UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Departamento de Análisis Matemático

BECA DE COLABORACIÓN

Teoría espectral de operadores compactos y autoadjuntos en espacios de Hilbert

Blanca Fernández Besoy

Trabajo dirigido por:

Fernando Cobos Díaz

Curso 2015-2016

Índice general

Introducción

Esta memoria es el fruto de la Beca de Colaboración que he disfrutado durante el curso 2015/16 en el Departamento de Análisis Matemático de la UCM. Su objetivo es describir la teoría espectral de operadores compactos autoadjuntos en espacios de Hilbert.

Los espacios de Hilbert son la generalización más natural de los espacios euclídeos estudiados en los cursos básicos de Algebra Lineal. Nos permiten trabajar con espacios de dimensión infinita, pudiendo así considerar sucesiones y funciones como simples vectores. La teoría de operadores en espacios de Hilbert ha sido también ampliamente desarrollada.

Como sabemos, en un espacio euclídeo E de dimensión finita, el *Teorema espectral* nos dice que si A es una aplicación lineal simétrica, entonces existe una base ortonormal $x_1, ..., x_n$ de E y números reales $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tales que la matriz de A respecto de dicha base es la matriz diagonal dada por $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Nos proponemos aquí estudiar la extensión de este resultado al caso en el que E sea un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Seguimos principalmente la presentación de [1].

La memoria está organizada en dos capítulos. El primer capítulo es un repaso de las nociones básicas de los espacios de Hilbert (guiándonos de [1] y [4]), desarrollando las herramientas necesarias para el estudio de la teoría espectral. Por este motivo sólo trabajamos con $\mathbb{C}$ como cuerpo de escalares. Comenzamos introduciendo estos espacios como la generalización de los espacios $\mathbb{C}^n$ y a continuación damos una definición precisa y estudiamos sus propiedades geométricas más destacadas como la *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*, la *Desigualdad triangular* o la *Igualdad del paralelogramo* (Teorema 1.1.3).

Posteriormente estudiamos el concepto de base ortonormal de un espacio de Hilbert y la representación de los vectores de este espacio como combinación lineal (que ahora puede ser infinita) respecto de los vectores de una base ortonormal. Son fundamentales en este tema los *Teoremas de Bessel, Riesz-Fischer y Parseval* (Teorema 1.2.1, Teorema 1.2.2 y Teorema 1.2.3, respectivamente).

Finalmente, nos centramos en el estudio de los operadores lineales y acotados entre espacios de Hilbert. Veremos que en estos espacios la noción de acotación (según la Definición 1.3.2) es equivalente a la continuidad (Teorema 1.3.2). Estudiaremos en particular dos clases especiales de operadores lineales y acotados, los operadores autoadjuntos (que generalizan las aplicaciones simétricas) y los operadores compactos.

La teoría espectral (ver [1, 2, 3, 5, 6]) se desarrolla fundamentalmente en el Capítulo 2. Comenzamos mostrando las propiedades de los autovalores de operadores autoadjuntos, que un operador compacto puede no tener autovalores y que si el operador es compacto y autoadjunto entonces al menos uno de los valores $\|T\|$ o $-\|T\|$ tiene que ser autovalor de T (Teorema 2.1.4).

Pasamos después al teorema espectral para operadores compactos y autoadjuntos (Teorema 2.1.6) y mostramos las propiedades fundamentales de los sistemas básicos de autovalores y autovectores.

Finalmente probamos el teorema espectral para operadores compactos no necesariamente autoadjuntos (Teorema 2.2.3). Los números que salen ahora en su representación diagonal son los autovalores del operador compacto autoadjunto $(T^*T)^{1/2}$. A dicha sucesión, ordenada de forma decreciente y donde cada autovalor se repite de acuerdo a su multiplicidad, se le llama la sucesión de los números singulares de T. Terminamos la memoria estableciendo algunas de las propiedades de estos números.

CAPÍTULO 1.

Repaso de nociones de espacios de Hilbert

En este capítulo introducimos los espacios de Hilbert que son la generalización natural al caso de dimensión infinita del espacio $\mathbb{C}^n$, tienen un producto escalar y son completos. Estudiamos sus propiedades básicas, la representación de vectores respecto de bases ortonormales y las clases de operadores más destacadas entre estos espacios.

1.1. Definición y propiedades básicas

§ Generalización del espacio $\mathbb{C}^n$

El espacio vectorial complejo de dimensión n (lo denotamos $\mathbb{C}^n$) está formado por el conjunto de n-tuplas de números complejos $(x_1, ..., x_n)$ junto con las operaciones suma y producto por escalares definidas como

1. $x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{C}^n$.
2. $\alpha x = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n)$, para todo $x \in \mathbb{C}^n$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

En este espacio podemos considerar también la siguiente operación

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}. \end{aligned}$$

Observamos que esta operación verifica las propiedades de un producto escalar:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ y $\langle x, x \rangle = 0$ si y solo si $x = 0$.
2. $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$, para cualesquiera $x, y \in \mathcal{H}$.
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$, para cualesquiera $x, y \in \mathcal{H}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.
4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, para cualesquiera $x, y, z \in \mathcal{H}$.

Cada n-tupla $x = (x_1, ..., x_n)$ se llama vector y definimos su longitud o norma como

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2}.$$

A partir de las propiedades del producto escalar podemos demostrar la *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*:

Teorema 1.1.1. Sean $x, y \in \mathbb{C}^n$ entonces

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Además, si $y \neq 0$ la igualdad se da si y solo si $x = \lambda y$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Por las propiedades del producto escalar tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle &= \|x\|^2 - \overline{\lambda}\langle x, y\rangle - \lambda\langle y, x\rangle + |\lambda|^2\|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2Re\lambda\langle y, x\rangle + |\lambda|^2\|y\|^2. \end{aligned}$$

Si $\langle x, y\rangle = 0$ entonces la desigualdad que queremos probar es trivial por lo que suponemos $\langle x, y\rangle \neq 0$. Si tomamos $\lambda = \frac{\|x\|^2}{\langle y,x\rangle}$, sustituyendo en la igualdad anterior obtenemos que

$$0 \leq -\|x\|^2 + \frac{\|x\|^4\|y\|^2}{|\langle x, y\rangle|^2}$$

de donde se deduce la *Desigualdad de Cauchy-Schwarz.*

Supongamos ahora que $y \neq 0$. Si $\langle x, y\rangle = 0$ la igualdad se da sólo si $x = 0$, por lo que vamos a suponer que $\langle x, y\rangle \neq 0$. En este caso, por lo visto antes la igualdad se da si y solo si $\langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = 0$ con $\lambda = \frac{\|x\|^2}{\langle y,x\rangle}$, de donde deducimos que $x = \lambda y$. □

Otra desigualdad importante en el espacio vectorial complejo es la *Desigualdad triangular* que, cuando nos restringimos al plano, nos dice que la suma de la longitud de dos lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.

Teorema 1.1.2. Sean $x, y \in \mathbb{C}^n$ entonces $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + 2Re\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la *Desigualdad de Cauchy-Schwarz.* □

Una primera generalización de los espacios $\mathbb{C}^n$ sería considerar el espacio ℓ_2 de sucesiones de números complejos que definimos a continuación:

Definición 1.1.1. El espacio vectorial ℓ_2 consiste en el conjunto de todas las sucesiones de números complejos $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ tales que $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty$, junto con la suma y producto por escalares definidos como:

- $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n, ...)$, para cualesquiera $x, y \in \ell_2$.
- $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n, ...)$, para todo $x \in \ell_2$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

Esto sería un espacio vectorial de dimensión infinita pues el conjunto $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ (donde e_n es la sucesión formada por todos ceros y un uno en la posición n-ésima) es linealmente independiente.

También podemos definir un producto escalar como

$$\begin{array}{rcl} \langle , \rangle : \ell_2 \times \ell_2 & \longmapsto & \mathbb{C} \\ (x,y) & \longrightarrow & \langle x,y\rangle = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j} \end{array}$$

y su correspondiente norma $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2\right)^{1/2}$.

Puesto que $\sum_{j=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ y $\sum_{j=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty$, estas operaciones tienen sentido. Efectivamente, por la *Desigualdad de Cauchy-Schwarz* (Teorema 1.1.1), para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2\right)^{1/2}.$$

Y así, $|\langle x,y\rangle| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2\right)^{1/2} < \infty$.

§ Los espacios de Hilbert

Vamos a extender las propiedades estudiadas anteriormente de los espacios $\mathbb{C}^n$ y ℓ_2 al caso más general.

Definición 1.1.2. Un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial con producto escalar y completo.

Los espacios vectoriales con un producto escalar preservan algunas de las propiedades geométricas que tenemos en el plano.

Teorema 1.1.3. Sea E un espacio vectorial con producto escalar entonces para cada $x, y \in E$ se verifica que

1. $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$. (*Desigualdad de Schwarz*)
2. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (*Desigualdad triangular*)
3. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. (*Igualdad del paralelogramo*)

Demostración. Las demostraciones de (1) y (2) son exactamente las mismas que las de los Teoremas 1.1.1 y 1.1.2. Por último,

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2Re\langle x,y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2Re\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

□

Proposición 1.1.4. El producto escalar es continuo en $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$, es decir, si $x_n \to x$ e $y_n \to y$ entonces $\langle x_n, y_n\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle x, y\rangle$.

Demostración. Por la *Desigualdad de Schwarz* tenemos que

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y\rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \leq \|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\| \end{aligned}$$

y como $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ e $y_n \xrightarrow{n\to\infty} y$, entonces $\langle x_n, y_n\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle x, y\rangle$. □

Los espacios $\mathbb{C}^n$ verifican la definición de espacio de Hilbert. Veamos que el espacio ℓ_2 definido antes es un espacio de Hilbert, para ello solo hace falta probar que es completo.

Teorema 1.1.5. Sea $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en ℓ_2 entonces converge en dicho espacio.

Demostración. Sea $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de ℓ_2, entonces cada x^n es de la forma $x^n = (x_1^n, x_2^n, ..., x_k^n, ...)$. La idea de la demostración es probar que para cada $k \in \mathbb{N}$, la sucesión de números complejos $\{x_k^n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un x_k y probar que $x = (x_1, x_2, ..., x_k, ...) \in \ell_2$ es el límite buscado.

Dado $k_0 \in \mathbb{N}$ como

$$|x_{k_0}^n - x_{k_0}^m| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^n - x_k^m|^2\right)^{1/2} = \|x^n - x^m\|$$

la sucesión de números complejos $\{x_{k_0}^n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y por la completitud de $\mathbb{C}$ tenemos que existe $x_{k_0} = \lim_{n\to\infty} x_{k_0}^n$.

Definimos $x = (x_1, ..., x_k, ...)$ la sucesión formada por los límites anteriores. Veamos que $x \in \ell_2$, es decir que $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$. Dado $N \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |x_k^n|^2 \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^2 = M^2,$$

donde hemos usado que al ser $\{x^n\}$ de Cauchy es acotada y hemos llamado $M = \sup\{\|x^n\| : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces, $\|x\| \leq M$ y así $x \in \ell_2$.

Por último probaremos que $x^n \xrightarrow{n\to\infty} x$. Dado $\varepsilon > 0$ existe un número natural $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$, entonces para cualquier $p \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\sum_{k=1}^{p} |x_k^m - x_k^n|^2 \leq \|x^n - x^m\|^2 < \varepsilon.$$

Entonces,

$$\sum_{k=1}^{p} |x_k - x_k^n|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{p} |x_k^m - x_k^n|^2 \leq \varepsilon.$$

Como esto ocurre para todo $p \in \mathbb{N}$, concluimos que $\|x^n - x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^n - x_k|^2 \leq \varepsilon$. □

Veamos algunos ejemplos destacados de espacios de Hilbert.

Ejemplo 1.1.1.

- Ya hemos probado que $\mathbb{C}^n$ y ℓ_2 son espacios de Hilbert.
- Las funciones de cuadrado integrable.

  Sea $[a,b]$ un intervalo real, definimos $\mathcal{L}_2[a,b] = \{f \text{ medible Lebesgue } : \int_a^b |f|^2 < \infty\}$ el conjunto de las funciones de cuadrado integrable.

  El espacio $\mathcal{L}_2[a,b]$ con la suma de funciones punto a punto y el producto por escalares usual es un espacio vectorial. Nos gustaría definir un producto escalar de la siguiente forma:

  $$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (f,g) &\longmapsto \langle f,g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt \end{aligned}$$

  El problema es que entonces $\langle f,f \rangle = 0$ si y solo si $f = 0$ en casi todo punto (no si f es idénticamente nula). Para resolver este problema establecemos una relación de equivalencia según la cual dos funciones f y g serán iguales si coinciden en casi todo punto.

