Beca de Colaboración

Curso 2012-2013

Universidad Complutense de Madrid

Espacios de Banach de Funciones

Irene Fernández Varas

Trabajo dirigido por:
Fernando Cobos Díaz

Directorio de Publicaciones del Departamento de Análisis Matemático
Sección 1, Número 77, Vol. 184.

Índice

1. Introducción.

Este trabajo se refiere a una clase de espacios que juega un papel importante en el Análisis Matemático: los espacios de Banach de funciones (ver [1] ó [3]). Seguimos fundamentalmente la presentación dada en los dos primeros capítulos de la monografía de Bennet y Sharpley [1]. Así, comenzamos con la definición de norma funcional y espacio de Banach de funciones, estudiando sus propiedades básicas. Después vemos la noción de espacio asociado y mostramos que todo espacio de Banach de funciones X coincide con su segundo espacio asociado X''. Todo esto se hace en el Capítulo I.

El Capítulo II se refiere a los espacios cuya norma es invariante por reordenamiento. Comenzamos introduciendo la reordenada decreciente f^* de una función f y mostrando las propiedades básicas de esta operación. Seguimos con la desigualdad de Hardy-Littlewood, los conceptos de espacio de medida resonante y fuertemente resonante, y sus caracterizaciones. Consideramos después la función maximal f^{**} y sus propiedades. A continuación pasamos al concepto de espacio invariante por reordenamiento (r.i.), mostrando sus propiedades más importantes, incluyendo el Teorema de representación de Luxemburg.

Finalmente, el Capítulo III trata de otras propiedades de los espacios r.i.. Consideramos primero la función fundamental y sus propiedades básicas. Encontramos los espacios de Lorentz al buscar el espacio r.i. más grande y el más pequeño con una función fundamental dada. Mostramos también las propiedades extremales de los espacios $L^1 + L^\infty$, $L^1 \cap L^\infty$. Por último concluimos el trabajo con una sección sobre los índices de Boyd. En ella usamos un teorema de interpolación probado en [1] (ver también [2] y [4] para más detalles sobre el tema).

2. Espacios funcionales de Banach

En este capítulo estudiamos una clase de espacios de Banach de funciones de gran interés en el Análisis Matemático. Los espacios L^p son Ejemplos destacados de esta clase de espacios.

Primero, daremos las definiciones y las propiedades elementales que cumplen esta clase de espacios. Después hablaremos del espacio asociado, espacio que guarda cierta semejanza con el dual.

Trabajaremos sobre un espacio de medida σ-finito (R, μ), es decir, en el que se puede elegir una sucesión $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de medida finita tal que $\cup R_n = R$.

Un conjunto medible se dirá acotado si es de medida finita.

2.1. Normas funcionales

Sea (R, μ) un espacio de medida como antes. Ponemos $M^+ = \{$funciones μ-medibles, $f : R \to [0, \infty]\}$. Además, cuando digamos que algo sucede en casi todo punto, nos referimos a $\mu-$casi todo punto.

Definición 1. Una aplicación $\rho : M^+ \to [0, \infty]$ es una norma funcional de Banach si $\forall f, g, f_n(n = 1, 2, ...) \in M^+, \forall a \geq 0$ y $\forall E \subset R$ μ-medible se tiene que:

(P1) $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ c.t.p
$\rho(af) = a\rho(f)$
$\rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g)$

(P2) Si $0 \leq g \leq f$ c.t.p. $\Rightarrow \rho(g) \leq \rho(f)$

(P3) $0 \leq f_n \uparrow f$ c.t.p. $\Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f)$

(P4) $\mu(E) < \infty \Rightarrow \rho(\chi_E) < \infty$

(P5) $\mu(E) < \infty \Rightarrow \int_E f d\mu \leq C_E \cdot \rho(f)$, C_E es una constante que depende de E y ρ pero no de f.

Como ya hemos dicho antes, los espacios L^p son ejemplos de este tipo de espacio. Seguidamente lo probamos.

Teorema 1. *Las normas de los espacios L_p son normas funcionales.*

Demostración. Caso $1 < p < \infty$

(P1) Es claro que $\int f^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ c.t.p.
También, $\rho_p(af) = a\rho_p(f)$ y, por la desigualdad de Minkowski, $\rho_p(f + g) \leq \rho_p(f) + \rho_p(g)$.

(P2) Es trivial.

(P3) Se sigue del Teorema de la convergencia monótona.

(P4) Si $\mu(E) < \infty$

$$\rho(\chi_E) = \left(\int d\mu\right)^{1/p} = \mu(E)^{1/p} < \infty$$

(P5) Si $\mu(E) < \infty$, usando la desigualdad de Hölder, se sigue que

$$\int_E f d\mu = \int f\chi_E d\mu \leq \rho_p(f) \cdot \mu(E)^{1/p'}$$

Los casos $p = \infty$ ó $p = 1$ son similares. $\square$

Llamaremos $M = \{f : R \to \mathbb{K} : f \text{ es } \mu - \text{ medible}\}$ y $M_0 = \{f \in M : f \text{ es finita en c.t.p.}\}$. Aquí $\mathbb{K}$ es el cuerpo de escalares.

Dotamos a M_0 de la topología de la convergencia en medida en conjuntos de medida finita, lo que le convierte en un espacio vectorial metrizable.

Definición 2. Sea ρ una norma funcional. El conjunto $X = X(\rho) = \{f \in M : \rho(|f|) < \infty\}$ con $\|f\|_X = \rho(|f|)$ se dice un espacio funcional de Banach.

Teorema 2. *Sea ρ una norma funcional y sea $X = X(\rho)$. $(X, \|\cdot\|_X)$ es un espacio lineal normado con las aplicaciones de espacios vectoriales usuales y $S \subset X \hookrightarrow M_0$, donde $S = \{g \in M : g \text{ función simple}\}$. En particular, si $f_n \to f$ en $X \Rightarrow f_n \to f$ en medida y por tanto existe una subsucesión que converge puntualmente.*

Demostración. Sea $f \in X$ y $\mu(E) < \infty$. Entonces $\int_E |f| d\mu \leq C_E \cdot \rho(|f|) < \infty$, por lo tanto f es finita en casi todo punto. Por lo tanto $X \subset M_0$ y hereda las operaciones que tenemos en M_0.

Usando (P1) y la definición de $\| \cdot \|_X$ vemos que X es un espacio lineal normado. Usando (P4) y la linealidad, tenemos $S \subset X$.

Para ver que X se incluye en M_0 de forma continua, veamos que si $f_n \to f$ en X, $f_n \to f$ en M_0.

Si $f_n \to f$ en X, entonces $\rho(|f_n - f|) \to 0$. Sea $\epsilon > 0$ y $E \subset R$, con $\mu(E) < \infty$.

$$\begin{aligned} \mu\{x \in E : |f(x) - f_n(x)| > \epsilon\} &\leq \int_E \frac{1}{\epsilon} |f_n - f| d\mu \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} C_E \cdot \rho(|f - f_n|) \to 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $f_n \to f$ en medida para cualquier E subconjunto de R con medida finita y por lo tanto, $f_n \to f$ en M_0.

El resultado acerca de la subsucesión nos lo garantiza un resultado de Teoría de la Medida.

□

En el siguiente lema veremos que el resultado análogo al Lema de Fatou, una de las propiedades básicas conocida en los espacios L^p, también se verifica en los espacios funcionales de Banach.

Lema 1. *Sea $X = X(\rho)$ un espacio de Banach funcional, $f_n \in X$.*

1. *Si $0 \leq f_n \uparrow f$ c.t.p., entonces, o bien $f \notin X$ y $\|f_n\|_X \uparrow \infty$ ó $f \in X$ y $\|f_n\|_X \uparrow \|f\|_X$*
2. *(Lema de Fatou) Si $f_n \to f$ c.t.p. y $\liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X < \infty$ entonces $f \in X$ y $\|f\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X$*

Demostración. 1. Sale de la propiedad (P3).

2. Definimos $h_n(x) = \inf_{m \geq n} |f_m(x)|$, se tiene entonces que $0 \leq h_n \uparrow |f|$ en c.t.p. Luego se sigue de (P3) y (P2) que

$$\|f\|_X = \rho(|f|) = \lim \rho(h_n) \leq \lim(\inf_{m \geq n} \rho(|f_m(x)|)) = \liminf \|f_n\|_X < \infty$$

Además, por ser f límite de funciones de X se tiene que f es medible y así $f \in X$.

$\square$

La propiedad que vamos a ver en el siguiente teorema, se conoce como la propiedad de Riesz-Fischer y equivale a ser completo si el espacio que consideramos es un espacio normado.

