UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS
OFICIALES DE GRADO
Curso **2012-2013**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

Examen
para
coinciden.

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**
Calificación total máxima: 10 puntos.
Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1 . Calificación máxima: 3 puntos.
Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x & + & 2y & - & 3z & = & 2\lambda\,, \\ x & + & y & + & z & = & 1\,, \\ 2x & - & 3y & + & 2z & = & 2\,, \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores de λ.
b) (1,5 puntos) Para los valores de λ tales que el sistema tiene solución única, obtener esta solución en función de λ.

Ejercicio 2 . Calificación máxima: 3 puntos.
Dada la familia de rectas $r_a \equiv \begin{cases} z = 0\,, \\ x - ay - 3 = 0\,, \end{cases}$ (variando a en $\mathbb{R}$ se obtiene toda la familia), se pide:

a) (0,75 puntos) Probar que todas las rectas de la familia se cortan en un mismo punto y calcular dicho punto.
b) (1,5 puntos) Dado el punto $P(0, 0, 1)$, calcular la ecuación del plano π_a que pasa por P y contiene a la recta r_a. Probar que la recta que pasa por P y por el punto $Q(3, 0, 0)$ está contenida en el plano π_a para todos los valores de a.
c) (0,75 puntos) Determinar para qué valores de a la distancia del punto $O(0, 0, 0)$ al plano de ecuación $x - ay + 3z = 3$ es $1/2$.

Ejercicio 3 . Calificación máxima: 2 puntos.
Dada la función $f(x) = e^{-x} - x$, se pide:

a) (1 punto) Determinar el polinomio de segundo grado, $P(x) = ax^2 + bx + c$, que verifica simultáneamente las tres condiciones siguientes: $P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$, $P''(0) = f''(0)$.
b) (1 punto) Usar los teoremas de Bolzano y Rolle para demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución real.

Ejercicio 4 . Calificación máxima: 2 puntos.
Dada la función $f(x) = \begin{cases} a\,, & \text{si } x < 0\,, \\ 1 + xe^{-x}\,, & \text{si } x \geq 0\,, \end{cases}$ se pide:

a) (1 punto) Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$ y estudiar, en ese caso, la derivabilidad de f en $x = 0$.
b) (1 punto) Calcular, en función de a, la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1 . **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\,, & \text{si } x < 0\,, \\[2ex] \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\,, & \text{si } x \geq 0\,, \end{cases}$$

donde ln significa logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$.
b) (1 punto) Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
c) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de f y calcular f', donde sea posible.

Ejercicio 2 . **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dadas las rectas: $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 4x + y + 5z = 0\,, \\ 5y - 3z = 0\,, \end{array} \right.$ y $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} y - z - 3 = 0\,, \\ x - y - z + 1 = 0\,, \end{array} \right.$ se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa entre ellas.
b) (1 punto) Hallar la mínima distancia entre r y s.
c) (1 punto) Hallar el punto simétrico del origen respecto de la recta s.

Ejercicio 3 . **Calificación máxima:** 2 puntos.
Sean A y B matrices 2×2 con determinantes: $\det A = 5$, $\det B = 3$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar $\det[B^{-1}A^2B^2]$.
b) (0,5 puntos) Hallar $\det \left[A + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \right]$.
c) (1 punto) Si c_1 y c_2 son las columnas de la matriz A (es decir, $A = (c_1\, c_2)$), hallar la solución del sistema:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (c_2)$$

Ejercicio 4 . **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & \lambda + 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:

a) (1 punto) Determinar λ para que A sea invertible.
b) (1 punto) Calcular A^{-1} en el caso $\lambda = 1$.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

Ejercicio 1.
a) Por la obtención del valor crítico $\lambda = -3$: 0,5 puntos, repartidos en: Planteamiento, 0,25 puntos; Resolución, 0,25 puntos. Por la discusión de cada uno de los dos casos $[\lambda = -3]$, $[\lambda \neq -3]$: 0,5 puntos repartidos en: Planteamiento, 0,25 puntos; Resolución, 0,25 puntos.
b) Planteamiento, 0,75 puntos. Resolución, 0,75 puntos.

Ejercicio 2.
a) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,25 puntos.
b) Calcular el plano π_a, 0,75 puntos repartidos en: Planteamiento, 0,25 puntos; Resolución, 0,5 puntos. Probar que la recta PQ está contenida en π_a, 0,75 puntos repartidos en: Planteamiento, 0,25 puntos; Resolución, 0,5 puntos.
c) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,25 puntos.

Ejercicio 3.
a) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.
b) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.

Ejercicio 4.
a) Encontrar a: $0,5$ puntos repartidos en: Planteamiento, 0,25 puntos; Resolución, 0,25 puntos. Estudiar la derivabilidad en $x = 0$: $0,5$ puntos repartidos en: Planteamiento, 0,25 puntos; Resolución, 0,25 puntos.
b) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.

OPCIÓN B

Ejercicio 1.
a) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.
b) Por cada límite 0,5 puntos repartidos en: Planteamiento, 0,25 puntos; Resolución, 0,25 puntos.
c) Estudiar la derivabilidad: $0,5$ puntos, repartidos en: Planteamiento, 0,25 puntos; Resolución, 0,25 puntos. Calcular f': $0,5$ puntos, repartidos en: Planteamiento, 0,25 puntos; Resolución, 0,25 puntos.

Ejercicio 2.
a) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.
b) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.
c) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.

Ejercicio 3.
a) Planteamiento, 0,25 puntos. Resolución, 0,25 puntos.
b) Planteamiento, 0,25 puntos. Resolución, 0,25 puntos.
c) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.

Ejercicio 4.
a) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.
b) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.