  Así definimos $L_2[a,b]$ como el espacio de las funciones de cuadrado integrable una vez que ya hemos tomado la clase de equivalencia. Este espacio con el producto escalar definido antes sí que resulta un espacio de Hilbert.

  Un estudio más detallado de este espacio se puede encontrar en el Apéndice 2 (página 267) de [1].

§ Distancia a un conjunto convexo

A partir de ahora denotaremos por $\mathcal{H}$ a un espacio de Hilbert. Vamos a probar que la distancia de un vector a cualquier conjunto convexo y cerrado del espacio se alcanza.

Definición 1.1.3. Sea $A \subset \mathcal{H}$, A es convexo si para cualesquiera $x, y \in A$ se tiene que $\{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\} \subset A$.

Ejemplo 1.1.2.

1. Cualquier subespacio es un conjunto convexo.
2. La bola de centro x_0 y radio r, $B(x_0, r) = \{x : \|x - x_0\| < r\}$ es un conjunto convexo.

   En efecto, sean $x, y \in B(x_0, r)$ y sea $t \in [0,1]$ entonces

   $$\begin{aligned} \|tx + (1-t)y - x_0\| &= \|tx + (1-t)y - tx_0 + (1-t)x_0\| \\ &\leq t\|x - x_0\| + (1-t)\|y - x_0\| \\ &< tr + (1-t)r = r. \end{aligned}$$

3. El conjunto $\{(x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in \ell_2 : x_j \geq 0, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}\}$.

Teorema 1.1.6. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $A \neq \emptyset$ un subconjunto de $\mathcal{H}$ convexo y cerrado. Dado $x_0 \in \mathcal{H}$ existe un único $a_0 \in A$ tal que

$$\|x_0 - a_0\| = \text{ínf}\{\|x_0 - a\| : a \in A\}.$$

Demostración. Probemos en primer lugar la existencia.

Llamemos $d = \text{ínf}\{\|x_0 - a\| : a \in A\}$. Debe existir una sucesión $\{a_n\}$ en A tal que $\|x_0 - a_n\| \xrightarrow{n\to\infty} d$.

En el caso que $d = 0$ entonces $\|x_0 - a_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ y así, $a_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ y por ser A cerrado deducimos que $x_0 \in A$. Así, $a_0 = x_0$ cumple lo que queríamos.

En el caso $d > 0$ vamos a probar que la sucesión $\{a_n\}$ es de Cauchy. En efecto,

$$\begin{aligned} \|a_n - a_m\|^2 &= \|a_n - x_0 - (a_m - x_0)\|^2 = 2(\|a_n - x_0\|^2 + \|a_m - x_0\|^2) - \|a_n + a_m - 2x_0\|^2 \\ &= 2(\|a_n - x_0\|^2 + \|a_m - x_0\|^2) - 4\left\|\frac{a_n + a_m}{2} - x_0\right\|^2. \end{aligned}$$

Donde hemos utilizado la *Igualdad del paralelogramo.*

Como $a_n, a_m \in A$ y A es un conjunto convexo entonces tenemos que $\frac{a_n+a_m}{2} \in A$ y así $\|\frac{a_n+a_m}{2} - x_0\| \geq d$. Entonces,

$$\lim_{n,m\to\infty} \|a_n - a_m\|^2 \leq 2(d^2 + d^2) - 4d^2 = 0.$$

Por la completitud de $\mathcal{H}$ existe $a_0 = \lim a_n$ y por ser A cerrado $a_0 \in A$.

Probemos por último la unicidad del límite.

Supongamos que existen $a_1, a_2 \in A$ tal que $a_1 \neq a_2$ y $\|x_0 - a_1\| = \|x_0 - a_2\| = d$, vamos a llegar a una contradicción.

$$\begin{aligned} \left\|x_0 - \frac{a_1 + a_2}{2}\right\|^2 &= \left\|\frac{x_0 - a_1}{2} + \frac{x_0 - a_2}{2}\right\|^2 = 2\left(\left\|\frac{x_0 - a_1}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x_0 - a_2}{2}\right\|^2\right) - \left\|\frac{x_0 - a_1}{2} - \frac{x_0 - a_2}{2}\right\|^2 \\ &= \frac{1}{2}(\|x_0 - a_1\|^2 + \|x_0 - a_2\|^2) - \left\|\frac{a_2 - a_1}{2}\right\|^2 = d^2 - \left\|\frac{a_2 - a_1}{2}\right\|^2 < d^2. \end{aligned}$$

□

§ Descomposición ortogonal

Definición 1.1.4. Sean $x, y \in \mathcal{H}$ decimos que x e y son ortogonales si $\langle x, y\rangle = 0$. Dado M un subconjunto de $\mathcal{H}$ definimos el complemento ortogonal de M como

$$M^{\perp} = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, m\rangle = 0, \text{ para todo } m \in M\}.$$

Proposición 1.1.7. Sea M un subconjunto de $\mathcal{H}$, entonces $M^{\perp}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$.

Demostración. Si $x, y \in M^{\perp}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ veamos que $\alpha x + \beta y \in M^{\perp}$.

Sea $m \in M$ tenemos que

$$\langle \alpha x + \beta y, m \rangle = \alpha \langle x, m \rangle + \beta \langle y, m \rangle = 0$$

de donde deducimos que $\alpha x + \beta y \in M^{\perp}$, y así $M^{\perp}$ es un subespacio de $\mathcal{H}$.

Veamos que es $M^{\perp}$ es cerrado. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $M^{\perp}$ tal que $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ veamos que $x \in M^{\perp}$. Efectivamente, sea $y \in M$, por la Proposición 1.1.4 se tiene que

$$\langle x, y \rangle = \langle \lim_{n\to\infty} x_n, y \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y \rangle = 0.$$

□

Veamos ahora una generalización del *Teorema de Pitágoras.*

Proposición 1.1.8. Si $u, v \in \mathcal{H}$ son perpendiculares entonces $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Demostración.

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \|u\|^2 + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

□

Proposición 1.1.9. Sean M un subespacio de $\mathcal{H}$, $v \in \mathcal{H}$ y $w \in M$, entonces $v - w \perp M$ si y solo si $\|v - w\| = d(v, M)$.

Demostración. Supongamos que $v - w \perp M$. Sea $m \in M$ aplicando la proposición anterior se obtiene que

$$\|v-m\|^2 \quad = \quad \|v-w+w-z\|^2 = \|v-w\|^2 + \|w-z\|^2 \geq \|v-w\|^2$$

de donde deducimos que $d(v, M) = \|v - w\|$.

Recíprocamente, supongamos que $\|v - w\| = d(v, M)$, es decir, $\|v - w\| \leq \|v - m\|$ para todo $m \in M$. Como M es un subespacio, entonces para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ y para cada $m \in M$ se tiene que $w + \lambda m \in M$. Así,

$$\begin{aligned} \|v-w\|^2 &\leq \|v-(w+\lambda m)\|^2 = \langle v-w-\lambda m, v-w-\lambda m \rangle \\ &= \|v-w\|^2 - 2Re\lambda\langle m, v-w \rangle + |\lambda|^2\|m\|^2 \end{aligned}$$

de donde deducimos que $2Re\lambda\langle m, v-w \rangle \leq |\lambda|^2\|m\|^2$.

Tomemos $\lambda = r\overline{\langle m, v-w \rangle}$ siendo r un número real arbitrario. Llegamos a que $2r|\langle m, v-w \rangle|^2 \leq r^2|\langle m, v-w \rangle|^2\|m\|^2$ y como r es arbitrario deducimos que $\langle m, v-w \rangle = 0$. □

Teorema 1.1.10. Sea M un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$. Dado $y \in \mathcal{H}$, entonces existen un único $m \in M$ y un único $n \in M^{\perp}$ tales que $y = m + n$. Es decir, $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$.

Demostración. Como M es un subespacio, es convexo y como por hipótesis es cerrado, entonces estamos en las condiciones de aplicar la Proposición 1.1.6 y por lo tanto dado $y \in \mathcal{H}$ existe un único $m \in M$ tal que $d(y, M) = \|y - m\|$ y por la Proposición 1.1.9 deducimos que $y - m \in M^{\perp}$.

Veamos que esta descomposición es única. Supongamos que $y = m_1 + n_1$ con $m_1 \in M$ y $n_1 \in M^{\perp}$. Entonces, $y - m_1 \in M^{\perp}$ y por la proposición anterior $d(y, M) = \|y - m_1\|$. Por la unicidad del Teorema 1.1.6 deducimos que $m_1 = m$. □

1.2. Bases ortonormales

Definición 1.2.1. Decimos que un conjunto $\{x_n\}$ de $\mathcal{H}$ es un sistema ortonormal si es un conjunto linealmente independiente que verifica $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y además $\langle x_n, x_m \rangle = 0$ para todo $n \neq m$.

A continuación, vamos a estudiar la representación de los vectores de un espacio de Hilbert respecto sistemas y bases ortonormales. El primer resultado que vamos a probar se conoce como *Desigualdad de Bessel*.

Teorema 1.2.1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $\{x_n\}$ un sistema ortonormal en $\mathcal{H}$. Entonces, para cada $x \in \mathcal{H}$ se tiene que:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 = \|x\|^2$ si y solo si $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$.

Demostración. Definimos $u_m = \sum_{n=1}^{m} \langle x, x_n \rangle x_n$. Esta suma parcial verifica que

$$\|x - u_m\|^2 \quad = \quad \langle x - u_m, x - u_m \rangle = \|x\|^2 + \|u_m\|^2 - \langle u_m, x \rangle - \langle x, u_m \rangle.$$

Vamos a calcular cada uno de los elementos que aparecen por separado.

$$\langle u_m, x \rangle = \langle \sum_{n=1}^{m} \langle x, x_n \rangle x_n, x \rangle = \sum_{n=1}^{m} \langle x, x_n \rangle \langle x_n, x \rangle = \sum_{n=1}^{m} |\langle x, x_n \rangle|^2.$$

Análogamente, $\langle x, u_m \rangle = \sum_{n=1}^{m} |\langle x, x_n \rangle|^2$. Por otro lado,

$$\langle u_m, u_m \rangle = \langle \sum_{n=1}^{m} \langle x, x_n \rangle x_n, \sum_{n=1}^{m} \langle x, x_n \rangle x_n \rangle = \sum_{n=1}^{m} |\langle x, x_n \rangle|^2.$$

Luego, $0 \leq \|x - u_m\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |\langle x, x_n \rangle|^2$. Como esto ocurre para todo $m \in \mathbb{N}$ concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

Veamos ahora la segunda parte del teorema.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 = \|x\|^2$, entonces $\|x - u_m\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |\langle x, u_m \rangle|^2 \xrightarrow{m \to \infty} 0$.

Por otro lado, si $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n = \lim_{m \to \infty} u_m$. Entonces, por la continuidad del producto escalar

$$\|x\|^2 = \langle \lim_{m \to \infty} u_m, \lim_{m \to \infty} u_m \rangle = \lim_{m \to \infty} \langle u_m, u_m \rangle = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} |\langle x, x_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2.$$

□

A continuación probamos el *Teorema de Riesz-Fischer*.

Teorema 1.2.2. Sea $\{x_n\}$ un sistema ortonormal en $\mathcal{H}$ y $\{\lambda_n\}$ una sucesión de números complejos.

1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n = x \in \mathcal{H}$, entonces $\lambda_n = \langle x, x_n \rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$.

2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$, entonces $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \in \mathcal{H}$.

Demostración. Si $x = \sum_n \lambda_n x_n \in \mathcal{H}$, entonces

$$\langle x, x_k \rangle = \langle \sum_n \lambda_n x_n, x_k \rangle = \sum_n \langle \lambda_n x_n, x_k \rangle = \lambda_k.$$

Además utilizando la segunda parte del Teorema 1.2.1 tenemos que

$$\sum_n |\lambda_n|^2 = \sum_n |\langle x, x_n \rangle|^2 = \|x\|^2 < \infty.$$

Supongamos ahora que $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$. Sea $u_m = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n x_n$ veamos que $\{u_m\}$ converge. Para ello basta probar que es una sucesión de Cauchy.

Si $k < m$ entonces

$$\|u_m - u_k\|^2 = \sum_{n=k+1}^{m} |\lambda_n|^2 \|x_n\|^2 = \sum_{n=k+1}^{m} |\lambda_n|^2$$

y como $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$, entonces sus sumas parciales son de Cauchy y así, $\{u_m\}$ es de Cauchy en $\mathcal{H}$ y al ser completo deducimos que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \in \mathcal{H}$. □

Definición 1.2.2. Decimos que un sistema ortonormal $\{x_n\}$ en $\mathcal{H}$ es una base ortonormal si todo $x \in \mathcal{H}$ se puede escribir como $x = \sum_n \alpha_n x_n$ para alguna sucesión $\{\alpha_n\}$ de números complejos.