Teorema 3. *Sea X un espacio de Banach funcional, $f_n \in X$ y $\sum \|f_n\|_X < \infty$. Entonces $\sum f_n$ converge en X a una función f y $\|f\|_X \leq \sum \|f_n\|_X$. En particular X es completo.*

Demostración. Sea $t = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$, y $t_N = \sum_{n=1}^{N} |f_n|$. Así $0 \leq t_N \uparrow t$. Dado que:

$$\|t_N\|_X \leq \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X < \infty$$

usando el lema anterior se tiene que $t \in X$ y $\|t_N\|_X \uparrow \|t\|$.

Además, como $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ converge puntualmente, se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente.

Sea $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, y $s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$. Se tiene que $s_N \to f$ c.t.p. Entonces para todo M, resulta que $s_N - s_M \to f - s_M$ cuando $N \to \infty$. Además,

$$\liminf_{N\to\infty} \|s_N - s_M\|_X \leq \liminf_{N\to\infty} \sum_{n=M+1}^{N} \|f_n\|_X = \sum_{n=M+1}^{\infty} \|f_n\|_X \to 0, \text{ cuando } M \to \infty$$

Por el lema de Fatou, $f - s_M \in X (\Rightarrow f \in X)$ y $\|f - s_M\|_X \to 0$. Por lo tanto,

$$\|f\|_X \leq \|f - s_M\|_X + \|s_M\|_X \leq \|f - s_M\|_X + \sum_{n=1}^{M} \|f_n\|_X \Rightarrow \|f\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X$$

Esta desigualdad concluye la prueba. $\square$

El siguiente teorema, recoge las propiedades básicas de los espacios de Banach que hemos visto hasta ahora:

Teorema 4. *Sea ρ una norma funcional y sea $X = \{f \in M : \rho(|f|) < \infty\}$. Para cada $f \in X$, sea $\|f\|_X = \rho(|f|)$. Entonces $(X, \|\cdot\|_X)$ es un espacio de Banach y $\forall f, g, f_n \in M$ y subconjuntos medibles E de R se verifica:*

(i) (Propiedad de retículo) Si $|g| \leq |f|$ c.t.p. y $f \in X$, entonces, $g \in X$ y $\|g\|_X \leq \|f\|_X$. En particular, una función medible f pertenece a X si y sólo si $|f|$ pertenece a X. En este caso, ambas tienen la misma norma.

(ii) (Propiedad de Fatou) Supongamos $f_n \in X, f_n \geq 0$ y $f_n \uparrow f$ c.t.p. Si $f \in X$, entonces $\|f_n\|_X \uparrow \|f\|_X$. Si $f \notin X$, entonces $\|f_n\|_X \uparrow \infty$.

(iii) (Lema de Fatou) Si $f_n \in X, f_n \to f$ c.t.p. y $\liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X < \infty \Rightarrow f \in X$ y $\|f\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X$.

(iv) Toda función simple está en X.

(v) Para todo $E \subset \mathbb{R}$ de medida finita, existe una C_E constante finita tal que

$$\int_E |f| d\mu \leq C_E \|f\|_X, \qquad \forall f \in X$$

(vi) Si $f_n \to f$ en X, entonces, $f_n \to f$ en medida en todo conjunto de medida finita, en particular, una subsucesión de $\{f_n\}$ converge a f en c.t.p.

Veamos ahora una propiedad útil acerca de las topologías en los espacios funcionales de Banach.

Teorema 5. *Sean X, Y espacios funcionales de Banach sobre el mismo espacio de medida. Si $X \subset Y$, entonces, $X \hookrightarrow Y$, es decir, existe $C > 0$ tal que para todo $f \in X$ se tiene $\|f\|_Y \leq C\|f\|_X$.*

Demostración. Supongamos que $X \subset Y$ pero no existe C tal que $\|f\|_Y \leq C\|f\|_X,\ \forall f \in X$. Entonces existen funciones $f_n \in X$ tales que $\|f_n\|_X \leq 1$ pero $\|f_n\|_Y > n^3, \forall n \in \mathbb{N}$.

Podemos suponer $f_n \geq 0$ (si no, cambiamos f_n por $|f_n|$). Usando el Teorema 3, tenemos que

$$\sum \frac{f_n}{n^2} \text{ converge a } f \text{ en } X$$

Como $X \subset Y$, se tiene que $f \in Y$, pero esto no puede ser, ya que:

$$0 \leq \frac{f_n}{n^2} \leq f \Rightarrow \|f\|_Y \geq \frac{1}{n^2}\|f_n\|_Y > n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Lo cual es una contradicción. □

Corolario 1. *Si dos espacios funcionales de Banach tienen las mismas funciones, entonces sus normas son equivalentes.*

2.2. El espacio asociado

El espacio asociado se define con cierta analogía al espacio dual. Recordemos la desigualdad de Hölder en los espacios L^p:

$$\int_R |fg| d\mu \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \qquad 1 \leq p \leq \infty$$

Se tiene también que

$$\|g\|_{L^{p'}} = \sup \left\{ \int_R |fg| d\mu : f \in L^p, \|f\|_{L^p} \leq 1 \right\}$$

Vamos a definir la norma asociada basándonos en esta fórmula.

Definición 3. Si ρ es una norma funcional, su norma asociada se define en M^+ mediante:

$$\rho'(g) = \sup \left\{ \int_R fg d\mu : f \in M^+, \rho(f) \leq 1 \right\}, \qquad g \in M^+$$

Hacemos notar que hemos prescindido del valor absoluto ya que ambas funciones son de M^+.

Teorema 6. *Si ρ es una norma funcional, la norma asociada ρ' también lo es.*

Demostración. (P1) $\rho'(g) = 0 \Leftrightarrow g = 0$ c.t.p.

" $\Leftarrow$ " Supongamos que $g = 0$ c.t.p. Si $\rho(f) \leq 1$, f es finita en casi todo punto, ya que $X \hookrightarrow M_0$ por lo tanto $\int fgd\mu = 0$, luego $\rho'(g) = 0$.

" $\Rightarrow$ " Si $\rho'(g) = 0$, tenemos que $\int fg = 0$ para cualquier f de M^+ verificando que $\rho(f) \leq 1$.

Sea $E \subset R$ medible y con $\mu(E) < \infty$, luego $0 < \rho(\chi_E) < \infty$. Tomamos $f = \frac{1}{\rho(\chi_E)}\chi_E$. Así $\rho(f) = 1$ y obtenemos:

$$0 = \int_R fgd\mu = \frac{1}{\rho(\chi_E)}\int_E gd\mu$$

Por tanto, $g = 0$ en casi todo punto de E y como E es un conjunto arbitrario y nuestra medida μ es $\sigma-$finita, tenemos que $g = 0$ en c.t.p. de R.
Usando las propiedades del supremo se obtiene: $\rho'(ag) = a\rho'(g)$ y que $\rho'(f+g) = \rho'(f) + \rho'(g)$.

(P2) Trivial

(P3) Sean $g_n, g \in M^+, 0 \leq g_n \uparrow g$. Usando (P2) se obtiene que $\rho'(g_n) \leq \rho'(g), \forall n \in \mathbb{N}$.
Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho'(g_{n_0}) = \infty$ ya hemos acabado.
Si este caso no se da, entonces $\rho'(g_n) < \infty$ para cualquier natural. Sea $\xi < \rho'(g)$, entonces existe una $f \in M^+$ tal que $\int fgd\mu > \xi$, con $\rho(f) \leq 1$. Ahora, como $fg_n \uparrow fg$, usando el teorema de la convergencia monótona

$$\int fg_n \uparrow \int fg > \xi \text{ luego existe un } N \text{ tal que }, \int fg_n > \xi, \quad \forall n \geq N.$$

Por lo tanto, $\rho'(g_n) > \xi, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y así $\rho'(g_n) \uparrow \rho'(g)$.

(P4) Si $\mu(E) < \infty$, usando la propiedad (P5) de ρ sabemos que existe una C_E tal que $\int_E fd\mu \leq C_E\rho(f)$, entonces $\int_R \chi_E fd\mu \leq C_E\rho(f)$, luego

$$\rho'(\chi_E) = \sup\left\{\int_R \chi_E fd\mu : f \in M^+, \rho(f) \leq 1\right\} \leq C_E < \infty.$$

(P5) Sea E, con $\mu(E) < \infty$. Si $\mu(E) = 0$ no hay nada que probar.
Supongamos que $\mu(E) > 0$, usando (P4) de ρ, podemos denotar $C'_E = \rho(\chi_E) < \infty$. La función $f = \frac{1}{\rho(\chi_E)}\chi_E$ verifica $\rho(f) = 1$ y si tomamos ahora una $g \in M^+$, se cumple:

$$\int_E gd\mu = C'_E \int_R fgd\mu \leq C'_E\rho'(g)$$

y queda probado lo que queríamos.

