaces planes comme la surface du triangle ou d'un segment de parabole, puisque ces considérations, d'une grande valeur intuitive, réclamaient pourtant un temps précieux et des calculs d'intérêt secondaire.

Tenant compte de la nécessité des développements ultérieurs ayant trait à la théorie des équations différentielles, ainsi que le temps relativement bref, accordé à l'enseignement de l'analyse et de la mécanique, on est parti directement du problème de la solution de la plus simple équation différentielle:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{1}$$

où $f(x)$ est une fonction continue dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

Après avoir montré que si l'équation (1) admet une solution $y(x)$, elle admet une infinité de solutions, appelées fonctions primitives de $f(x)$, qui sont toutes de la forme $y(x) + C$, où C est une constante arbitraire, гией и образованием, или социологией и образованием и т. д., образуют лишь фундамент методологических работ, имеющих своей целью подготовить конкретные учебные проекты по структуре главы элементарной математики, которую будут преподавать в школе. Такие учебные проекты рассматриваются как математическое «сырье», подготовленное для более полного построения, и его переработка с точки зрения образования еще предполагает детальный математический труд, представляющий важную обязанность методологии обучения математике. В качестве примера в этом смысле приводится разработка аксиоматики, образующей скелет школьного предмета, построение особенно простых и оперативных с учебной точки зрения определений, нахождение новых доказательств, помогающих развитию математического мышления у учащихся, выявление современных, доступных на некотором уровне задач и т. д.

Высказываясь против сокращения методологии обучения математике в практической подготовке в преподавательской профессии и опираясь на широко изложенные в этой работе аргументы, в заключение автор указывает общие и частные задачи, которые должны стоять перед учебной программой методологии обучения математике.

Общие задачи касались бы:

— анализирования проблем математического образования с точки зрения ее специфических основ: математических, логических, психологических, педагогических, социологических и т. д.;

— роли и целей математического образования в рамках актуальной системы воспитания и в перспективе ее эволюции;

— анализирования актуальных школьных программ и перспективы их эволюции и сравнительного изучения программ, разработанных в других странах;

— организации процесса изучения математики и специфической ей техники;

— методов постоянного улучшения учебной работы.

Среди проблем с более определенных характером считается, что в первую очередь должны изучаться те, которые касаются математической структуры различных вопросов и их элементарного представления, новые проблемы, не известные традиционной элементарной математике, требующие углубленного исследования на данном этапе реформы математического образования, проблемы, позволяющие получить синтетическое представление новых направлений в математике и выделение общих соображений и т. д.

Конкретная программа университетского курса методологии математического образования, а также и способ ее получения зависят от совокупности полученных будущим преподавателем знаний, а также и от других факторов.

P. ABELLANAS (Espagne): SUR L'ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT. LES GROUPES DE TRAVAIL.

Il y a, peut-être, une douzaine d'années que les mathématiciens de toutes les parties du monde se sont intéressés, d'une façon très vive, aux problèmes de l'enseignement des mathématiques à tous les niveaux. Il y a d'une part une raison utilitaire pour cet intérêt, car le développement de la technique industrielle a besoin d'un nombre chaque jour plus grand d'utilisateurs de la mathématique. D'un autre côté, la systématisation et le développement qu'a eu la mathématique dans le présent siècle rendent possible l'usage des meilleures méthodes d'enseignement. Mais il y a une raison plus profonde et, bien sûr, plus importante à retenir : c'est la nécessité de profiter de la plus grande richesse du monde : l'intelligence humaine. Envisagé de ce point de vue, le problème de l'enseignement prend ses véritables dimensions et on peut voir sa complexité, sa transcendance et son importance ; mais, en même temps, on a une base solide pour commencer à travailler.

Si l'on admet qu'un des buts de l'enseignement doit être le développement de l'intelligence des jeunes gens, nous trouvons en premier lieu que la mathématique, grâce à son caractère de science la plus ancienne et donc la plus évoluée, peut rendre d'importants services pour l'accomplissement de cette fin ; mais, en même temps, nous voyons que les mathématiciens tout seuls ne peuvent pas arriver à obtenir une première approximation à la solution du problème. Il y a eu déjà d'importantes réunions de mathématiciens, où des spécialistes très qualifiés ont discuté les questions relatives aux programmes et méthodes possibles d'enseignement de la mathématique. Tout cela était nécessaire, mais il y a besoin d'avancer. On doit tenir compte que l'élève est une unité qui n'est pas divisible et que, si l'on veut faire du bon enseignement, on ne peut pas laisser de côté cette réalité. Le moment est venu où il est nécessaire d'attaquer sérieusement le problème de l'enseignement. Il faut traiter ce problème avec des méthodes scientifiques et pourtant c'est l'Université qui doit s'occuper de lui. Je sais bien qu'à l'université il y a des sections ou des facultés de pédagogie, mais il s'agit aussi d'une classe particulière de spécialistes : spécialistes en généralités. Naturellement, on doit profiter de tout ce que ces spécialistes en pédagogie peuvent apporter, mais pour la même raison, pour laquelle les mathématiciens tout seuls ne peuvent pas résoudre la question, ils ne peuvent non plus le faire.