Observamos que esta definición de base ortonormal hablamos de combinaciones lineales que pueden ser numerables a diferencia de la definición de base que conocíamos para espacios vectoriales donde debían ser finitas.

Veamos a continuación el *Teorema de Parseval*.

Teorema 1.2.3. Sea $\{x_n\}$ un sistema ortonormal en $\mathcal{H}$. Entonces, son equivalentes:

1. $\{x_n\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$.

2. Si $\langle x, x_n \rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $x = 0$.

3. *Span*$\{x_n\}$ es denso en $\mathcal{H}$, es decir, todo vector $x \in \mathcal{H}$ es límite de una sucesión de vectores en *span*$\{x_n\}$.

4. Para cada $x \in \mathcal{H}$ se verifica que $\|x\|^2 = \sum_n |\langle x, x_n \rangle|^2$.

Demostración. Veamos que (1) implica (4). Sea $x \in \mathcal{H}$, por ser $\{x_n\}$ una base ortonormal podemos escribir x como $x = \sum_n \lambda_n x_n$ y por el *Teorema de Riesz-Fischer* sabemos que $\lambda_n = \langle x, x_n \rangle$. Entonces,

$$\|x\|^2 = \langle \sum_n \langle x, x_n \rangle x_n, \sum_n \langle x, x_n \rangle x_n \rangle = \sum_n |\langle x, x_n \rangle|^2.$$

Veamos que (4) implica (3). Dado $x \in \mathcal{H}$ y $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{m} \langle x, x_n \rangle x_n \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |\langle x, x_n \rangle|^2 \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Veamos que (3) implica (2). Supongamos que $\overline{span\{x_n\}} = \mathcal{H}$.

Sea $x \in \mathcal{H}$ tal que $\langle x, x_n \rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $y \in span\{x_n\}$ y por la continuidad del producto escalar $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $y \in \overline{span\{x_n\}} = \mathcal{H}$. De donde deducimos que $x = 0$.

Por último veamos que (2) implica (1). Sea $x \in \mathcal{H}$ vamos a definir $y = \sum_n \langle x, x_n \rangle x_n$ que sabemos que está en $\mathcal{H}$ por el Teorema 1.2.2. Sea $k \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\langle x - y, x_k \rangle = \langle x, x_k \rangle - \langle y, x_k \rangle = \langle x, x_k \rangle - \langle x, x_k \rangle = 0.$$

Y por hipótesis deducimos que $x - y = 0$. Es decir, $x = \sum_n \langle x, x_n \rangle x_n$.

□

1.3. Operadores lineales acotados

Definición 1.3.1. Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ dos espacios de Hilbert. Sea T una aplicación de $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$ diremos que es lineal si verifica que:

- $T(x + y) = T(x) + T(y)$ para cualesquiera $x, y \in \mathcal{H}_1$.
- $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ para todo $x \in \mathcal{H}_1$ y todo $\alpha \in \mathbb{C}$.

A partir de ahora escribiremos Tx en lugar de $T(x)$.

Observemos que cualquier operador lineal verifica que $T0 = 0$, pues

$$T0 = T(x - x) = Tx + T(-x) = Tx - Tx = 0.$$

Definición 1.3.2. Decimos que un operador $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ es acotado si

$$\sup\{\|Tx\|_{\mathcal{H}_2} : \|x\|_{\mathcal{H}_1} \leq 1\} < \infty.$$

Al valor $\|T\| = \sup\{\|Tx\|_{\mathcal{H}_2} : \|x\|_{\mathcal{H}_1} \leq 1\}$ lo llamamos norma del operador.

Proposición 1.3.1. Sea $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ un operador lineal, entonces su norma verifica las siguientes propiedades:

1. $\|T\| = \sup\{\|Tx\|_{\mathcal{H}_2} : \|x\|_{\mathcal{H}_1} = 1\}$.
2. $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y \rangle| : \|x\|_{\mathcal{H}_1} = \|y\|_{\mathcal{H}_2} = 1\} = \sup\{|\langle Tx, y \rangle| : \|x\|_{\mathcal{H}_1} \leq 1, \|y\|_{\mathcal{H}_2} \leq 1\}$.
3. Si $\|Tx\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}_1$, entonces T es acotado y $\|T\| \leq C$.
4. Si T es un operador acotado entonces $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}_1$.

Demostración.

1. Claramente, $\sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} \leq \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$.

   Por otro lado, sea $x \neq 0 \in \mathcal{H}_1$ con $\|x\| \leq 1$. Se tiene que

   $$\|Tx\| \leq \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\|T\frac{x}{\|x\|}\right\| \leq \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}$$

   de donde obtenemos la otra desigualdad.

2. Por la *Desigualdad de Cacuchy-Schwarz* tenemos que si $\|x\|_{\mathcal{H}_1} = \|y\|_{\mathcal{H}_2} = 1$, entonces $|\langle Tx, y\rangle| \leq \|Tx\|\|y\| = \|Tx\| \leq \|T\|$. Luego, $\sup\{|\langle Tx, y\rangle| : \|x\|_{\mathcal{H}_1} = \|y\|_{\mathcal{H}_2} = 1\} \leq \|T\|$.

   Veamos la otra desigualdad. Sea $x \in \mathcal{H}_1$ tal que $\|x\| = 1$. Entonces, si $Tx = 0$ claramente $\|Tx\| \leq |\langle Tx, y\rangle|$ para todo $y \in \mathcal{H}_2$. Supongamos ahora que $Tx \neq 0$, entonces

   $$\|Tx\| = \left\langle Tx, \frac{Tx}{\|Tx\|}\right\rangle \leq \sup\{|\langle Tx, y\rangle| : \|x\|_{\mathcal{H}_1} = \|y\|_{\mathcal{H}_2} = 1\}.$$

   De aquí deducimos que $\|T\| \leq \sup\{|\langle Tx, y\rangle| : \|x\|_{\mathcal{H}_1} = \|y\|_{\mathcal{H}_2} = 1\}$.

   Para probar que $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y\rangle| : \|x\|_{\mathcal{H}_1} \leq 1, \|y\|_{\mathcal{H}_2} \leq 1\}$ se utiliza el mismo argumento pero usando que $\|T\|$ coincide con $\sup\{\|Tx\|_{\mathcal{H}_2} : \|x\|_{\mathcal{H}_1} \leq 1\}$.

3. Si $\|Tx\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}_1$, entonces el conjunto $\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$ está acotado por C y por lo tanto, $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} \leq C$.

4. Si $x = 0$ como $T0 = 0$ está claro. Supongamos ahora $x \neq 0$. Entonces, $\frac{x}{\|x\|}$ es un vector unitario y por lo tanto

   $$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\|T\frac{x}{\|x\|}\right\| \leq \|T\|$$

   de donde deducimos que $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$.

$\square$

Definición 1.3.3. Vamos a denotar por $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ al conjunto de operadores lineales y acotados entre $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$.

Veamos algunos ejemplos de operadores lineales y acotados entre espacios de Hilbert.

Ejemplo 1.3.1. 1. Todo operador lineal que parte de un espacio de Hilbert de dimensión finita es acotado.

En efecto, sea $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ un operador lineal y $\{x_1, ..., x_n\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}_1$. Entonces, cada $x \in \mathcal{H}_1$ se puede escribir como $x = \sum_{j=1}^n \langle x, x_j\rangle x_j$ y cuando le aplicamos el operador obtenemos que $Tx = \sum_{j=1}^n \langle x, x_j\rangle Tx_j$. Así,

$$\|Tx\| = \left\|\sum_{j=1}^n \langle x, x_j\rangle Tx_j\right\| \leq \sum_{j=1}^n |\langle x, x_j\rangle|\|Tx_j\| \leq \sum_{j=1}^n \|x\|\|x_j\|\|Tx_j\| = \|x\| \sum_{j=1}^n \|Tx_j\|.$$

Por lo que T es un operador acotado.

2. Sea $\{x_n\}$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y sea λ_n una sucesión acotada de números complejos. Para cada $x \in \mathcal{H}$ definimos
$$Tx = \sum_k \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k.$$
Claramente T es un operador lineal, vamos a probar que también está acotado
$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \langle Tx, Tx \rangle = \sum_k |\lambda_k|^2 |\langle x, x_k \rangle|^2 \\ &\leq \sup\{|\lambda_k| : k \in \mathbb{N}\}^2 \sum_k |\langle x, x_k \rangle|^2 \leq \sup\{|\lambda_k| : k \in \mathbb{N}\}^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$
Llamemos $M = \sup\{|\lambda_k| : k \in \mathbb{N}\} < \infty$ por ser una sucesión acotada. Además, dado $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda_k| > M - \varepsilon$. Luego,
$$\|T\| \geq \|Tx_k\| = |\lambda_k| \geq M - \varepsilon.$$
Y así, $\|T\| = M$.

Veremos en el siguiente capítulo que una clase amplia de operadores tiene una representación de esta forma.

Veamos ahora la relación existente entre la propiedad de acotación de un operador lineal y su continuidad.

Teorema 1.3.2. Sea $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. T es continuo en un punto.
2. T es uniformemente continuo en $\mathcal{H}_1$.
3. T es acotado.

Demostración. Veamos que (1) implica (2). Supongamos que T es continuo en x_0. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - x_0\| < \delta$ entonces $\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$. Luego, si $z, w \in \mathcal{H}_1$ verifican que $\|z - w\| < \delta$ esto implica que $\|x_0 - (x_0 + z - w)\| < \delta$ y por lo tanto,
$$\varepsilon > \|Tx_0 - T(x_0 + z - w)\| = \|Tx_0 - Tx_0 - T(z - w)\| = \|T(z - w)\|.$$

Veamos que (2) implica (3). Supongamos que T es uniformemente continuo en $\mathcal{H}_1$. Entonces dado $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| \leq \delta$ entonces se tiene que $\|Tx\| \leq 1$. Luego, dado $x \neq 0 \in \mathcal{H}_1$, $\frac{x}{\|x\|}\delta$ tiene norma δ y por lo tanto, $\|T\frac{x}{\|x\|}\delta\| \leq 1$, es decir, $\|Tx\| \leq \frac{\|x\|}{\delta}$.

Veamos por último que (3) implica (1). Supongamos que T es un operador acotado, entonces $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$. Sea $x_0 \in \mathcal{H}_1$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \frac{\varepsilon}{1+\|T\|}$ tal que si $\|x - x_0\| < \delta$, entonces
$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\|\|x - x_0\| < \|T\| \frac{\varepsilon}{1 + \|T\|} < \varepsilon.$$
□

En lo que sigue, cuando estemos trabajando con operadores lineales hablaremos indistintamente de operadores acotados y continuos, pues como acabamos de probar en el teorema anterior ambas nociones coinciden.

§ Funcionales.

Las aplicaciones que llevan un espacio de Hilbert en $\mathbb{C}$ reciben el nombre de funcionales. A continuación vamos a estudiar los funcionales de $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$, es decir, aquellos que son lineales y acotados.

Ejemplo 1.3.2. Sea $y \in \mathcal{H}$, veamos que $f_y(x) = \langle x, y \rangle \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$. El operador f_y es lineal y además,

$$|f_y(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Por lo que f_y es acotado y $\|f_y\| \leq \|y\|$. De hecho, la norma del funcional es exactamente $\|y\|$, pues

$$\|f_y\| \|y\| \geq \|f_y(y)\| = \|y\|^2.$$

A continuación vamos a probar que todo funcional en $\mathcal{H}$ se puede escribir de hecho en la forma anterior. Es lo que se conoce como *Teorema de representación de Riesz.*

Necesitaremos el siguiente lema previo.

Lema 1.3.3. Si f es un funcional lineal en $\mathcal{H}$ y $f(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in \mathcal{H}$ entonces cada $x \in \mathcal{H}$ se puede escribir como $x = \beta x_0 + z$ para algún $\beta \in \mathbb{C}$ y algún $z \in Ker\ f$.

Demostración. Buscamos $\beta \in \mathbb{C}$ tal que $x - \beta x_0 \in Ker\ f$, es decir, $f(x - \beta x_0) = 0$. Tomando $\beta = \frac{f(x)}{f(x_0)}$ y $z = x - \beta x_0$ se verifican las propiedades que queríamos. □

Teorema 1.3.4. Si f es un funcional lineal y continuo sobre un espacio de Hilber $\mathcal{H}$, entonces existe un único $y \in \mathcal{H}$ tal que para cada $x \in \mathcal{H}$

$$f(x) = \langle x, y \rangle.$$

Además, $\|f\| = \|y\|$.