$\square$

Definición 4. El espacio de Banach funcional $X(\rho')$ se llama espacio asociado de X y lo denotamos como X'. Ponemos

$$\|g\|_{X'} = \rho'(g) = \sup \left\{ \int_R |fg| d\mu : f \in X, \|f\|_X = 1 \right\}.$$

Teorema 7. *(Desigualdad de Hölder) Sea X un espacio funcional de Banach, con espacio asociado X'. Si $f \in X$ y $g \in X'$ entonces fg es integrable y se tiene*

$$\int_R |fg| d\mu \leq \|f\|_X \|g\|_{X'}$$

Demostración. Si $\|f\|_X = 0 \Rightarrow f = 0$ c.t.p. $\Rightarrow \int_R |fg| d\mu = 0 = 0\|g\|_{X'}$.
Si $\|f\|_X \neq 0 \Rightarrow f/\|f\|_X$ tiene norma 1 en X, por tanto

$$\int_R \left| \frac{f}{\|f\|_X} g \right| d\mu \leq \|g\|_{X'}$$

y multiplicando ambos miembros por $\|f\|_X$ se sigue el resultado. □

El siguiente teorema se deduce de todas las propiedades probadas anteriormente:

Teorema 8. *Sea $1 \leq p \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Entonces, $L^{p'}$ es el espacio asociado de L^p.*

El lema que veremos a continuación, nos da una especie de recíproco para la desigualdad de Hölder.

Lema 2. *(Teorema de resonancia de Landau) Una función medible g pertenece a X' si y sólo si fg es integrable para cualquier $f \in X$.*

Demostración. " $\Rightarrow$ " Desigualdad de Hölder.
" $\Leftarrow$ " Supongamos que $\rho'(|g|) = \infty$ pero fg es integrable para cualquier $f \in X$.Entonces existen funciones $f_n \geq 0$ tal que $\|f_n\|_X \leq 1$ y $\int_R |f_n g| d\mu > n^3$. Por la propiedad de Riesz-Fischer, $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f_n \in X$. Sin embargo fg no es integrable, ya que

$$\int_R |fg| d\mu \geq \frac{1}{n^2} \int |f_n g| d\mu > n.$$

Esta contradicción muestra que la condición es suficiente. □

El próximo teorema nos dará una propiedad interesante que no siempre se cumple con el dual. En términos de duales, se habla de espacios reflexivos si el espacio coincide con su bidual. Con los asociados no tenemos que hacer esta distinción ya que ocurre siempre.

Teorema 9. *(Lorentz-Luxemburg) Todo espacio funcional de Banach X coincide con su segundo espacio asociado X''. Es decir, una función medible f pertenece a X si y sólo si pertenece a X'', y en ese caso $\|f\|_X = \|f\|_{X''}$.*

Demostración. " $\subseteq$ " Si $f \in X$, usando la desigualdad de Hölder, fg es integrable para cualquier $g \in X'$ y usando el lema anterior con X' en vez de con X se tiene que $f \in X''$. Además:

$$\|f\|_{X''} = \sup\left\{\int |fg| d\mu : \|g\|_{X'} \leq 1\right\} \leq \|f\|_X$$

(en la última desigualdad hemos vuelto a usar la desigualdad de Hölder)
" $\supseteq$ " Elegimos una sucesión creciente de conjuntos $R_N, (N = 1, 2, ...)$ de medida finita tal que $\bigcup_n R_n = R$ (que es posible por ser una medida $\sigma-$finita)
Para cada N y cada $f \in X''$, consideramos

$$f_N(x) = \text{mín}(|f(x)|, N)\chi_{R_N}(x)$$

Tenemos que $0 \leq f_N \leq N\chi_{R_N}$. Usando el Teorema 4/(i),(iv), deducimos que $f_N \in X$, y $f_N \in X''$. Además, como $0 \leq f_N \uparrow |f|$, se tiene, usando el teorema 4/(ii), que basta probar que $\|f_N\|_X \leq \|f_N\|_{X''}$ para tener que $\|f\|_X \leq \|f\|_{X''}$.
A partir de ahora, consideramos N y f fijos. Podemos suponer que $\|f_N\|_X > 0$ (el caso en el que vale cero es trivial)
Llamamos $L_N^1 = \{g : \mu-\text{integrable en } R \text{ con soporte en } R_N\}$.
Si dotamos a L_N^1 con la norma $g \to \int_{R_N} |g| d\mu$, obtenemos un espacio de Banach. Sea S la bola unidad cerrada de X y $U = S \cap L_N^1$. El conjunto U es convexo en L_N^1. Además U es cerrado: $(h_n) \subset U, h_n \to h$. El Teorema 2 nos garantiza la existencia de una subsucesión (h_{n_k}) que converge puntualmente a h. Como $h_{n_k} \in S$, usando el Teorema 4/(iii), $\|h\|_X \leq \text{lím inf}_{k\to\infty} \|h_{n_k}\|_X \leq 1$. Luego $h \in S$ y por lo tanto $h \in U$. Queda probado que U es un subconjunto convexo y cerrado de L_N^1.
Sea $\lambda > 1$. Consideramos $g = \frac{\lambda f_N}{\|f_N\|_X}$, verifica que $g \in L_N^1$ (integrable en R y con $sop(g) \subset R_N$), pero $\|g\|_X = \lambda > 1$ por lo tanto, $g \notin S$ y consecuentemente $g \notin U$. Por el teorema de separación de convexos de Hahn-Banach, existe un hiperplano cerrado que separa g y U, esto es existe $\phi \neq 0, \phi \in L^\infty(R, \mu)$ que puede ser elegida con soporte en R_N tal que

$$Re\left(\int_{R_N} \phi h d\mu\right) < \gamma < Re\left(\int_{R_N} \phi g d\mu\right)$$

para cierto $\gamma \in \mathbb{R}$ y para todo $h \in U$. De hecho, si consideramos $\psi = \frac{|\phi|}{\phi}$, observamos que $\psi|h| \in U$ si y sólo si $h \in U$.
Por lo tanto,

$$\sup_{h\in U} \int_{R_N} |\phi h| d\mu \leq \gamma < Re\left(\int_{R_N} \phi g d\mu\right) \leq \int_{R_N} |\phi g| d\mu$$

Por otro lado, una función arbitraria h de S, al restringirla a R_N es el límite puntual de la sucesión creciente de truncamientos:

$$h_n(x) = min(h(x), n)\chi_{R_N}(x)$$

cada $h_n \in L^1_N, h_n \in S$ por lo tanto $h_n \in U$. Por el Teorema de la convergencia monótona, podemos cambiar el supremo en U por el supremo en S. Por tanto:

$$\|\phi\|_{X'} = \sup_{h\in S} \int_{R_N} |\phi h| d\mu \leq \gamma < \frac{\lambda}{\|f_N\|_X} \int_{R_N} |\phi f_N| d\mu$$

Equivalentemente, usando la desigualdad de Hölder, $\|f_N\|_X < \lambda \int_R \left| f_N \frac{\phi}{\|\phi\|_{X'}} \right| d\mu \leq \lambda \|f_N\|_{X''}$.
Haciendo tender λ a 1 se obtiene $\|f_N\|_X \leq \|f_N\|_{X''}$. Esto termina la demostración. □

El lema que sigue muestra una similaritud con el espacio dual.

Lema 3. *La norma de una función g en el espacio asociado X' viene dada por:*

$$\|g\|_{X'} = \sup\left\{\left|\int_R fg d\mu\right| : f \in X, \|f\|_X \leq 1\right\}$$

Demostración. Claramente $\sup_{f\in S} |\int_R fg d\mu| \leq \sup_{f\in S} \int_R |fg| d\mu = \|g\|_{X'}$.
Veamos que $\sup_{f\in S} \int_R |fg| d\mu \leq \sup_{f\in S} |\int_R fg d\mu|$.
Consideramos $E = \{x \in R : g(x) \neq 0\}$. Podemos escribir $g(x) = |g(x)|\phi(x), |\phi(x)| = 1$, por lo tanto $|g(x)| = g(x)\bar{\phi}(x)$ en E.
Para cualquier f de S se da que $\int_R |fg| d\mu = \int_E |fg| d\mu = \int_E |f| g(x)\bar{\phi}(x) d\mu$.
Ahora, definimos

$$h(x) = \begin{cases} |f|\bar{\phi}(x) & si \quad x \in E \\ \\ 0 & si \quad x \notin E \end{cases}$$

Es claro que $|h(x)| \leq |f(x)|$, luego $h \in S$. Asi

$$\int_R |fg| d\mu = \int_R hg d\mu \leq \left|\int_R hg d\mu\right| \leq \sup_{f\in S} \left|\int_R fg d\mu\right|$$

que era lo que nos faltaba por demostrar. □

Definición 5. Un subespacio B del dual X^* de un espacio de Banach X se dice normante si $\|f\|_X = \sup\{|L(f)| : L \in B, \|L\|_{X^*} \leq 1\}$ para cualquier f de X. Es decir, B es normante si contiene suficientes funcionales para reproducir la norma de X para cualquier elemento.