Comme il s'agit d'un travail scientifique, il y a besoin des laboratoires. Ces laboratoires sont naturellement des centres d'enseignement primaire et secondaire où travaillent des maîtres et des professeurs, qui forment un groupe avec les professeurs universitaires de différentes spécialités. Ces groupes de travail dans chaque université auraient les missions suivantes :

1. Chercher les idées fondamentales de la science qui soient nécessaires à les faire apprendre aux élèves, mais avec une préoccupation constante, celle de réduire leur nombre tant que possible.

2. Chercher la façon d'assurer une unité dans l'enseignement des disciplines, dans le cadre d'une même année et de chaque degré d'enseignement, de telle façon que, tant que possible, les idées et concepts étudiés, par exemple en mathématiques, soient utilisés dans les cours de langue ou de géographie, etc.

3. Étudier la façon la plus convenable de présenter les idées et les problèmes, afin d'intéresser les élèves, de stimuler leur curiosité naturelle, de développer leur capacité d'observation, ainsi que leur imagination et leur capacité d'analyse des possibilités distinctes, qui peuvent se présenter dans une situation déterminée.

4. Rédiger des textes pilotes, notes, exercices, observations, recommandations à l'intention des maîtres et des professeurs, etc. Tout cela comme une conséquence des études effectuées. Les choix de textes seraient le résultat des expériences et discussions faites par le groupe de travail.

5. L'existence d'une communication entre les groupes de travail des différentes universités pour recueillir périodiquement les résultats les plus importants et les envoyer à une revue internationale, pour leur diffusion.

6. La formation, sous l'aspect didactique, pédagogique et méthodologique, des futurs maîtres et professeurs.

7. Établir un service de consultation et d'aide scientifique et didactique destiné aux maîtres et professeurs en exercice.

8. Étudier et rédiger les nouveaux plans d'études et proposer à l'administration publique toutes les modifications nécessaires relatives à l'enseignement.

9. Organiser des réunions des maîtres et des professeurs pour les informer sur les nouvelles méthodes d'enseignement et pour leur donner l'occasion de présenter leurs observations et résultats, ainsi que les difficultés rencontrées.

Évidemment il n'est pas facile d'atteindre tout ça, mais s'il y a dans ces idées quelque chose de profitable, il serait utile que cette Réunion adopte une recommandation sur la création de groupes de travail et de recherche didactique dans les universités.

ABSTRACT

One proposes in this paper the organization in any university of a teaching group with the following missions:

Research the main ideas of science that one can and does teach at any level.

Research how one can reach a unity in the teaching of the curricula of each year and of each level.

Study how one must treat the ideas and problems for interesting the students, for stimulating their curiosity and developing their observation capacity, as well as their imagination and capacity of analysis of the distinct possibilities.

Write and publish pilot texts, class-room notes, exercises and recommendations for the teachers.

The pedagogical and methodological forming of teachers.

The organization of meetings for information and exchange of view points of the teachers.

Information to the government about the educational organization.

РЕЗЮМЕ

В этой статье предлагается организовать в университетах учебные группы имеющие следующие обязанности:

Найти основные научные идеи, которые можно и нужно преподавать на любом уровне.

Изучить метод, по которому нужно изучать эти идеи и проблемы, чтобы заинтересовать слушателей, повысить их заинтересованность и развить в них наблюдательность, а также воображение и способность анализировать различные возможности.

Писать и опубликовывать руководства, заметки, резюматы, упражнения и пособия для преподавателей.

Организовать заседания с докладами и по обмену мнениями преподавателей.

Информировать государственные органы о положении в организации образования.

FRITZ NEIGENFINDT (**German Democratic Republic**):

THE ROLE OF MATHEMATICS INSTRUCTION IN THE SOCIALIST SOCIETY OF THE GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC

A fundamental concept in the German Democratic Republic is that in socialist society a high and modern mathematical education is more and more becoming a significant component of general education. Therefore, great efforts are made to impart to *all* children such mathematical knowledge as will enable the young generation to respond in the future, too, to the rapid and increasing demands on mathematical knowledge and skills of all citizen in our culturally and industrially highly developed socialist country.

The party and government leadership pay great attention to the development of the education system in general and of mathematics instruction in particular. This is expressed in a number of acts and resolutions which are helping to create favourable conditions and prerequisites for a fundamental reform of mathematics instruction in all institutions imparting education.

I would like to mention here firstly the "Act on the Integrated Socialist Education System" of 1965; on its basis we are building up the ten-year general secondary school as the compulsory school for all children. Accordingly, all children from the second to the seventh classes have six mathematics lessons per week, and the children in the first, eighth and ninth classes have five mathematics lessons per week, and in the tenth class they have four. The two classes leading to the matriculation examination — the eleventh and twelfth classes have five.

At present, already nearly 80% of the children do not leave school at the age of fourteen, but go on to the ninth and tenth classes, and about 25% of the pupils go on into the two classes leading to the matriculation examination.

The building up of the compulsory ten-year secondary school will be completed by 1970. It is also planned to raise the percentage of pupils going on into the matriculation classes.

These few figures show that mathematics instruction is playing an important role in the general education imparted in our schools and that it is a