Demostración. Si $f = 0$ entonces claramente el único $y \in \mathcal{H}$ que verifica las propiedades es $y = 0$.

Supongamos ahora que $f \not\equiv 0$. Entonces, $Ker\ f \subsetneq \mathcal{H}$ y además es cerrado (ya que $Ker\ f = f^{-1}(0)$ y f es continua). Existe así, $v \neq 0 \in (Ker\ f)^{\perp}$ y unitario. Tomemos $y = \alpha v$ donde $\alpha = \overline{f(v)}$. Entonces,

$$y \perp Ker\ f \text{ y } f(y) = \langle y, y \rangle.$$

Por el Lema 1.3.3, dado $x \in \mathcal{H}$ podemos escribirlo como $x = \beta y + z$ con $\beta \in \mathbb{C}$ y $z \in Ker\ f$. Entonces,

$$f(x) = \beta f(y) = \beta \langle y, y \rangle = \langle \beta y + z, y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Veamos la unicidad. Supongamos que $f(x) = \langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Entonces, $\langle x, y_1 - y_2 \rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ en concreto para $x = y_1 - y_2$. Luego, $\|y_1 - y_2\|^2 = 0$ y en consecuencia $y_1 = y_2$.

□

§ Operadores de rango finito

Definición 1.3.4. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Llamamos imagen o rango del operador T a

$$Im\ T = \{Tx : x \in \mathcal{H}_1\}.$$

Si $Im\ T$ resulta ser un subespacio de $\mathcal{H}_2$ de dimensión finita, diremos que el operador T es un operador de rango finito.

Veamos que los operadores de rango finito admiten una representación muy sencilla.

Teorema 1.3.5. Supongamos que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tiene rango n. Entonces existen vectores $v_1, ..., v_n$ en $\mathcal{H}_1$ y vectores $\varphi_1, ..., \varphi_n$ en $\mathcal{H}_2$ tales que para cada $x \in \mathcal{H}_1$

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j \rangle \varphi_j.$$

Además, los vectores $\varphi_1, ..., \varphi_n$ pueden ser tomados de forma que sean una base ortonormal de $Im\ T$.

Demostración. Sea $\varphi_1, ..., \varphi_n$ una base ortonormal de $Im\ T$. Entonces, para cada $x \in \mathcal{H}_1$

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \langle Tx, \varphi_j \rangle \varphi_j.$$

Ahora, para cada $j \in \{1, ..., n\}$, $f_j(x) = \langle Tx, \varphi_j \rangle$ es un funcional lineal y acotado en $\mathcal{H}_1$ y por el *Teorema de representación de Riesz* existe $v_j \in \mathcal{H}_1$ tal que

$$\langle Tx, \varphi_j \rangle = f_j(x) = \langle x, v_j \rangle.$$

Luego,

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j \rangle \varphi_j.$$

□

Observemos que la representación de operadores de rango finito no es única pues dependiendo de la base ortonormal que escojamos tendremos distintas representaciones.

§ El operador adjunto

Si T es un operador lineal y continuo entre dos espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$. Entonces, fijando $y \in \mathcal{H}_2$ obtenemos $f_y(x) = \langle Tx, y \rangle_{\mathcal{H}_2}$ un funcional lineal y continuo sobre $\mathcal{H}_1$, por lo que aplicando el Teorema 1.3.4 tenemos que existe un único $y^* \in \mathcal{H}_1$ tal que $f_y(x) = \langle x, y^* \rangle_{\mathcal{H}_1}$ para todo $x \in \mathcal{H}_1$.

Esto nos permite definir el operador

$$\begin{array}{rcl} T^* : \mathcal{H}_2 & \longrightarrow & \mathcal{H}_1 \\ y & \longmapsto & T^* y = y^* \end{array}$$

verificando que $\langle Tx, y \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x, T^* y \rangle_{\mathcal{H}_1}$, para cada $x \in \mathcal{H}_1$ y cada $y \in \mathcal{H}_2$.

Seguidamente describimos las propiedades del operador adjunto.

Lema 1.3.6. Sean $T, S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

1. T^* es un operador lineal y continuo de $\mathcal{H}_2$ en $\mathcal{H}_1$ con $\|T^*\| = \|T\|$.
2. $(T+S)^* = T^* + S^*$.
3. $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$.
4. $T^{**} = T$.
5. Sea $D \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ entonces, $(DT)^* = T^* D^*$.
6. $Ker\ T = (Im\ T^*)^{\perp}$.
7. $\overline{Im\ T} = (Ker\ T^*)^{\perp}$.

Demostración.

1. Sean $y_1, y_2 \in \mathcal{H}_2$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ entonces
$$\begin{aligned}\langle x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2)\rangle &= \langle Tx, \alpha y_1 + \beta y_2\rangle = \overline{\alpha}\langle Tx, y_1\rangle + \overline{\beta}\langle Tx, y_2\rangle \\ &= \overline{\alpha}\langle x, T^* y_1\rangle + \overline{\beta}\langle x, T^* y_2\rangle = \langle x, \alpha T^* y_1 + \beta T^* y_2\rangle.\end{aligned}$$
Luego, T^* es lineal. Además,
$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{|\langle Tx, y\rangle| : \|x\|_{\mathcal{H}_1} = \|y\|_{\mathcal{H}_2} = 1\} \\ &= \sup\{|\langle x, T^* y\rangle| = |\langle T^* y, x\rangle| : \|x\|_{\mathcal{H}_1} = \|y\|_{\mathcal{H}_2} = 1\} = \|T^*\|.\end{aligned}$$

2. Sean $T, S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Se tiene que
$$\langle x, (T+S)^* y\rangle = \langle (T+S)x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle + \langle Sx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle + \langle x, S^* y\rangle = \langle x, (T^* + S^*)y\rangle.$$

3. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tenemos que
$$\langle x, (\alpha T)^* y\rangle = \langle \alpha Tx, y\rangle = \alpha\langle Tx, y\rangle = \alpha\langle x, T^* y\rangle = \langle x, \overline{\alpha} T^* y\rangle.$$

4. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Se verifica que
$$\langle y, T^{**} x\rangle = \langle T^* y, x\rangle = \overline{\langle x, T^* y\rangle} = \overline{\langle Tx, y\rangle} = \langle y, Tx\rangle.$$

5. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ y sea $D \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$. Se cumple que
$$\langle DTx, y\rangle = \langle Tx, D^* y\rangle = \langle x, T^* D^* y\rangle.$$

6. Sea $x_0 \in Ker\ T$, entonces para cualquier $y = T^* z \in (Im\ T^*)$ se verifica que
$$\langle y, x_0\rangle = \langle T^* z, x_0\rangle = \langle z, Tx_0\rangle = 0.$$
Luego, $Ker\ T \subset (Im\ T^*)^{\perp}$.
Así mismo, si $x \in \mathcal{H}_1$ es tal que $\langle x, T^* z\rangle = 0$ para todo $z \in \mathcal{H}_2$ esto implica que $\langle Tx, z\rangle = 0$ para todo $z \in \mathcal{H}_2$ y en consecuencia $Tx = 0$. Luego, $(Im\ T^*)^{\perp} \subset Ker\ T$.

7. Por la propiedad (6) anterior y la propiedad (4) deducimos que
$$Ker\ T^* = (Im\ T)^{\perp}.$$
Considerando también la continuidad del producto escalar (Proposición 1.1.4), obtenemos que
$$\overline{Im\ T} = (\overline{Im\ T})^{\perp\perp} = (Im\ T)^{\perp\perp} = (Ker\ T^*)^{\perp}.$$

□

Ejemplo 1.3.3.

1. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operador de rango finito de la forma $Tx = \sum_{j=1}^{n} k_j \langle x, u_j \rangle v_j$. Veamos cómo es T^*. Sea $y \in \mathcal{H}_2$ tenemos que
$$\langle Tx, y \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} k_j \langle x, u_j \rangle v_j, y \right\rangle = \langle x, \sum_{j=1}^{n} \overline{k_j} \langle y, v_j \rangle u_j \rangle.$$
Luego, $T^* y = \sum_{j=1}^{n} \overline{k_j} \langle y, v_j \rangle u_j$.

2. Sean $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ sistemas ortonormales en $\mathcal{H}_1$ y en $\mathcal{H}_2$ respectivamente y $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de escalares acotada. Tomamos el operador $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \langle x, u_n \rangle v_n$.
Lo primero que observamos es que es un operador lineal y continuo pues $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |k_n|^2 |\langle x, u_n \rangle|^2$ donde en la última igualdad hemos utilizado la ortogonalidad de $\{v_n\}$. Aplicando que la sucesión de escalares es acotada (digamos con cota M) y la *Desigualdad de Bessel* tenemos que $\|Tx\|^2 \leq M^2 \|x\|^2$.
Veamos el operador adjunto de T. Sea $T_N = \sum_{n=1}^{N} k_n \langle x, u_n \rangle v_n$ que es un operador del tipo estudiado en el punto anterior. Se tiene
$$\langle Tx, y \rangle = \lim_{N \to \infty} \langle T_N x, y \rangle = \lim_{N \to \infty} \langle x, T_N^* y \rangle = \left\langle x, \sum_{n=1}^{\infty} \overline{k_n} \langle y, v_n \rangle u_n \right\rangle.$$
Luego, $T^* y = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{k_n} \langle y, v_n \rangle u_n$.

3. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y $\{u_n\}$ una base ortonormal. Consideremos la matriz del operador respecto de dicha base $T = (t_{mn})_{m,n=1,2,\ldots}$, donde cada $t_{mn} = \langle Tu_n, u_m \rangle$. Entonces, para el operador adjunto se tiene
$$\langle T^* u_n, u_m \rangle = \overline{\langle u_n, T^* u_m \rangle} = \overline{\langle Tu_m, u_n \rangle} = \overline{t_{nm}}.$$
Es decir, la matriz de T^* es la matriz conjugada y transpuesta de T.

§ Operadores autoadjuntos

Definición 1.3.5. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ diremos que T es autoadjunto si $T = T^*$.

Observación 1.3.1. Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es un operador autoadjunto, entonces por el Lema 1.3.6/6 $(Ker\ T)^{\perp} = \overline{Im\ T}$. Resulta entonces $\mathcal{H} = Ker\ T \oplus \overline{Im\ T}$, descomposición del espacio que corresponde a la que podíamos hacer con las aplicaciones lineales en espacios de dimensión finita.

Ejemplo 1.3.4. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ el operador $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \langle x, u_n \rangle u_n$ que es un caso particular del Ejemplo 1.3.3/2. Veamos que, T es autoadjunto si y solo si $k_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Efectivamente, queremos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n \langle x, u_n \rangle u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{k_n} \langle x, u_n \rangle u_n$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. Al ser $\{u_n\}$ una base ortonormal, para cada $m \in \mathbb{N}$ podemos multiplicar ambos lados de la igualdad por u_m y resulta que $k_m \langle x, u_m \rangle = \overline{k_m} \langle x, u_m \rangle$. De nuevo por las propiedades de las bases ortonormales $\langle x, u_m \rangle = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$ si y solo si $x = 0$. Luego, la única forma de que se cumpla la igualdad es que $k_m = \overline{k_m}$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Se tiene la siguiente caracterización de los operadores autoadjuntos:

Teorema 1.3.7. Un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es autoadjunto si y solo si $\langle Tx, x \rangle$ es real para todo $x \in \mathcal{H}$.

Demostración. Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es un operador autoadjunto entonces verifica que

$$\overline{\langle Tx, x \rangle} = \langle x, Tx \rangle = \langle Tx, x \rangle$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. De donde se deduce que $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Recíprocamente, sean $x, y \in \mathcal{H}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Por hipótesis se cumple

$$\langle T(x + \lambda y), (x + \lambda y) \rangle = \overline{\langle T(x + \lambda y), x + \lambda y \rangle} = \langle (x + \lambda y), T(x + \lambda y) \rangle$$

de donde se deduce que $Im\ \lambda \langle Ty, x \rangle = Im\ \lambda \langle y, Tx \rangle$. Tomando $\lambda = 1$ y $\lambda = i$ obtenemos que $\langle Ty, x \rangle = \langle y, Tx \rangle$ y como $x, y \in \mathcal{H}$ son arbitrarios, T es autoadjunto. □

Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sabemos que $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y \rangle| : \|x\| = \|y\| = 1\}$. Esta expresión se puede simplificar si el operador es autoadjunto.

Teorema 1.3.8. Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es un operador autoadjunto, entonces

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : \|x\| = 1\}.$$

Demostración. Llamemos $\alpha = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : \|x\| = 1\}$.

Como $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y \rangle| : \|x\| = \|y\| = 1\}$ entonces, $\alpha \leq \|T\|$.

Vamos a probar la otra desigualdad. Para cada $x \in \mathcal{H}$ tal que $\|x\| = 1$ veremos que $\|Tx\| \leq \alpha$.