Teorema 10. *El espacio asociado X' de un espacio de Banach X es canónicamente isométricamente isomorfo a un subespacio cerrado normante de X^**

Demostración. Para cada $g \in X'$ definimos $\Psi : X' \to X^*, \Psi(g) = L_g$, donde $L_g : X \to \mathbb{K},\ \ L_g(f) = \int_R fgd\mu$.
Es un funcional lineal, además, para ver que el funcional es continuo basta usar la desigualdad de Hölder.
Además es inyectivo, ya que si $L_g(f) = 0\ \ \forall f \in X$, usando la Definición 4 acerca de la norma del dual, se obtiene que $g = 0$.
Por lo tanto, Ψ es un isomorfismo de X' a un subespacio lineal de X^*. Veamos que es una isometría. Se tiene

$$\|L_g\|_{X^*} = \sup\{|L_g(f)| : \|f\|_X \leq 1\} = \sup_{\|f\|\leq 1} \left\{ \left| \int_R fgd\mu \right| \right\} = \|g\|_{X'}$$

Como X' es completo, $\Psi(X')$ es cerrado en X^*.
Finalmente, si $f \in X$, tenemos, por el Teorema 9

$$\begin{aligned} \|f\|_X = \|f\|_{X''} &= \sup \left\{ \left| \int_R fgd\mu \right| : g \in X', \|g\|_{X'} \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ |L_g(f)| : g \in X', \|L_g\|_{X^*} \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

Luego la imagen de X' es normante en X^*. □

La relación entre espacios y sus asociados es la misma que teníamos con los espacios y sus duales, como veremos en esta última proposición.

Proposición 1. *Si X, Y son espacios de Banach y $X \hookrightarrow Y$, entonces $Y' \hookrightarrow X'$. Además si $\|f\|_Y \leq c\|f\|_X, \forall f \in X$, entonces se tiene, para cada $g \in Y'$, que $\|g\|_{X'} \leq c\|g\|_{Y'}$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
\|g\|_{X'} &= \sup\left\{\int_R |fg|\,d\mu : f \in X, \|f\|_X \leq 1\right\} \\
&\leq \sup\left\{\int_R |fg|\,d\mu : f \in Y, \|f\|_Y \leq c\right\} \\
&= c\sup\left\{\int_R |fg|\,d\mu : f \in Y, \|f\|_Y \leq 1\right\} \\
&= c\|g\|_{Y'}
\end{aligned}$$

□

3. Espacios funcionales de Banach invariantes por reordenamiento

Este capítulo se dedica a los espacios funcionales de Banach con la propiedad de que dos funciones equimedibles tienen la misma norma.

Para ello, comenzamos definiendo la reordenada decreciente de una función y mostrando sus propiedades más importantes. Veremos que esta reordenada nos da mucha información relevante sobre la función.

3.1. Distribuciones y reordenamientos decrecientes.

Consideramos (R, μ) un espacio de medida $\sigma-$finito.

Definición 6. La función de distribución μ_f de una función $f \in M_0$ viene dada, para $\lambda \geq 0$, por

$$\mu_f(\lambda) = \mu\{x \in R : |f(x)| > \lambda\}$$

Definición 7. Dos funciones $f \in M_0(R, \mu), g \in M_0(S, \nu)$ se dicen equimedibles si tienen la misma función de distribución.

Proposición 2. *(Propiedades) Sean $f, g, f_n \in M_0(R, \mu)$ y $a \in \mathbb{K}, a \neq 0$. Entonces, μ_f es no negativa, decreciente y continua por la derecha en $[0, \infty)$. Además:*

(1) Si $|g| \leq |f|$ c.t.p.$\Rightarrow \mu_g \leq \mu_f$

(2) $\mu_{af}(\lambda) = \mu_f(\lambda/|a|), \quad \lambda \geq 0$

(3) $\mu_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2), \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

(4) Si $|f| \leq \liminf |f_n|$ c.t.p., entonces $\mu_f \leq \liminf \mu_{f_n}$. En particular, $|f_n| \uparrow |f|$ c.t.p. implica $\mu_{f_n} \uparrow \mu_f$.

Demostración. Claramente μ_f es no negativa y decreciente $(0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow \mu_f(\lambda_1) \geq \mu_f(\lambda_2))$ Para ver la continuidad por la derecha, sea $E(\lambda) = \{x : |f(x)| > \lambda\}, \quad \lambda \geq 0$ y sea $\lambda_0 \geq 0$. Los $E(\lambda)$ aumentan a medida que λ decrece y

$$E(\lambda_0) = \bigcup_{\lambda > \lambda_0} E(\lambda) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(\lambda_0 + \frac{1}{n}\right)$$

Entonces, por el Teorema de la convergencia monótona:

$$\mu_f\left(\lambda_0 + \frac{1}{n}\right) = \mu\left(E\left(\lambda_0 + \frac{1}{n}\right)\right) \uparrow \mu(E(\lambda_0)) = \mu_f(\lambda_0)$$

Las propiedades (1) y (2) salen de la definición.
(3) Si $|f(x) + g(x)| > \lambda_1 + \lambda_2 \Rightarrow |f(x)| > \lambda_1$ o $|g(x)| > \lambda_2$ lo que implica la desigualdad buscada.
(4) Sea $\lambda \geq 0$ fijo. Sea $E = \{x : |f(x)| > \lambda\}, \quad E_n = \{x : |f_n(x)| > \lambda\}$. Claramente,

$$E \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n>m} E_n$$

Por tanto

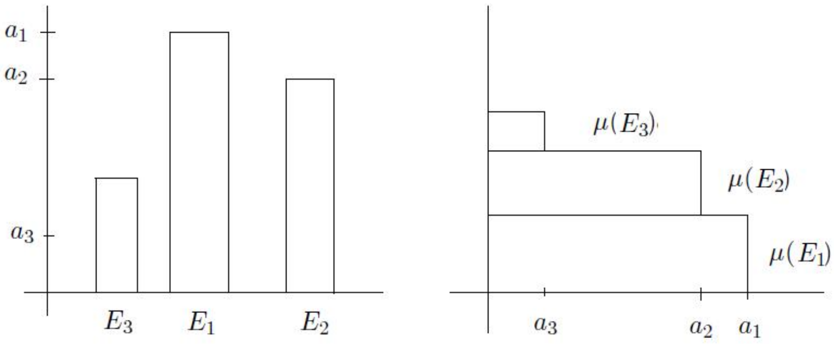
$$\mu\left(\bigcap_{n>m} E_n\right) \leq \inf_{n>m} \mu(E_n) \leq \sup_{m} \inf_{n>m} \mu(E_n) = \liminf_{n} \mu(E_n)$$

Pero $\cap_{n>m} E_n$ crece con m, por tanto, usando el Teorema de la convergencia monótona:

$$\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_{m} \bigcap_{n_m} E_n\right) = \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcap_{n>m} E_n\right) \leq \liminf_{n} \mu(E_n).$$

Esto da (4). $\square$

Ejemplo 1. *Supongamos* $f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x)$, *donde* $E_j \cap E_i = \emptyset, j \neq i$, $\mu(E_i) < \infty$, *para todo* i *y con* $a_1 > a_2 > ... > a_n > 0$.
Si $\lambda > a_1 \Rightarrow \mu_f(\lambda) = \mu\{x \in R : |f(x)| > \lambda > a_1\} = \mu(\emptyset) = 0$.
Si $a_2 \leq \lambda < a_1 \Rightarrow \mu_f(\lambda) = \mu\{x \in R : |f(x)| > \lambda \geq a_2\} = \mu(E_1)$.
Si $a_3 \leq \lambda < a_2 < a_1 \Rightarrow \mu_f(\lambda) = \mu(E_1 \cup E_2)$.
Si $\lambda < a_3 \Rightarrow \mu_f(\lambda) = \mu(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$.
Así pues, tenemos que $\mu_f(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} m_j \chi_{[a_{j+1}, a_j)}(\lambda)$, *donde* $m_j = \sum_{i=1}^{j} \mu(E_i)$.



En la figura de la izquierda está representada f y en la de la derecha μ_f.

Definición 8. Sea $f \in M_0(R, \mu)$. El reordenamiento decreciente de f es la función f^*, definida en $[0, \infty)$ por:

$$f^*(t) = \text{ínf}\{\lambda : \mu_f(\lambda) \leq t\} \qquad (t \geq 0)$$

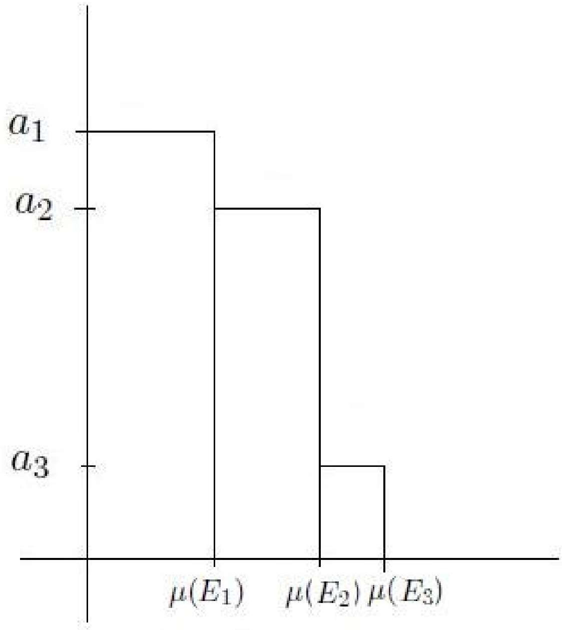
Observaciones

- Ponemos por convenio $\text{ínf}\, \emptyset = \infty$. Así, si $\mu_f(\lambda) > t$, para todo $\lambda \geq 0$ se tiene que $f^*(t) = \infty$.
- Si (R, μ) es un espacio de medida finito, entonces $\mu_f(\lambda) \leq \mu(R)$, para todo $\lambda \geq 0$. Luego $f^*(t) = 0$, para todo $t \geq \mu(R)$.
- Si μ_f es continua y estrictamente decreciente, entonces f^* es la inversa de μ_f.
- Obsérvese también que si primero se construye μ_f y después la función de distribución m_{μ_f} de μ_f respecto a la medida de Lebesgue en $[0, \infty)$, entonces ésta última función es precisamente f^* ya que

$$f^*(t) = \sup\{\lambda : \mu_f(\lambda) > t\} = m_{\mu_f}(t)$$

Ejemplo 2. *(a) En el ejemplo anterior,*
Si $t \geq m_3, f^*(t) = \text{ínf}\{\lambda : \mu_f(\lambda) \leq t\} = 0.$
Si $m_3 > t \geq m_2, f^*(t) = \text{ínf}\{\lambda : \mu_f(\lambda) \leq t\} = a_3.$
Siguiendo el mismo razonamiento y estudiando cada caso, se obtiene

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{[m_{j-1}, m_j)}(t), \qquad m_0 = 0$$

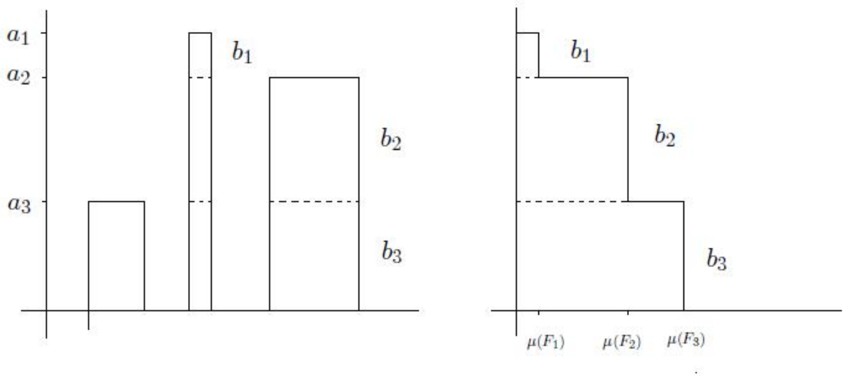


(b) Podemos escribir las funciones simples con bloques horizontales en vez de verticales. Con la función del ejemplo anterior:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{F_k}(x)$$

con $b_k \geq 0$ *y* $\mu(F_k) < \infty, F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_n$*. Donde* $b_k = a_k - a_{k+1}$ *y* $F_k = \bigcup_{j=1}^{k} E_j$.
En este caso, la reordenada decreciente puede verse como cortar cada bloque en sus secciones horizontales y pegarlas para formar un único bloque horizontal pegado al eje.

$$f^* = \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{[0,\mu(F_k))}$$



La gráfica de la izquierda corresponde a f y la de la derecha a f^*.

(c) Sea $f(x) = 1 - e^{-x}, 0 < x < \infty$. m_f es infinita para $0 \leq \lambda < 1$ e igual a cero para $\lambda \geq 1$. Por lo tanto, $f^*(t) = 1, \forall t \geq 0$. En este ejemplo se ve que puede haber una pérdida de información al pasar a la reordenada decreciente, sin embargo, las normas L_p se conservan, como ya habíamos mencionado en la introducción del capítulo.

Proposición 3. *Supongamos f, g y $f_n \in M_0(R, \mu), a \in \mathbb{K}$. f^* es no negativa, decreciente y continua por la derecha en $[0, \infty)$. Además*

(1) $|g| \leq |f|$ *c.t.p. implica que* $g^* \leq f^*$

(2) $(af)^* = |a|f^*$

(3) $(f+g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$

(4) *Si* $|f| \leq \liminf_{n\to\infty} |f_n|$ *c.t.p., entonces* $f^* \leq \liminf_{n\to\infty} f_n^*$. *En particular,* $|f_n| \uparrow |f|$ *c.t.p. implica* $f_n^* \uparrow f^*$.

(5) $f^*(\mu_f(\lambda)) \leq \lambda$ *si* $\mu_f(\lambda) < \infty$ *y* $\mu_f(f^*(t)) \leq t$ *si* $f^*(t) < \infty$.

(6) *f y f^* son equimedibles.*

(7) $(|f|^p)^* = (f^*)^p \quad (0 < p < \infty)$

Demostración. Dado que $f^* = m_{\mu_f}$, por las propiedades de las funciones de distribución tenemos que es no negativa, decreciente y continua por la derecha. Usando esas mismas propiedades obtenemos también (1) y (4).

(2) $(af)^*(t) = m_{\mu_{af}}(t) = \sup\{\lambda : \mu_{af}(\lambda) > t\} = \sup\{\lambda : \mu_f(\lambda/|a|) > t\} = \sup\{|a|\gamma : \mu_f(\gamma) > t\} = |a| \sup\{\gamma : \mu_f(\gamma) > t\} = |a|f^*(t)$.

(5) Sea $\lambda \geq 0$ y supongamos que $t = \mu_f(\lambda)$ es finito. Entonces

$$f^*(\mu_f(\lambda)) = f^*(t) = \inf\{\lambda' : \mu_f(\lambda') \leq t = \mu_f(\lambda)\} \leq \lambda$$

Para la segunda parte, sea $t \geq 0$ y supongamos que $\lambda = f^*(t)$ es finito. Dado que $f^*(t) = \inf\{\lambda : \mu_f(\lambda) \leq t\}$, $\exists \lambda_n$ tal que $\lambda_n \downarrow \lambda$ con $\mu_f(\lambda_n) \leq t$, usando la continuidad por la derecha, tenemos:

$$\mu_f(f^*(t)) = \mu_f(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \mu_f(\lambda_n) \leq t$$

(3) Supongamos que $\lambda = f^*(t_1) + g^*(t_2)$ es finito. (Si no, ya habríamos acabado) Sea $t = \mu_{f+g}(\lambda)$. Por la desigualdad triangular y (5):

$$\begin{aligned} t &= \mu\{x : |f(x) + g(x)| > f^*(t_1) + g^*(t_2)\} \\ &\leq \mu\{x : |f(x)| > f^*(t_1)\} + \mu\{x : |g(x)| > g^*(t_2)\} \\ &= \mu_f(f^*(t_1)) + \mu_g(g^*(t_2)) \leq t_1 + t_2 \quad \Rightarrow t < \infty \end{aligned}$$

Además, usando que es decreciente y de nuevo (5): $(f+g)^*(t_1+t_2) \leq (f+g)^*(t) = (f+g)^*(\mu_{f+g}(\lambda)) \leq \lambda = f^*(t_1) + g^*(t_2)$.

(6) Sea $f \in M_0$. Podemos encontrar funciones simples no negativas f_n tales que $f_n \uparrow |f|$. Además, $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ y f_n^* son equimedibles, ya que para las funciones simples es trivial verlo, esto es:

$$\mu_{f_n}(\lambda) = m_{f_n^*}(\lambda) \qquad (\lambda > 0)$$

Pero $f_n \uparrow |f|$ y $f_n^* \uparrow f^*$ por (4), luego usando la Proposición 2/(4), obtenemos que $\mu_f(\lambda) = m_{f^*}(\lambda)$ y por lo tanto f y f^* son equimedibles.