Tomemos así $x \in \mathcal{H}$ tal que $\|x\| = 1$. Si $Tx = 0$ entonces es claro, así que vamos a suponer que $Tx \neq 0$.

Definamos $u = ax + \frac{1}{a}Tx$ y $v = ax - \frac{1}{a}Tx$ con $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle Tu, u \rangle &= \langle aTx + \frac{1}{a}T^2x, ax + \frac{1}{a}Tx \rangle \\
&= a^2 \langle Tx, x \rangle + \frac{1}{a^2} \langle T^2x, Tx \rangle + \langle Tx, Tx \rangle + \langle T^2x, x \rangle \\
&= a^2 \langle Tx, x \rangle + \frac{1}{a^2} \langle T^2x, Tx \rangle + 2\langle Tx, Tx \rangle
\end{aligned}$$

donde en la última línea estamos aplicando que $\langle T^2x, x\rangle = \langle Tx, T^*x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle$ por ser T autoadjunto.

Análogamente, $\langle Tv, v\rangle = a^2\langle Tx, x\rangle + \frac{1}{a^2}\langle T^2x, Tx\rangle - 2\langle Tx, Tx\rangle$. Luego, $\|Tx\|^2 = \frac{1}{4}(\langle Tu, u\rangle - \langle Tv, v\rangle) \leq \alpha\frac{1}{4}(\|u\|^2 + \|v\|^2)$. Calculemos $\|u\|^2$ y $\|v\|^2$.

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= \langle u, u\rangle = \langle ax + \frac{1}{a}Tx, ax + \frac{1}{a}Tx\rangle \\ &= a^2\|x\|^2 + \frac{1}{a^2}\|Tx\|^2 + 2\langle x, Tx\rangle.\end{aligned}$$

De igual modo obtenemos que $\|v\|^2 = a^2\|x\|^2 + \frac{1}{a^2}\|Tx\|^2 - 2\langle x, Tx\rangle$.

Así, $\|Tx\|^2 \leq \alpha\frac{1}{4}(\|u\|^2 + \|v\|^2) \leq \alpha\frac{1}{2}(a^2\|x\|^2 + \frac{1}{a^2}\|Tx\|^2)$. Si tomamos $a^2 = \|Tx\|$ entonces deducimos que $\|Tx\| \leq \alpha$ como queríamos demostrar. □

§ Operadores compactos

Introducimos seguidamente un subconjunto de los operadores continuos que son los que llamaremos operadores compactos (también llamados completamente continuos en algunos libros como en [2] y [7]).

Definición 1.3.6. Un operador $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ es compacto si para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ acotada en $\mathcal{H}_1$, la sucesión $\{Kx_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente en $\mathcal{H}_2$.

Se cumplen las siguientes propiedades:

Teorema 1.3.9. Supongamos que T y R son operadores compactos en $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Entonces

1. $T + R$ es compacto.

2. Si $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_1)$ y $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$, entonces TP y QT son compactos.

Demostración. Sea $\{x_n\} \subset \mathcal{H}_1$ una sucesión acotada, entonces existe una subsucesión $\{x'_n\}$ tal que $\{Tx'_n\}$ converge, llamemos $y_1 = \text{lím}\, Tx'_n$. La subsucesión $\{x'_n\}$ sigue siendo acotada y por la compacidad de R existe una subsucesión $\{x''_n\}$ tal que $\{Rx''_n\}$ converge, llamemos $y_2 = \text{lím}\, Rx''_n$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}(T + R)x''_n = y_1 + y_2$$

de donde deducimos que $T + R$ es compacto.

Sea $\{z_n\} \subset \mathcal{H}_3$ una sucesión acotada. Como P es acotado, entonces $\{Pz_n\} \subset \mathcal{H}_1$ es una sucesión acotada en $\mathcal{H}_1$ y por la compacidad de T existe una subsucesión $\{z'_n\}$ tal que $\{TPz'_n\}$ es convergente. De donde deducimos que TP es compacto.

Análogamente, sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en $\mathcal{H}_1$, por la compacidad de T deducimos que existe x'_n una subsucesión tal que Tx'_n converge (llamemos $y_0 = \text{lím}\, Tx'_n$). Por la continuidad del operador Q tendríamos que

$$\lim_{n\to\infty} QTx'_n = Qy_0.$$

Luego, QT es compacto.

□

Teorema 1.3.10. Un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ es compacto si y solo si su operador adjunto $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ lo es.

Demostración. Supongamos que T es compacto, entonces por el teorema anterior TT^* es compacto. Sea $\{x_n\} \subset \mathcal{H}_1$ acotada, por la compacidad de TT^* existe una subsucesión $\{x'_n\}$ tal que $\{TT^*x'_n\}$ es convergente. Vamos a probar que $\{T^*x'_n\}$ también converge (para ello veremos que es de Cauchy).

$$\begin{aligned} \|T^*x'_n - T^*x'_m\|^2 &= \langle TT^*(x'_n - x'_m), x'_n - x'_m\rangle \\ &\leq \|TT^*(x'_n - x'_m)\|\|x'_n - x'_m\| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Luego, T^* es compacto y como $T^{**} = T$, si T^* es compacto entonces T también lo es. □

Teorema 1.3.11. Sea $\{K_n\}$ una sucesión de operadores compactos en $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ y $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tal que $\|K_n - K\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Entonces K es un operador compacto.

Demostración. En esta demostración vamos a emplear un método diagonal.

Sea $\{x_n\} \subset \mathcal{H}_1$ una sucesión acotada (supongamos que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.) Como el operador K_1 es compacto, existe una subsucesión $\{x_{1n}\}$ tal que $\{K_1x_{1n}\}$ es convergente. Como K_2 es compacto existe una subsucesión $\{x_{2n}\}$ de $\{x_{1n}\}$ tal que $\{K_2x_{2n}\}$ es convergente. Continuamos con este procedimiento, en el paso j-ésimo existirá $\{x_{jn}\}$ una subsucesión de $\{x_{(j-1)n}\}$ tal que $\{K_jx_{jn}\}$ converge.

Tomemos $\{y_n\} = \{x_{nn}\}$, la sucesión de los elementos de la diagonal de las subsucesiones anteriores. Veamos que Ky_n converge (bastará con ver que es de Cauchy).

Dado $\varepsilon > 0$, como $K_n \to K$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\|K - K_p\| \leq \frac{\varepsilon}{3M}$. Entonces $\{y_k\}$ es una subsucesión de $\{x_{pn}\}$ para $k \geq p$. Como $\{K_py_n\}$ converge para $n \geq p$ entonces es de Cauchy y así existe $N > p$ tal que si $n, m \geq N$ entonces $\|K_py_m - K_py_n\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. De todo esto deducimos que

$$\begin{aligned} \|Ky_n - Ky_m\| &\leq \|Ky_n - K_py_n\| + \|K_py_n - K_py_m\| + \|K_py_m - Ky_m\| \\ &\leq 2\|K - K_p\|M + \|K_py_m - K_py_n\| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Y así, $\{Ky_n\}$ es de Cauchy y en consecuencia K es compacto. □

Teorema 1.3.12. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operador de rango finito, entonces T es compacto.

Demostración. Si T es un operador de rango finito, por el Teorema 1.3.5 podemos escribirlo como

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j\rangle \varphi_j.$$

Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en $\mathcal{H}$ y sea $j \in \{1, ..., n\}$, entonces $\{\langle x_n, v_j\rangle\}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{C}$ y por el *Teorema de Bolzano-Weierstrass* existirá una subsucesión $\{x'_n\}$ tal que $\langle x'_n, v_j\rangle$ es convergente en $\mathbb{C}$ y así $\{\langle x'_n, v_j\rangle\varphi_j\}$ también será convergente. De aquí deducimos que el operador $T_jx = \langle x, v_j\rangle\varphi_j$ es compacto y en consecuencia T también por ser una suma finita de operadores compactos.

□

Ejemplo 1.3.5. Veamos un ejemplo de operador compacto:

$$\begin{array}{rcl} T_K : L_2([0,1]) & \longrightarrow & L_2([0,1]) \\ f & \longmapsto & T_K(f)(\cdot) = \displaystyle\int_0^1 K(\cdot, s) f(s) ds \end{array}$$

siendo $K \in L_2([0,1] \times [0,1])$.

Primeramente veamos que T_K es un operador acotado:

$$\begin{array}{rcl} \|T_K f\|^2 & = & \displaystyle\int_0^1 |(T_K f)(t)|^2 dt = \int_0^1 \left| \int_0^1 (K(t,s) f(s)) ds \right|^2 dt \leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(t,s) f(s)| ds \right)^2 dt \\ & \leq & \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 |K(t,s)|^2 ds \int_0^1 |f(s)|^2 ds \right) dt \leq \|f\|^2 \int_0^1 \int_0^1 |K(t,s)| dt ds = \|f\|^2 \|K\|^2 \end{array}$$

donde hemos utilizado la *Desigualdad de Cauchy-Schwarz* y el *Teorema de Fubini*. De aquí, deducimos que $\|T_K\| \leq \|K\|$.

Para probar que el operador T_K es compacto vamos a ponerlo como límite de una sucesión de operadores de rango finito.

Sea $\{\varphi_n(t)\}$ una base ortonormal de $L_2([0,1])$. Entonces, $\Phi_{i,j}(t,s) = \varphi_i(t)\overline{\varphi_j(s)}$ es una base ortonormal de $L_2([0,1] \times [0,1])$ (ver Teorema I.14.1 de [1]). Luego, por el *Teorema de Parseval* se tiene que:

$$K(t,s) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle K, \Phi_{i,j} \rangle \Phi_{i,j}(t,s)$$

Definimos $K_n(t,s) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle K, \Phi_{i,j} \rangle \Phi_{i,j}(t,s)$. Entonces, $\|K - K_n\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ consideramos:

$$\begin{array}{rcl} T_{K_n} : L_2([0,1]) & \longrightarrow & L_2([0,1]) \\ f & \longmapsto & T_{K_n}(f)(\cdot) = \displaystyle\int_0^1 K_n(\cdot, s) f(s) ds \end{array}$$

Veamos que T_{K_n} tiene rango finito:

$$\begin{array}{rcl} (T_{K_n} f)(t) & = & \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{i,j=1}^{n} \langle K, \Phi_{i,j} \rangle \Phi_{i,j}(t,s) \right) f(s) ds \\ & = & \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \langle K, \Phi_{i,j} \rangle \int_0^1 \varphi_i(t) \overline{\varphi_j(s)} f(s) ds \\ & = & \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \langle K, \Phi_{i,j} \rangle \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_i(t) \subseteq span\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}. \end{array}$$

Luego, T_{K_n} tiene rango finito y como $\|T_K - T_{K_n}\| \leq \|K - K_n\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$, T_K es compacto.

CAPÍTULO 2.

Teoría espectral de operadores compactos en espacios de Hilbert

Se vio en Álgebra Lineal que si $\mathcal{H}$ es de dimensión finita, entonces todo endomorfismo simétrico es diagonalizable, es decir, tiene una base de autovectores. El objetivo de este capítulo es generalizar este resultado al caso de un operador autoadjunto sobre un espacio de Hilbert que puede ser infinito dimensional.

2.1. Teoría espectral

§ Autovalores y autovectores

Definición 2.1.1. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Decimos que un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ es un autovalor si existe $x \neq 0$ en $\mathcal{H}$ tal que $Tx = \lambda x$. Al vector x se le llama autovector asociado al autovalor λ.

Es claro que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un autovalor de T si y solo si $Ker\ (T - \lambda Id) \neq \{0\}$ es decir, si y solo si $T - \lambda Id$ no es inyectivo.

Los autovalores de un operador autoadjunto cumplen las siguientes propiedades:

Proposición 2.1.1. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operador autoadjunto, entonces sus autovalores (en el caso de tenerlos) son reales.

Demostración. Sea λ un autovalor de T. Entonces, existe $y \neq 0$ tal que $Ty = \lambda y$. Por ser T autoadjunto y autovector se tiene que:

$$\lambda \|y\|^2 = \langle Ty, y\rangle = \langle y, Ty\rangle = \langle y, \lambda y\rangle = \bar{\lambda}\|y\|^2.$$

Como $y \neq 0$ entonces, $\lambda = \bar{\lambda}$. □

Proposición 2.1.2. Los autovectores asociados a distintos autovalores de un operador autoadjunto son ortogonales.