(7) Tenemos $\mu_{|f|^p}(\lambda) = \mu_f(\lambda^{1/p}) = m_{f^*}(\lambda^{1/p}) = m_{(f^*)^p}(\lambda)$, luego $(|f|^p)^* = \text{ínf}\{\lambda : \mu_{|f|^p}(\lambda) \leq t\} = \text{ínf}\{\lambda : m_{(f^*)^p}(\lambda) \leq t\} = ((f^*)^p)^* = (f^*)^p$. $\square$

La siguiente proposición nos describe las normas de L^p a través de la reordenada decreciente y de la función de distribución. En particular muestra que las normas L^p de f y f^* coinciden.

Proposición 4. *Sea $f \in M_0$, si $0 < p < \infty$, entonces:*

$$\int_R |f|^p d\mu = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu_f(\lambda)d\lambda = \int_0^\infty (f^*(t))^p dt$$

Además, en el caso $p = \infty$, $\sup_{x \in R} |f(x)| = \text{ínf}\{\lambda : \mu_f(\lambda) = 0\} = f^*(0)$.

Demostración. Basta probarlo para una función simple gracias a los teoremas de convergencia. Por lo tanto, sea $f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$. Como hemos visto en el Ejemplo 2, $f^*(t) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{[m_{j-1}, m_j)}(t)$. Por tanto,

$$\int |f|^p d\mu = \sum_{j=1}^n a_j^p \mu(E_j) = \sum_{j=1}^n a_j^p m([m_{j-1}, m_j)) = \int_0^\infty (f^*)^p dm.$$

Además,

$$\begin{aligned} p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu_f(\lambda)d\lambda &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\sum_{j=1}^n m_j\chi_{[a_{j+1},a_j)(\lambda)}d\lambda \\ &= p\sum_{j=1}^n m_j\int_{a_{j+1}}^{a_j}\lambda^{p-1}d\lambda = \sum_{j=1}^n (a_j^p - a_{j-1}^p)m_j \\ &= \sum_{j=1}^n a_j^p\mu(E_j) = \int |f|^p d\mu \end{aligned}$$

La igualdad para $p = \infty$ es trivial. □

3.2. Una desigualdad de Hardy y Littlewood

Pese a que la reordenada decreciente no preserva necesariamente la suma o el producto de funciones, si que preserva algunas desigualdades donde están involucradas estas operaciones. Es lo que describiremos en el teorema de Hardy y Littlewood.

Lema 4. *Sea g una función simple no negativa de (R, μ) y sea $E \subset R$ medible. Entonces*

$$\int_E g d\mu \leq \int_0^{\mu(E)} g^*(s)ds$$

Demostración. Como g es una función simple, $g(x) = \sum_{j=1}^n b_j\chi_{F_j}(x)$ donde $F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_n, b_j > 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_E g d\mu &= \sum_{j=1}^n b_j\mu(E\cap F_j) \leq \sum_{j=1}^n b_j \min(\mu(E), \mu(F_j)) \\ &= \sum_{j=1}^n b_j\int_0^{\mu(E)}\chi_{(0,\mu(F_j))}(s)ds = \int_0^{\mu(E)} g^*(s)ds \end{aligned}$$

□

Teorema 11. *(Hardy-Littlewood) Si $f, g \in M_0$, entonces*

$$\int_R |fg|d\mu \leq \int_0^\infty f^*(s)g^*(s)ds$$

Demostración. Como hemos dicho antes, basta verlo para las funciones simples. Consideramos $f(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{E_j}(x)$, donde $E_1 \subset E_2 \subset ... \subset E_m$ y $a_j > 0, \forall j$.
Entonces, $f^*(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{[0,\mu(E_j))}(t)$. Ahora, por el Lema 4:

$$\begin{aligned}\int |fg| d\mu &= \sum_{j=1}^{m} a_j \int_{E_j} g d\mu \leq \sum_{j=1}^{m} a_j \int_0^{\mu(E_j)} g^*(s) ds \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{[0,\mu(E_j))}(s) g^*(s) ds = \int_0^{\infty} f^*(s) g^*(s) ds\end{aligned}$$

□

Una consecuencia inmediata de esta desigualdad es que

$$\int_R |f\tilde{g}| d\mu \leq \int_0^{\infty} f^*(s) g^*(s) ds$$

donde $\tilde{g}$ es cualquier función equimedible con g. De aquí es de donde surgen los conceptos de resonante y fuertemente resonante que se van a definir a continuación.

Definición 9. Un espacio $\sigma-$finito (R, μ) se dice resonante si para cualquier $f, g \in M_0(R, \mu)$, se da

$$\int_0^{\infty} f^*(t) g^*(t) dt = \sup \left\{ \int_R |f\tilde{g}| d\mu : \tilde{g} \text{ equimedible con } g \right\}.$$

Se dice que (R, μ) es fuertemente resonante si para cualquier $f, g \in M_0$ existe una $\tilde{g}$ equimedible con g tal que

$$\int_0^{\infty} f^*(t) g^*(t) dt = \int_R |f\tilde{g}| d\mu$$

Observamos que fuertemente resonante implica resonante.

Ejemplo 3. *Veamos que resonante no implica fuertemente resonante. Consideremos el espacio $[0, \infty)$ con la medida de Lebesgue. Como veremos en el Teorema 13, este espacio es resonante, pero el ejemplo que sigue prueba que no es fuertemente resonante.*
Sea $f(x) = 1 - e^{-x}$. Así $f^* = 1$. Sea $g = g^* = \chi_{[0,1)}$. Si $\tilde{g}$ ha de ser equimedible con g, entonces tiene que ser (en valor absoluto) la función característica de un conjunto de medida 1 de $[0, \infty)$, por lo tanto

$$\int_R |f\tilde{g}| d\mu = \int_E (1 - e^{-x}) dx < 1 = \int_0^{\infty} f^*(t) g^*(t) dt$$

Ejemplo 4. *(Espacio no resonante) Sea* $R = \{a, b\}$, $\mu(a) = 1$, $\mu(b) = 2$. *Sea* $f = \chi_b$, $g = \chi_a$, *como hemos visto, se tiene que* $f^* = \chi_{[0,2)}$, $g^* = \chi_{[0,1)}$, *luego* $\int f^* g^* = 1$.
Por otro lado, $\int |f\tilde{g}| d\mu = 0$ *para cualquier* $\tilde{g}$ *equimedible con* g *ya que* f *y* $\tilde{g}$ *tendrán soportes disjuntos.*

Lema 5. *Sea* (R, μ) *un espacio de medida finito y no atómico. Sea* $f \in M_0$ *y sea* $t \in \mathbb{R}$ *tal que* $0 \leq t \leq \mu(R)$. *Entonces, existe un subconjunto medible* E_t, $\mu(E_t) = t$ *tal que*

$$\int_{E_t} |f| d\mu = \int_0^t f^*(s) ds$$

Además, E_t *puede construirse tal que si* $0 \leq s \leq t \leq \mu(R)$, $E_s \subset E_t$.

Demostración. Supongamos que existe $\alpha > 0$ tal que $\mu_f(\alpha) = t$. Entonces, $f^*(t) = \operatorname{ínf}\{\lambda : \mu_f(\lambda) = t\}$. Por la continuidad por la derecha de μ_f se tiene que $\mu_f(f^*(t)) = t$. Por lo tanto, si $E_t = \{x : |f(x)| > f^*(t)\}$, $\mu(E_t) = \mu_f(f^*(t)) = t$. Si calculamos la función de distribución de $f\chi_{E_t}$:

$$\mu_{f\chi_{E_t}}(\lambda) = \mu\{x \in E_t : |f(x)| > \lambda\} = \begin{cases} \mu_f(\lambda) & si \quad \lambda > f^*(t) \\ t & si \quad 0 \leq \lambda \leq f^*(t) \end{cases}$$

De igual forma, calculamos la función de distribución de $f^*\chi_{[0,t)}$

$$m_{f^*\chi_{[0,t)}}(\lambda) = m\{s \in [0, t] : f^*(s) > \lambda\} = \begin{cases} m_{f^*}(\lambda) & si \quad \lambda > f^*(t) \\ t & si \quad 0 \leq \lambda \leq f^*(t) \end{cases}$$

Pero sabemos que f y f^* son equimedibles, por lo tanto $\mu_f = m_{f^*}$, luego $f\chi_{E_t}$ y $f^*\chi_{[0,t)}$ son equimedibles, y usando la Proposición 4, las integrales del enunciado coinciden. Además, hemos construido E_t de forma que crezca con t, luego hemos acabado.
Supongamos ahora que t no esta en el rango de μ_f. Dado que la medida de R es finita y $f \in M_0$, el Teorema de la convergencia dominada nos da

$$0 = \mu\{x : |f(x)| = \infty\} = \lim_{n\to\infty} \mu\{x : |f(x)| > n\} = \lim_{n\to\infty} \mu_f(n)$$

Como μ_f es decreciente, $\lim_{\lambda\to\infty} \mu_f(\lambda) = 0$.
Sea $\lambda_0 = f^*(t)$ y supongamos que $\lambda_0 > 0$. Como t es positivo, se sigue que λ_0 es finito. Además, dado que t no está en el rango de μ_f, usando la