Demostración. Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ autovalores distintos de T y sean $x, y \neq 0$ autovectores tal que $Tx = \lambda x$ y $Ty = \mu y$. Entonces:

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \mu\langle x, y\rangle.$$

Como $\lambda \neq \mu$ tenemos que $\langle x, y\rangle = 0$. □

La proposición que sigue se cumple para todo operador de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Proposición 2.1.3. Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y λ es un autovalor de T, entonces $|\lambda| \leq \|T\|$

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalor de T. Entonces, existe $x \neq 0$ tal que $Tx = \lambda x$. Luego,

$$\|T\|\|x\| \geq \|Tx\| = |\lambda|\|x\|.$$

Es decir, $\|T\| \geq |\lambda|$. □

Sabemos que todo operador lineal en un espacio de Hilbert de dimensión finita tiene al menos un autovalor en $\mathbb{C}$ (pues el polinomio característico siempre tiene raíces en un cuerpo completo).

Veamos que en dimensión infinita tenemos un cambio significativo. Un operador sobre un espacio de Hilbert infinitodimensional no tiene por qué tener ningún autovalor ni siquiera los operadores autoadjuntos, que son aquellos que generalizan a las matrices simétricas. Muestra de ello es el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.1.1. Consideramos $T : L^2[a, b] \to L^2[a, b]$ dado por $(Tf)(t) = tf(t)$. Se tienen las siguientes propiedades:

1. Para todo $f \in L^2[a, b]$, $Tf \in L^2[a, b]$ por ser producto de dos funciones de cuadrado integrable.

2. T es lineal: $T(\alpha f + \beta g)(t) = t(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha Tf(t) + \beta Tg(t)$.

3. T es continua: $\|Tf\| = \left(\int_a^b |t|^2|f(t)|^2dt\right)^{1/2} \leq máx\{a^2, b^2\}\|f\|$.

4. T es autoadjunto: Vamos a utilizar la caracterización del Teorema 1.3.7.

$$\langle Tf, f\rangle = \int_a^b tf(t)\overline{f(t)}dt = \int_a^b t|f(t)|^2dt \in \mathbb{R}$$

5. Pero T no tiene autovalores: $Tf = \lambda f$ si y solo si $tf(t) = \lambda f(t)$ a.e. Para que esto ocurriese tendríamos que $(t - \lambda)f(t) = 0$ a. e. Por tanto, la única opción es $f(t) = 0$ a.e.

Veamos ahora que la condición de ser compacto tampoco garantiza la existencia de autovalores:

Ejemplo 2.1.2. *Consideremos el operador de Volterra.*

$$\begin{aligned} T_K : L_2([0, 1]) &\longrightarrow L_2([0, 1]) \\ f &\longmapsto (T_Kf)(t) = \int_0^t f(s)ds \end{aligned}$$

Observamos que $(T_Kf)(t) = \int_0^1 K(t, s)f(s)ds$ donde $K(t, s) = \begin{cases} 1 \quad si \quad 0 \leq s \leq t \\ \\ 0 \quad \text{en otro caso} \end{cases}$

Por el Ejemplo 1.3.5 sabemos que T_K es un operador compacto. Veamos que T_K no tiene autovalores.

Supongamos que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ y $f \in L_2([0, 1])$ tal que $T_Kf = \lambda f$. Esto implica que:

$$\int_0^t f(s)ds = \lambda f(t)$$

en casi todo punto (podemos modificar la función f para que la igualdad se de en todo punto).

La función, $F(t) = \int_0^t f(s)ds$ es continua y $\lambda f = F$ de donde deducimos que $f(t)$ es continua. Entonces, por el *Teorema fundamental del cálculo* tenemos que $f'(t) = \lambda f(t)$ para todo $t \in [0,1]$ y además se cumple que $f(0) = 0$. Así, nos queda la ecuación diferencial:

$$f'(t) = \lambda f(t), f(0) = 0$$

Al resolverla obtenemos que $f(t) = Ce^{t/\lambda}$ y con la condición inicial llegamos a que $f = 0$.

§ Existencia de autovalores

Ya vimos en los Ejemplos 2.1.1 y 2.1.2 que en general dado un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ no podemos asegurar la existencia de autovalores, aun sabiendo que sea autoadjunto o compacto. Lo que vamos a probar ahora es que en el caso de que se den ambas condiciones, es decir, que T sea un operador compacto y autoadjunto entonces sí que existe al menos un autovalor que será $\|T\|$ o $-\|T\|$.

Teorema 2.1.4. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operador compacto y autoadjunto, entonces al menos uno de los escalares $\|T\|$ o $-\|T\|$ es un autovalor para el operador T.

Demostración. Si $T = 0$ el resultado es claro. Supongamos ahora que $T \neq 0$. Por el Teorema 1.3.8 sabemos que $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : \|x\| = 1\}$. Por tanto, existe una sucesión $\{x_n\}$ en $\mathcal{H}$ con $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} |\langle Tx_n, x_n\rangle| = \|T\|.$$

Como T es autoadjunto, $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathcal{H}$, luego existe $\alpha \in \mathbb{R}$ con $|\alpha| = \|T\|$ y una subsucesión de la anterior que llamaremos también $\{x_n\}$ tal que $\lim_{n\to\infty}\langle Tx_n, x_n\rangle = \alpha$.

Vamos a probar que α es un autovalor de T. Primero veamos que $Tx_n - \alpha x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

$$\begin{aligned}
\|Tx_n - \alpha x_n\|^2 &= \|Tx_n\|^2 + \alpha^2\|x_n\|^2 - \alpha\langle Tx_n, x_n\rangle - \alpha\langle x_n, Tx_n\rangle = \\
&= \|Tx_n\|^2 + \alpha^2 - 2\alpha\langle Tx_n, x_n\rangle \\
&\leq 2\alpha^2 - 2\alpha\langle Tx_n, x_n\rangle \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Usando ahora la compacidad del operador, como $\{x_n\}$ es una sucesión de vectores de norma 1, existe una subsucesión de $\{Tx_n\}$, vamos a denotarla por $\{Tx_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{m\to\infty} Tx_{n_m} = y \in \mathcal{H}$. Veamos que $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ converge a $\frac{1}{\alpha}y$. Tenemos que

$$\|\alpha x_{n_m} - y\| \leq \|\alpha x_{n_m} - Tx_{n_m}\| + \|Tx_{n_m} - y\| \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Así, $x_{n_m} \xrightarrow{m\to\infty} \frac{y}{\alpha}$. Y por la continuidad de T se tiene que:

$$y = \lim_{m\to\infty} Tx_{m_n} = \frac{1}{\alpha}Ty.$$

Luego, $Ty = \alpha y$. Además $y \neq 0$, pues $\|y\| = \lim_{m\to\infty} \|\alpha x_{n_m}\| = \|T\| \neq 0$. Por lo tanto, α es un autovalor de T.

□

§ El teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos

El teorema espectral es la pieza clave para la teoría que estamos desarrollando. Este teorema es el que nos dice que todo operador compacto y autoadjunto es diagonalizable. La demostración de este teorema se basa en la aplicación sucesiva del Teorema 2.1.4 y una proposición previa que se demuestra a continuación.

Proposición 2.1.5. Si un subespacio M es T-invariante, entonces $M^\perp$ es T^*-invariante. En consecuencia, si T es autoadjunto entonces $M^\perp$ es T-invariante.

Demostración. Sea $v \in M^\perp$. Para todo $u \in M$ se tiene que $Tu \in M$. Así $\langle Tu, v\rangle = 0 = \langle u, T^*v\rangle$ para todo $u \in M$. Luego, $T^*v \in M^\perp$. □

Teorema 2.1.6. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operador compacto y autoadjunto. Entonces, existe un sistema ortonormal $\{x_n\}$ de autovectores de T y su correspondiente sucesión de autovalores $\{\lambda_n\}$ tal que para cada $x \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, x_n\rangle x_n.$$

La sucesión $\{\lambda_n\}$ es decreciente y si es infinita converge a 0.

Demostración. Sea $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$ y $T_1 = T$. Entonces, aplicando el Teorema 2.1.4 al operador T_1, existe un autovalor λ_1 y un autovector x_1 asociado a él tales que $\|x_1\| = 1$ y $|\lambda_1| = \|T_1\|$.

Vamos a buscar el siguiente autovector en $\{x_1\}^\perp$ ya que sabemos por la Proposición 2.1.2 que los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales.

Definimos $\mathcal{H}_2 = \{x_1\}^\perp$ y $T_2 = T|_{\mathcal{H}_2}$. $\mathcal{H}_2$ es un subespacio cerrado por ser el ortogonal de un conjunto y por la Proposición 2.1.5, $T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$. Como T_1 es compacto, es claro que T_2 es compacto. Además T_2 es autoadjunto pues $\langle T_2 x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathcal{H}_2$. Si $T_2 \neq 0$ volvemos a aplicar el Teorema 2.1.4 y obtenemos que existe $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $x_2 \in \mathcal{H}_2$ con $\|x_2\| = 1$ tal que $T_2 x_2 = \lambda_2 x_2$ y $|\lambda_2| = \|T_2\|$ y así, $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$.

Tomamos $\mathcal{H}_3 = \{x_1, x_2\}^\perp$ y $T_3 = T|_{\mathcal{H}_3}$ y reiteramos el proceso bien hasta llegar a $T_n = 0$ o bien una cantidad infinito numerable de veces. Así tendremos una sucesión finita o numerable $\{\lambda_n\}$ de autovalores, tal que $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y un conjunto $\{x_n\}$ de autovectores ortogonales asociados a los λ_n. Veamos que en el caso de ser una sucesión infinita entonces $\{\lambda_n\} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Procedemos por reducción al absurdo, supongamos que no converge a 0, entonces como $\{|\lambda_n|\}$ es una sucesión decreciente de números reales positivos, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $|\lambda_n| > \varepsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $n \neq m$ se tiene que

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_m x_m\| = \sqrt{\lambda_n^2 + \lambda_m^2} > |\lambda_n| > \varepsilon_0.$$

Como T es un operador compacto la sucesión $\{Tx_n\}$ debería tener una subsucesión convergente y por tanto de Cauchy, cosa que es imposible a la vista de la estimación anterior.

Por último, vamos a probar la representación del operador. Tomemos $x \in \mathcal{H}$. Definimos $y_n = x - \sum_{k=1}^n \langle x, x_k\rangle x_k$. Vamos a distinguir dos casos:

- Caso 1: Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T_n = 0$, entonces $T_n y_n = 0 = Tx - \sum_{k=1}^n \langle x, x_k\rangle Tx_k$ y en consecuencia, aplicando que los $\{x_k\}$ son autovectores tenemos que $Tx = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, x_k\rangle x_k$.

- Caso 2: Supongamos que $T_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\|Tx - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, x_k\rangle x_k\| &= \|T_n y_n\| \leq \|T_n\|\|y_n\| = |\lambda_n|\|y_n\| \\ &= |\lambda_n|(\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k\rangle|^2)^{1/2} \leq |\lambda_n|\|x\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Luego, $Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, x_k\rangle x_k$.

□

Definición 2.1.2. Un sistema ortonormal $\{x_n\}$ de autovectores de $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ con sus correspondientes autovalores no nulos $\{\lambda_n\}$ se llama sistema básico de autovectores y autovalores si para cada $x \in \mathcal{H}$ se tiene que $Tx = \sum_k \lambda_k \langle x, x_k\rangle x_k$.

El *Teorema espectral* nos garantiza la existencia de un sistema básico de autovectores para un operador compacto y autoadjunto.

Seguidamente describimos algunas de las propiedades de los sistemas básicos de autovectores y autovalores.

Teorema 2.1.7. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operador compacto y autoadjunto y sean $\{x_n\}$ y $\{\lambda_n\}$ un sistema básico de autovectores y autovalores. Se tiene:

a) El sistema ortonormal $\{x_n\}$ es base de $\overline{Im\ T} = (Ker\ T)^{\perp}$ y para cada $x \in \mathcal{H}$ se cumple que
$$x = P_0 x + \sum_n \langle x, x_n\rangle x_n,$$
donde P_0 es la proyección ortogonal sobre $Ker\ T$.

b) $\mathcal{H}$ tiene una base ortonormal que consiste en un sistema básico de autovectores de T si y solo si $Ker\ T = \{0\}$.

c) Si $\lambda \neq 0$ es un autovalor de T entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda = \lambda_k$.

Demostración. a) Por la definición de sistema básico de autovectores sabemos que dado $x \in \mathcal{H}$
$$Tx = \sum_k \lambda_k \langle x, x_k\rangle x_k.$$
Por lo tanto, como $x_k = \frac{1}{\lambda_k} T x_k$, $span\{x_k\} \subseteq Im\ T$ y además por la representación anterior de T, $Im\ T \subset \overline{span\{x_k\}}$. Así, $\overline{span\{x_k\}} = \overline{ImT}$.

Luego, por la Observación 1.3.6 se tiene que $\overline{span\{x_k\}} = \overline{Im\ T} = (Ker\ T)^{\perp}$. Entonces, dado $x \in \mathcal{H}$ podemos escribirlo como $x = P_0 x + v$ con $v \in (Ker\ T)^{\perp}$, $v = \sum_k \langle v, x_k\rangle x_k$ pero como $\langle v, x_k\rangle = \langle x, x_k\rangle$ para todo k entonces tenemos que
$$x = P_0 x + \sum_k \langle x, x_k\rangle x_k.$$

b) Se sigue directamente del hecho de que $x = P_0 x + \sum_k \langle x, x_k\rangle x_k$.

c) Si λ es autovalor de T, entonces existe $v \in \mathcal{H}$, $v \neq 0$, tal que $Tv = \lambda v$. Por la Proposición 2.1.2 si $\lambda \neq \lambda_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tendríamos que $\langle v, x_k \rangle = 0$ para todo k. Y por lo tanto, $\lambda v = Tv = \sum_k \lambda_k \langle v, x_k \rangle x_k = 0$, pero esto es imposible porque $v \neq 0$, $\lambda \neq 0$.

□

Para acabar esta sección vamos a probar el recíproco del *Teorema espectral*, es decir, que si tenemos un operador "diagonal", entonces es compacto y autoadjunto.

Teorema 2.1.8. Sea $\{x_k\}$ un sistema ortonormal en $\mathcal{H}$ y $\{\lambda_k\}$ una sucesión de números reales decreciente que o bien es finita o bien converge a 0. Entonces, el operador lineal

$$Tx = \sum_k \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k$$

es compacto y autoadjunto.

Demostración. Veamos primero que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Claramente T es lineal. Veamos que es acotado:

$$\|Tx\|^2 = \sum_k \lambda_k^2 |\langle x, x_k \rangle|^2 \leq \lambda_1^2 \sum_k |\langle x, x_k \rangle|^2 \leq \lambda_1^2 \|x\|^2$$

donde en el último paso utilizamos la *Desigualdad de Bessel.* Luego, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Veamos ahora que T es compacto. Si la sucesión $\{\lambda_k\}$ es finita, entonces T es un operador de rango finito y por el Teorema 1.3.12 tenemos que T es compacto. Supongamos ahora que la sucesión es infinita, entonces sabemos que converge a 0. Construimos ahora la sucesión de operadores $T_n x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k$, que son compactos por ser de rango finito, y veamos que converge a T. Se tiene

$$\|(T - T_n)x\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} {\lambda_k}^2 |\langle x, x_k \rangle|^2 \leq {\lambda_{n+1}}^2 \|x\|^2.$$

Luego, $\|T - T_n\| \leq |\lambda_{n+1}|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Y así, $\|T - T_n\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

Por el Teorema 1.3.11 se tiene que T es compacto por ser límite de operadores de rango finito.

Vamos a probar por último que es autoadjunto. Sean $x, y \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} \langle Tx, y \rangle &= \sum_k \lambda_k \langle x, x_k \rangle \langle x_k, y \rangle = \overline{\sum_k \lambda_k \langle y, x_k \rangle \langle x_k, x \rangle} = \\ &= \overline{\langle Ty, x \rangle} = \langle x, Ty \rangle. \end{aligned}$$

□

2.2. Los números singulares. El teorema espectral para operadores compactos

Como vimos en las secciones anteriores si un operador entre espacios de Hilbert no es compacto y autoadjunto no podemos asegurar que tenga autovalores. Por este motivo, cuando trabajemos con operadores que únicamente son compactos vamos a considerar los números singulares, es decir, los autovalores de un operador compacto y autoadjunto que asociaremos al operador original.

Definición 2.2.1. Un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ se dice que es positivo si $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Observación 2.2.1. Un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ positivo siempre es autoadjunto, pues de la definición de positivo se deduce que $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Proposición 2.2.1. Un operador T compacto y autoadjunto es positivo si y solo si sus autovalores son positivos

Demostración. Supongamos que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es un operador compacto, autoadjunto y positivo. Veamos que sus autovalores son positivos. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que existe $x \neq 0$ verificando $Tx = \lambda x$. Entonces, por ser T positivo se tiene que

$$0 \leq \langle Tx, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle = \lambda\|x\|^2.$$

Luego, $\lambda \geq 0$.

Recíprocamente, supongamos que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es un operador compacto y autoadjunto con los autovalores positivos. Entonces, por el Teorema espectral 2.1.6 tenemos que existe un sistema ortonormal de autovectores $\{x_k\}$ y una sucesión de autovalores $\{\lambda_k\}$ tal que $Tx = \sum_k \lambda_k\langle x, x_k\rangle x_k$. Entonces para todo $x \in \mathcal{H}$ tenemos que

$$\langle Tx, x\rangle = \sum_k \lambda_k\langle x, x_k\rangle\langle x_k, x\rangle = \sum_k \lambda_k|\langle x, x_k\rangle|^2 \geq 0.$$

Por lo tanto, T es un operador positivo. □

Proposición 2.2.2. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operador compacto y positivo. Entonces, existe otro operador compacto y positivo que denotaremos por $T^{1/2}$ tal que $T^{1/2}T^{1/2} = T$.

Demostración. Por el Teorema espectral 2.1.6 tenemos que existe un sistema ortonormal de autovectores $\{x_k\}$ y autovalores $\{\lambda_k\}$ tal que $Tx = \sum_k \lambda_k\langle x, x_k\rangle x_k$, con $\lambda_k \geq 0$. Veamos que el operador que estamos buscando es

$$T^{1/2}x = \sum_k \sqrt{\lambda_k}\langle x, x_k\rangle x_k.$$

Se tiene

$$T^{1/2}T^{1/2}x = \sum_n \sqrt{\lambda_n}\Big\langle\Big(\sum_k \sqrt{\lambda_k}\langle x, x_k\rangle x_k\Big), x_n\Big\rangle x_n = \sum_n \lambda_n\langle x, x_n\rangle x_n$$

utilizando la ortogonalidad y que λ_n es positivo para todo $n \in \mathbb{N}$.

Además, $T^{1/2}$ es autoadjunto y compacto por el Teorema 2.1.8 y positivo pues por el Teorema 2.1.7.c), tenemos que todos los autovalores de $T^{1/2}$ o son el 0 o son uno de los $\sqrt{\lambda_k}$ que son positivos. □

Veamos el teorema espectral para operadores compactos, que nos permitirá escribir un operador compacto de forma similar a la que podíamos hacerlo cuando además era autoadjunto. Para ello necesitaremos todas las propiedades de los operadores positivos vistas antes.

Teorema 2.2.3. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un operador compacto. Entonces existe una sucesión $\{\lambda_n\}$ decreciente de números reales positivos y dos sistemas ortonormales $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ en $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ respectivamente, tales que podemos escribir el operador T como:

$$Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, x_n \rangle y_n.$$

Además, la sucesión $\{\lambda_n\}$ es decreciente y si es infinita converge a 0.

Demostración. Si $T = 0$ el resultado es obvio. Supongamos entonces que $T \neq 0$. Entonces, consideramos $T^*T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$, es autoadjunto (pues $(T^*T)^* = T^*T$) y compacto por ser composición de operadores compactos. Además, veamos que T^*T es positivo, pues para cada $x \in \mathcal{H}_1$:

$$\langle T^*Tx, x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = \|Tx\|^2 \geq 0.$$

Como T^*T es un operador compacto y positivo, por el *Teorema espectral* existe un sistema ortonormal $\{x_n\}$ y una sucesión $\{\mu_n\}$ decreciente y positiva de autovalores, tal que para cada $x \in \mathcal{H}_1$:

$$T^*Tx = \sum_k \mu_k \langle x, x_k \rangle x_k.$$

Además, μ_n converge a 0 si es infinita.

Definimos ahora $y_n = \frac{1}{\sqrt{\mu_n}} Tx_n$ veamos que es un sistema ortonormal en $\mathcal{H}_2$:

$$\langle y_n, y_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu_n}} \frac{1}{\sqrt{\mu_m}} \langle Tx_n, Tx_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu_n}} \frac{1}{\sqrt{\mu_m}} \langle T^*Tx_n, x_m \rangle = \mu_n \frac{1}{\sqrt{\mu_n}} \frac{1}{\sqrt{\mu_m}} \langle x_n, x_m \rangle = \delta_{nm}.$$

Por el Teorema 2.1.7.a), cada $x \in \mathcal{H}_1$ podemos escribirlo como: $x = P_0 x + \sum_k \langle x, x_k \rangle x_k$, donde P_0 es la proyección sobre $Ker\ T^*T$.

Vamos a probar ahora que $Ker\ T = Ker\ T^*T$. Claramente, $Ker\ T \subset Ker\ T^*T$. Por otro lado, sea $x \in Ker\ T^*T$ entonces

$$0 = \langle T^*T, x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = \|Tx\|^2.$$

Luego, $Tx = 0$. Así, P_0 es la proyección sobre $Ker\ T$, y

$$Tx = T(P_0 x) + \sum_k \langle x, x_k \rangle Tx_k = \sum_k \sqrt{\mu_k} \langle x, x_k \rangle y_k.$$

□

Observación 2.2.2. La sucesión $\{\lambda_n\} = \{\sqrt{\mu_n}\}$ dada en el teorema anterior es la sucesón de autovalores de $(T^*T)^{1/2}$. A este operador lo denotaremos por $|T|$.

Corolario 2.2.4. Todo operador compacto de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ es el límite en norma de una sucesión de operadores de rango finito.

Definición 2.2.2. Sea $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ llamamos números singulares $(s_n(T))$ de T a los autovalores de $|T|$, es decir, $s_n(T) = \lambda_n(|T|)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observación 2.2.3. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operador tal que $Tx = \sum_n \delta_n \langle x, x_n \rangle y_n$ para todo $x \in \mathcal{H}$, siendo $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sistemas ortonormales y δ_n una sucesión decreciente a cero de números positivos, entonces $s_n(T) = \delta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Efectivamente, primero observamos que T es un operador compacto por ser el límite de una sucesión de operadores de rango finito. Por el Ejemplo 1.3.3, sabemos que su operador adjunto es:

$$T^*x = \sum_n \delta_n \langle x, y_n \rangle x_n.$$

Así, $T^*Tx = \sum_n \delta_n^2 \langle x, x_n \rangle x_n$ y $(T^*T)^{1/2}x = \sum_n \delta_n \langle x, x_n \rangle x_n$. Entonces, por las propiedades de los operadores compactos y autoadjuntos estudiadas en el Teorema 2.1.7 tenemos que al ser $\{\delta_n\}$ y $\{x_n\}$ un sistema básico de autovalores y autovectores y al estar ordenados los escalares de forma decreciente, $s_n(T) = \delta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.3. El teorema de descomposición polar

Definición 2.3.1. Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert. Sean $M \subset \mathcal{H}_1$ un subespacio cerrado, $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ y $N = U(M)$. Decimos que U es una isometría parcial de M sobre N si $\|Ux\| = \|x\|$ para todo $x \in M$ y $Ux = 0$ si $x \in M^\perp$.

Proposición 2.3.1. Sea $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. U es una isometría sobre $\mathcal{H}_2$ sobreyectiva.
2. U es sobreyectiva y $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{H}_1$.
3. U es invertible y $U^{-1} = U^*$.

Demostración. Veamos que (1) $\Rightarrow$ (2). Para ello vamos a utilizar la *Identidad de polarización*, pues nos describe el producto escalar en función de la norma y utilizando la linealidad de U tenemos que:

$$\begin{aligned}
\langle Ux, Uy \rangle &= \frac{1}{4}(\|Ux + Uy\|^2 - \|Ux - Uy\|^2 + i\|Ux + iUy\|^2 - i\|Ux - iUy\|^2) \\
&= \frac{1}{4}(\|U(x + y)\|^2 - \|U(x - y)\|^2 + i\|U(x + iy)\|^2 - i\|U(x - iy)\|^2) \\
&= \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2) \\
&= \langle x, y \rangle.
\end{aligned}$$

Probemos (2) $\Rightarrow$ (3). Basta ver que $U^*U = id_{\mathcal{H}_1}$ y $UU^* = id_{\mathcal{H}_2}$. Se tiene

$$\langle U^*Ux - x, x \rangle = \langle U^*Ux, x \rangle - \langle x, x \rangle = \langle Ux, Ux \rangle - \langle x, x \rangle = \|Ux\|^2 - \|x\|^2 = 0.$$

De aquí deducimos por el Teorema 1.3.7 que el operador $T = U^*U - id_{\mathcal{H}_1}$ es autoadjunto y entonces por el Teorema 1.3.8 tenemos que $\|T\| = \sup\{\langle Tx, x \rangle : \|x\| = 1\} = 0$. Luego, $U^*U = id_{\mathcal{H}_1}$.