Proposición 3 y la definición de f^*, $\mu_f(\lambda_0) < t < \mu_f(\lambda)$ para $0 < \lambda < \lambda_0$.
Sea ahora $t_1 = \lim \mu_f(\lambda_0^-)$, se verifica que

$$t_0 := \mu_f(\lambda_0) < t \leq \mu_f(\lambda_0^-) = t_1$$

Si $t_0 \leq s < t_1$, se tiene que $f^*(s) = \inf\{\lambda : \mu_f(\lambda) \leq s\} = \lambda_0$.
Queremos ver que $t_1 = \mu\{x : |f(x)| \geq \lambda_0\}$. Si llamamos A a éste conjunto que estamos midiendo, se tiene que $A = \cap F_n,\ \ F_n = \{x : |f(x)| > \lambda_0 - 1/n\}$.
Se cumple que

$$\mu(A) = \lim_n \mu(F_n) = \lim_n \mu_f(\lambda_0 - 1/n) = t_1 = \mu_f(\lambda_0^-)$$

Ahora, $G = \{x : |f(x)| = \lambda_0\} = \{x : |f(x)| \geq \lambda_0\} \setminus \{x : |f(x)| > \lambda_0\} := B \setminus C$.
Se tiene $\mu(G) = \mu(B) - \mu(C) = \mu(A) - \mu(C) = t_1 - t_0$.
Como estamos en un espacio no atómico, podemos elegir un $F_t \subset G$ tal que $\mu(F_t) = t - t_0$.
Definimos:

$$E_t = \{x : |f(x)| > \lambda_0\} \cup F_t$$

Se cumple que su medida es t y además,

$$\int_{E_t} |f| d\mu = \int_{\{|f|>\lambda_0\}} |f| + \int_{F_t} |f| d\mu$$

Ahora, $t_0 = \mu_f(\lambda_0)$ y usando la primera parte de la demostración tenemos que

$$\int_{\{|f|>\lambda_0\}} |f| = \int_0^{t_0} f^*(s)ds$$

Además, dado que $|f| = t_0$ en F_t

$$\int_{F_t} |f| = \lambda_0(t - t_0) = \int_{t_0}^{t} f^*(s)ds$$

y sumando ambas integrales, obtenemos el resultado deseado.
Ahora, en el caso que $\lambda_0 = 0$, obtenemos de forma análoga $\mu\{x : |f(x)| > 0\} := t_0 < t$. Basta coger F_t disjunto al soporte de f con medida $\mu(F_t) = t - t_0$. Definiendo E_t análogamente al caso anterior y viendo que $f^*(s)$ es cero para $s \geq t_0$, obtenemos:

$$\int_{E_t} |f| d\mu = \int_0^{t_0} f^*(s)ds = \int_0^{t} f^*(s)ds$$

Además los conjuntos elegidos crecen con t, luego hemos acabado. $\square$

Ahora, vamos a establecer dos teoremas que caracterizarán los espacios resonantes y fuertemente resonantes.

Teorema 12. *Un espacio $\sigma-$finito (R, μ) es fuertemente resonante si y sólo si es un espacio de medida finita de alguno de los siguientes tipos:*

(i) no-atómico

(ii) completamente atómico con todos los átomos de igual medida.

Demostración. " $\Leftarrow$ " Si es del tipo (ii), la $\tilde{g}$ buscada se puede construir a partir de g permutando los finitos átomos con la inversa de la permutación que convierte f en f^* compuesta con la que convierte g en g^*. Así pues, resta ver el caso (i).
Sean $(g_n) \uparrow g$ c.t.p. no negativas y simples. Queremos construir $(\tilde{g_n}) \sim (g_n)$ y tal que

$$\int_R |f\tilde{g_n}|d\mu = \int_0^\infty f^*\tilde{g_n}dt$$

Claramente $\tilde{g} = \lim \tilde{g_n}$ es equimedible con g y entonces, aplicando el Teorema de la convergencia monótona, obtendríamos el resultado deseado:

$$\int_R |f\tilde{g}|d\mu = \lim \int_R |f\tilde{g_n}| = \lim \int_o^\infty f^*\tilde{g_n^*} = \lim \int_0^\infty f^*g_n^* = \int_0^\infty f^*g^*$$

Sólo queda construir las $\tilde{g_n}$. Fijamos $n \in \mathbb{N}$, sea $h = g_n$, como es una función simple, $h = \sum_{j=1}^m b_j\chi_{F_j}$, donde $F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_m$ y $b_j > 0$. Usando el Lema 5, sabemos que existe E_j tal que $E_1 \subset ... \subset E_m$ con $\mu(E_j) = \mu(F_j)$ y

$$\int_{E_j} fd\mu = \int_0^{\mu(F_j)} f^*dt$$

Si ponemos $\tilde{h} = \sum_{j=1}^m b_j\chi_{E_j}$, tenemos que $h^* = \sum_{j=1}^m b_j\chi_{[0,\mu(F_j))} = (\tilde{h})^*$. Por lo tanto

$$\int f\tilde{h}d\mu = \sum_{j=1}^m b_j \int_{E_j} fd\mu = \sum_{j=1}^m b_j \int_0^{\mu(E_j)} f^*(t)dt = \int_0^\infty f^*(t)h^*(t)dt$$

Por lo que basta tomar $\tilde{g_n} = \tilde{h}$. Además, como las g_n son crecientes, por el Lema 5, los E_j crecen. Se concluye por tanto que el espacio es fuertemente resonante.
" $\Rightarrow$ Hemos visto en un ejemplo, que si hay átomos, han de tener la misma medida. Por el mismo argumento, tampoco puede haber mezcla de atómico y no atómico. Que la medida tiene que ser finita se deduce con un razonamiento similar al del Ejemplo 3. Por lo tanto hemos acabado la demostración. □

Teorema 13. *Un espacio $\sigma-$finito (R, μ) es resonante si y sólo si es de alguno de los siguientes tipos:*

(i) no-atómico

(ii) completamente atómico con todos los átomos de igual medida.

Demostración. Que es condición necesaria viene resulta de los argumentos de la prueba del teorema anterior. Veamos que es condición suficiente.
Sean $f, g \in M_0, f, g \geq 0$. Queremos ver que

$$\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt = \sup \int_R |f\tilde{g}|d\mu$$

el supremo tomado sobre las $\tilde{g}$ equimedibles. Para ello, hay que ver que para cada α tal que $0 < \alpha < \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)$, $\exists \tilde{g} \sim g$ tal que $\alpha < \int_R f\tilde{g}d\mu$.
Como el espacio de medida es $\sigma-$finito, sabemos que existe una colección de $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\cup R_n = R$ y tienen medida finita.
Sean (f_n) y (g_n) sucesiones de funciones simples con f_n y g_n soportadas en R_n y tales que $f_n \uparrow f$ y $g_n \uparrow g$. Gracias a esto, podemos encontrar un $N \in \mathbb{N}$ verificando que $\alpha < \int_0^\infty f_N^* g_N^*$.
Ahora bien, el espacio R_N tiene medida finita, por lo tanto es fuertemente resonante, entonces existe un $h \sim g\chi_{R_N}$ tal que

$$\int_{R_N} fhd\mu = \int_0^{\mu(R_N)} (f\chi_{R_N})^*(g\chi_{R_N})^*dt$$

Pero $f\chi_{R_N} \geq f_N$ y $g\chi_{R_N} \geq g_N$. Por lo tanto, $\alpha < \int_{R_N} fhd\mu = \int_R fh$, extendiendo h por 0 fuera de R_N.
Sea $\tilde{g} = h\chi_{R_N} + g\chi_{R\setminus R_N}$. Entonces $\tilde{g}$ es equimedible con g y $\tilde{g} \geq h$. Entonces

$$\alpha < \int_R fhd\mu \leq \int_R f\tilde{g}d\mu$$

□

Corolario 2. *Un espacio $\sigma-$finito es fuertemente resonante si y sólo si es resonante y tiene medida finita.*

3.3. Una función maximal.

Cuando g es una función característica en un conjunto E de medida positiva t, la desigualdad de Hardy-Littlewood queda:

$$(*) \qquad \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f|d\mu \leq \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s)ds \qquad (f \in M_0)$$

Así, la media de $|f|$ sobre los conjuntos de medida t está dominada por la media de la reordenada decreciente en el intervalo $(0, t)$. Llamaremos al último término la función maximal de f^*.