Sea $w \in \mathcal{H}_2$ como por hipótesis U es sobreyectiva, entonces, existe $v \in \mathcal{H}_1$ tal que $Uv = w$. Por lo tanto,

$$\langle UU^*w, w\rangle = \langle UU^*w, Uv\rangle = \langle U^*w, U^*Uv\rangle = \langle U^*w, v\rangle = \langle w, Uv\rangle = \langle w, w\rangle$$

donde hemos utilizado que $U^*U = id_{H_1}$. Siguiendo el mismo razonamiento que antes llegamos a que $UU^* = id_{\mathcal{H}_2}$.

Por último vamos a probar (3) $\Rightarrow$ (1) : Como U tiene inverso es sobreyectivo. Además

$$\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux\rangle = \langle x, U^*Ux\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2.$$

$\square$

Finalmente, veamos el teorema de descomposición polar que nos dice que todo operador compacto se puede escribir como composición de una isometría parcial y un operador positivo.

Hagamos una observación previa.

Observación 2.3.1. Sea $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Recordemos que como vimos en la demostración del Teorema 2.2.3, $Ker\ T = Ker\ T^*T$. Veamos ahora que $Ker\ T^*T = Ker\ |T|$.

Claramente, $Ker\ |T| \subset Ker\ T^*T$. Veamos el otro contenido. Sea $x \in \mathcal{H}_1$ tal que $T^*Tx = 0$. Entonces:

$$\||T|x\|^2 = \langle |T|x, |T|x\rangle = \langle x, |T|^*|T|x\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle = 0$$

de donde, $|T|x = 0$. Así, $(Ker\ T)^\perp = (Ker\ |T|)^\perp = \overline{Im\ |T|}$.

Teorema 2.3.2. Sea $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Existe una isometría parcial $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ de $(Ker\ T)^\perp$ en $\overline{Im\ T}$ tal que $T = U|T|$ y $|T| = U^*T$.

Demostración. Definimos:

$$\begin{array}{rcl} V : Im\ |T| & \longrightarrow & Im\ T \\ |T|x & \longmapsto & V(|T|x) = Tx. \end{array}$$

Esta aplicación está bien definida, pues si $x_1, x_2 \in \mathcal{H}_1$ son tales que $|T|x_1 = |T|x_2$, entonces $x_1 - x_2 \in Ker\ |T| = Ker\ T$. Luego, $Tx_1 = Tx_2$.

Claramente la aplicación es lineal y además es una isometría. Efectivamente, si $y \in Im\ |T|$ y $x \in \mathcal{H}_1$ tal que $|T|x = y$, entonces:

$$\begin{array}{rcl} \|Vy\|^2 & = & \|V(|T|x)\|^2 = \|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle \\ & = & \langle T^*Tx, x\rangle = \langle |T|^2x, x\rangle = \langle |T|x, |T|x\rangle \\ & = & \||T|x\|^2 = \|y\|^2. \end{array}$$

Por continuidad vamos a extender V a $\overline{Im\ |T|}$ de la siguiente forma:

Sea $y \in \overline{Im\ |T|}$ entonces existe una sucesión $\{y_n\}$ en $Im\ |T|$ tal que $y_n \xrightarrow{n\to\infty} y$. Definimos

$$Vy = \lim_{n\to\infty} Vy_n \in \overline{Im\ T}.$$

Este límite existe, pues como $\{y_n\}$ es convergente, es de Cauchy y así $\{Vy_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\overline{Im\ T}$ y al ser un subespacio cerrado es completo y por lo tanto se tiene que la sucesión es convergente.

Además la definición es independiente de la sucesión elegida. Si $\{y'_n\}$ es otra sucesión en $Im\ |T|$ también convergente a y, entonces

$$\| \lim_{n\to\infty} Vy_n - \lim_{n\to\infty} Vy'_n\| = \| \lim_{n\to\infty} V(y_n - y'_n)\| \leq \lim_{n\to\infty} \|V\|\|y_n - y'_n\| = 0.$$

V es una isometría entre $\overline{Im\ |T|}$ e $\overline{Im\ T}$. Si consideramos $P : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \overline{Im|T|}$ la proyección ortogonal sobre $\overline{Im|T|}$. Entonces, $U = VP$ es la isometría parcial que estábamos buscando (aplicando la observación previa) y acabamos de probar que $T = U|T|$.

Veamos ahora que $|T| = U^*T$.

Por la definición de V, $|T| = V^{-1}T$ y aplicando la proposición anterior sabemos que $V^{-1} = V^*$. Además, $U^* = P^*V^* = V^*$ y así $|T| = U^*T$.

□

2.4. Propiedades de los números singulares

Seguidamente introducimos los números de aproximación y los números de Gelfand para operadores entre espacios de Banach.

Definición 2.4.1. Sean X,Y espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ se define

- el n-ésimo número de aproximación: $a_n(T) = \inf\{\|T - T_n\| : T_n \in \mathcal{L}(X,Y), rg(T_n) < n\}$
- el n-ésimo número de Gelfand: $c_n(T) = \inf\{\|T|_{X_n}\| : X_n \subset X, codim(X_n) < n\}$

Claramente, ambas sucesiones son decrecientes y positivas.

Cuando los espacios son Hilbert se da la siguiente relación entre $a_n(T)$, $c_n(T)$ y el n-ésimo número singular.

Teorema 2.4.1. Sean $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ entonces $s_n(T) = a_n(T) = c_n(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Vamos a probar primero que $c_n(T) = a_n(T)$: sea $T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ con $rg(T_n) < n$. Si consideramos $X_n = Ker\ T_n$ entonces, $codim X_n = rg(T_n) < n$ y $T|_{X_n} = (T - T_n)|_{X_n}$. Luego, $\|T|_{X_n}\| \leq \|T - T_n\|$. En conclusión, $c_n(T) \leq a_n(T)$.

Recíprocamente, sea $X_n \subset X$ con $codim\ X_n < n$. Entonces, $dim\ X_n^{\perp} = codim\ X_n < n$.

Consideremos Q la proyección sobre X_n y P la proyección sobre el ortogonal.

Definimos $T_n = TP$ entonces, $rg(T_n) < n$ y $T - T_n = TQ = T|_{X_n}Q$. Así,

$$\|T - T_n\| = \|T|_{X_n}Q\| \leq \|T|_{X_n}\|\|Q\| = \|T|_{X_n}\|.$$

Luego,

$$a_n(T) \leq \|T - T_n\| \leq \|T|_{X_n}\|.$$

Esto da que $a_n(T) \leq c_n(T)$ y por consiguiente $a_n(T) = c_n(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Veamos ahora que $a_n(T) \leq s_n(T)$.

Como T es compacto aplicando el *Teorema espectral* se tiene que

$$Tx = \sum_k s_k(T)\langle x, x_k\rangle y_k$$

donde $\{x_k\}$ es un sistema ortogonal de $\mathcal{H}_1$ e $\{y_k\}$ es un sistema ortogonal de $\mathcal{H}_2$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$T_n x = \sum_{k=1}^{n-1} s_k(T)\langle x, x_k\rangle y_k.$$

Es un operador de rango menor que n. Entonces teniendo en cuenta que los números singulares son una sucesión decreciente y aplicando la *Desigualdad de Bessel*:

$$\begin{aligned}
\|Tx - T_n x\|^2 &= \|\sum_{k\geq n} s_k(T)\langle x, x_k\rangle y_k\|^2 \\
&\leq \sum_{k\geq n} s_k(T)^2 |\langle x, x_k\rangle|^2 \\
&\leq s_n^2(T)\sum_{k\geq n} |\langle x, x_k\rangle|^2 \leq s_n^2(T)\|x\|^2.
\end{aligned}$$

Luego, $\|T - T_n\| \leq s_n(T)$ y así, $a_n(T) \leq s_n(T)$.

Probemos ahora que $s_n(T) \leq a_n(T)$.

Sea $T_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un operador con $rg(T_n) = m < n$. Entonces, por el *Teorema de representación de Riesz* podemos escribir $T_n = \sum_{r=1}^m \langle \cdot, v_r\rangle w_r$. Consideremos el sistema de m ecuaciones con n incógnitas (ξ_k):

$$\sum_{j=1}^{n} \langle x_j, v_r\rangle \xi_j = 0, \; r = 1, 2, ..., m.$$

Entonces, existe una solución no trivial $(\xi_1, ..., \xi_n)$ con $\sum_{k=1}^n \xi_k^2 = 1$ y definimos $x_0 = \sum_{k=1}^n \xi_k x_k$. Luego, $\|x_0\|^2 = \sum_{k=1}^n \xi_k^2 = 1$ y

$$T_n x_0 = \sum_{r=1}^{m} \langle \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k, v_r\rangle w_r = \sum_{r=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \langle x_k, v_r\rangle w_r = 0$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|T - T_n\| &\geq \|(T - T_n)(x_0)\| = \|Tx_0\| \\
&= \|\sum_{k=1}^{n} s_k(T)\xi_k y_k\| = (\sum_{k=1}^{n} s_k(T)^2 \xi_k^2)^{1/2} \\
&\geq s_n(T)(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2)^{1/2} = s_n(T).
\end{aligned}$$

$\square$

Veamos algunas propiedades de estas sucesiones:

Proposición 2.4.2. Sean A, B, C espacios de Banach, $S, T \in \mathcal{L}(A, B)$ y $R \in \mathcal{L}(B, C)$ entonces para cada $n, m \in \mathbb{N}$ tenemos que:

- $a_{n+m-1}(RS) \leq a_n(R)a_m(S)$.

- $a_{n+m-1}(S+T) \leq a_n(S) + a_m(T)$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ por la definición de $a_n(R)$ y $a_m(T)$ tenemos que existe $R_n \in \mathcal{L}(B, C)$ con $rg(R_n) < n$ y $S_m \in \mathcal{L}(A, B)$ con $rg(S_m) < m$ tales que

$$\begin{aligned} \|R - R_n\| &\leq a_n + \varepsilon \\ \|S - S_m\| &\leq a_m + \varepsilon \end{aligned}$$

Observamos que $rg(R_n(S-S_m)+RS_m) \leq n+m-2 < n+m-1$, ya que $rg(R_n(S-S_m)) \leq n-1$ y $rg(RS_m) \leq m-1$. Luego,

$$\begin{aligned} a_{n+m-1}(RS) &\leq \|RS - (R_n(S - S_m) + RS_m)\| = \|R(S - S_m) - R_n(S - S_m)\| \\ &= \|(R - R_n)(S - S_m)\| \leq \|R - R_n\|\|S - S_m\| \\ &\leq (a_n(R) + \varepsilon)(a_m(S) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Haciendo tender ε a 0 tenemos que $a_{n+m-1}(RS) \leq a_n(R)a_m(S)$.

De forma análoga, para cada $\varepsilon > 0$ tomamos $T_m, S_n \in \mathcal{L}(A, B)$ con rangos menores que m y n respectivamente tales que

$$\begin{aligned} \|T - T_m\| &\leq a_m(T) + \varepsilon \\ \|S - S_n\| &\leq a_n(S) + \varepsilon \end{aligned}$$

Además se tiene que $rg(T_m + S_n) < n + m - 1$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned} a_{n+m-1}(T + S) &\leq \|T + S - (T_m + S_n)\| \\ &= \|(T - T_m) + (S - S_n)\| \leq \|(T - T_m)\| + \|S - S_n\| \\ &\leq a_m(T) + a_n(S) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Haciendo tender ε a 0 tenemos que $a_{n+m-1}(T + S) < a_m(T) + a_n(S)$. □

Esto nos da las siguientes desigualdades para números singulares de operadores compactos en espacios de Hilbert:

Corolario 2.4.3. Sean $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ espacios de Hilbert. Entonces, para cualesquiera $Q, T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, $R \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ y $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} s_n(RTS) &\leq \|R\|s_n(T)\|S\| \\ s_{n+m-1}(Q + T) &\leq s_n(Q) + s_m(T). \end{aligned}$$

Bibliografía

[1] Gohberg, I., and Goldberg, S. *Basic operator theory.* Birkhäuser, 1980.

[2] Gohberg, I., and Krein, M. *Introduction to the Theory of linear Nonselfadjoint Operators.* Amer. Math. Soc., 1969.

[3] König, H. *Eigenvalue Distribution of Compact Operators.* Birkhäuser, 1986.

[4] Limaye, B. V. *Functional analysis.* New Age International, 1996.

[5] Pietsch, A. *Eigenvalues and s-Numbers.* Cambridge Univ. Press, 1987.

[6] Pietsch, A. *History of Banach spaces and linear operators.* Birkhäuser, 2007.

[7] Schatten, R. *Norm Ideals of completely continous operators.* Springer, 1970.