Definición 10. Sea $f_0 \in M_0$, llamamos función maximal de f^* y denotamos con f^{**} a

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s)ds$$

Proposición 5. *Sean $f, g, f_n \in M_0, a \in \mathbb{K}$. Se tiene que f^{**} es no negativa, decreciente, y continua en $(0, \infty)$, además:*

(1) $f^{**} = 0 \Leftrightarrow f = 0$ *c.t.p.*

(2) $f^* \leq f^{**}$

(3) $|g| \leq |f|$ *en casi todo punto, entonces* $g^{**} \leq f^{**}$.

(4) $(af)^{**} = |a| f^{**}$

(5) $|f_n| \uparrow |f|$ *en casi todo punto, entonces* $f_n^{**} \uparrow f^{**}$

Demostración. Dado que f^* es decreciente, se sigue de la definición que f^{**} es no negativa y continua.
(3), (4), (5) y (1) salen de las propiedades ya vistas para f^*.
Para la propiedad (2), dado que f^* es decreciente, se tiene:

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s)ds \geq f^*(t) \frac{1}{t} \int_0^t ds = f^*(t)$$

Para ver que f^{**} es decreciente, observemos que, como f^* lo es, $f^*(v) \leq f^* \left(\frac{tv}{s}\right)$ si $0 < t \leq s$. Por lo tanto:

$$f^{**}(s) = \frac{1}{s} \int_0^s f^*(v)dv \leq \frac{1}{s} \int_0^s f^* \left(\frac{tv}{s}\right) dv = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(u)du = f^{**}(t)$$

□

En la desigualdad $(*)$ nos puede interesar conocer cuando la parte de la izquierda se aproxima mucho a la de la derecha. En la proposición que sigue vamos a ver que esto está relacionado con el ser resonante o fuertemente resonante.

Proposición 6. *Sea* (R, μ) *un espacio de medida* $\sigma-$*finito, y sea* $t > 0$ *en el rango de* μ. *Supongamos* $f \in M_0$. *Se verifica*

(a) Si (R, μ) *es resonante, entonces*

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \sup \left\{ \int_E |f| d\mu : \mu(E) = t \right\}$$

(b) Si (R, μ) *es fuertemente resonante, entonces existe un* $E \subset R$, $\mu(E) = t$ *tal que*

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_E |f| d\mu$$

Demostración. Dado que t está en el rango de μ, sabemos que existe $F \subset R$ tal que $\mu(F) = t$.
Sea $g = \chi_F, g^* = \chi_{[0,t)}$. Si tenemos ahora una $\tilde{g}$ equimedible con g entonces, $|\tilde{g}| = \chi_E$, con $\mu(E) = \mu(F) = t$.
Ahora, si el espacio es resonante, se tiene

$$\int_0^\infty f^* g^* = \sup \int_R |f \tilde{g}| d\mu \Rightarrow \int_0^t f^* = \sup_{\mu(E)=t} \int_E |f| d\mu.$$

Por lo tanto,

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \sup_{\mu(E)=t} \int_E |f| d\mu.$$

Si ahora el espacio es fuertemente resonante, como el supremo se alcanza en una $\tilde{g}$ particular y sabemos que esta es la característica de un conjunto medible de medida t, tenemos fijo el conjunto y el resultado queda probado. $\square$

Teorema 14. *Sea* (R, μ) $\sigma-$*finito,* $f, g \in M_0$. *Se verifica*

$$(f+g)^{**} \leq f^{**}(t) + g^{**}(t).$$

Demostración. Si el espacio es no-atómico, usando el Teorema 13, se tiene que es resonante.
Si además, $\mu(R) = \infty$, $Rg(\mu) = [0, \infty)$. Por lo tanto, usando la proposición anterior, tenemos el resultado para todo t.
Si ahora es no atómico de medida finita, digamos $\mu(R) = t_0$, usando el mismo argumento tenemos el resultado para todo $0 \leq t \leq t_0$. Pero sabemos que $f^*(t) = 0$ si $t > t_0$, por lo que

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^{t_0} f^*(s) ds = \frac{t_0}{t} f^{**}(t_0).$$

Como la desigualdad se cumple para t_0, resulta que

$$(f+g)^{**}(t) = \frac{t_0}{t}(f+g)^{**}(t_0) \leq \frac{t_0}{t} f^{**}(t_0) + \frac{t_0}{t} g^{**}(t_0) = f^{**}(t) + g^{**}(t).$$

Por lo tanto, hemos probado el resultado en el caso en el que el espacio es no-atómico. Para ver el resto de los casos, utilizamos el método de los retractos, que nos permite meter un espacio $\sigma-$finito en uno no-atómico. La idea de este método, se basa en convertir los átomos en intervalos de la misma medida y redefinir las funciones como constante, de valor el que tenía en el átomo, en los intervalos construidos. Una vez hecho esto, el resultado se sigue trivialmente. □

La siguiente relación es de interés en diversas situaciones.

Definición 11. Sean $f_1, f_2 \in M_0$. Se dirá que $f_1 \prec f_2$ (relación de Hardy-Littlewood-Pólya) si $f_1^{**} \leq f_2^{**}$

Proposición 7. *(Lema de Hardy) Sean ξ_1 y ξ_2 funciones no negativas, medibles en $(0, \infty)$ y supongamos que*

$$\int_0^t \xi_1(s)ds \leq \int_0^t \xi_2(s)ds, \text{ para todo } t > 0.$$

Sea η una función decreciente y no negativa en $(0, \infty)$. Entonces

$$\int_0^\infty \xi_1(s)\eta(s)ds \leq \int_0^\infty \xi_2(s)\eta(s)ds.$$

Demostración. Basta probarlo para una función simple decreciente $\eta(s) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{[0,t_j)}(s)$ con $a_j > 0$ y $0 < t_1 < ... < t_n$. Usando la hipótesis:

$$\int_0^\infty \xi_1(s)\eta(s)ds = \sum_{j=1}^n a_j \int_0^{t_j} \xi_1(s)ds \leq \sum_{j=1}^n a_j \int_0^{t_j} \xi_2(s)ds = \int_0^\infty \xi_2(s)\eta(s)ds.$$

□

Proposición 8. *Sea* (R, μ) *un espacio de medida resonante y sea* $(E_j)_{j \in J} \subset R$ *una sucesión finita o numerable de conjuntos disjuntos dos a dos con medida finita. Sea* $E = R \setminus \cup_{j \in J} E_j$. *Supongamos que* $f \in M_0$ *y que es integrable en cada* E_j. *Definimos*

$$Af = f\chi_E + \sum_{j \in J} \left(\frac{1}{\mu(E_j)} \int_{E_j} f d\mu \right) \chi_{E_j}.$$

Entonces, $Af \prec f$.

Demostración. Supongamos primero que se tiene sólo un elemento. Entonces $Af = f\chi_E + \left(\frac{1}{\mu(E_1)} \int_{E_1} f d\mu \right) \chi_{E_1}, 0 < \mu(E_1) < \infty$ y $E = R \setminus E_1$. Hay que ver que

$$\int_0^t (Af)^*(s) ds \leq \int_0^t f^*(s) ds, \quad \forall t > 0.$$

Supongamos primero que $0 < t < \infty$ y que existe $F \subset R, \quad \mu(F) = t$. Sea $t_0 = \mu(F \cap E_1)$

$$\int_F |Af| d\mu = \int_{F \cap E} |f| d\mu + t_0 \left| \frac{1}{\mu(E_1)} \int_{E_1} f d\mu \right|.$$

Por otro lado, usando la desigualdad de Hardy-Littlewood y que $(f\chi_{E_1})^{**}$ es decreciente, se obtiene

$$t_0 \left| \frac{1}{\mu(E_1)} \int_{E_1} f d\mu \right| \leq t_0 (f\chi_{E_1})^{**}(\mu(E_1)) \leq t_0 (f\chi_{E_1})^{**}(t_0) = \int_0^{t_0} (f\chi_{E_1})^*(s) ds.$$

Como el espacio es resonante, si nos restringimos a E_1, tenemos medida finita, por lo que el espacio es fuertemente resonante. Además, $t_0 \in Rg(\mu|_{E_1})$ ya que $\mu(f \cap E_1) = t_0$ por lo tanto, existe un $G \subset F \cap E_1, \mu(G) = t_0$ tal que

$$\int_0^{t_0} (f\chi_{E_1})^*(s) ds = \int_G |f\chi_{E_1}| d\mu = \int_G |f| d\mu.$$

Por lo tanto,

$$\int_F |Af| d\mu \leq \int_{F \cap E} |f| d\mu + \int_G |f| d\mu$$

Pero $F \cap E$ y G son disjuntos y $\mu((F \cap E) \cup G) = \mu(F \cap E) + \mu(G) = t$, entonces, aplicando la desigualdad de Hardy-Littlewood otra vez, es obtiene:

$$\int_F |Af| d\mu = \int_0^t f^*(s) ds$$

Basta tomar supremo sobre los conjuntos F de medida t para conseguir el resultado cuando t está en el rango de la medida. Pero esto basta para tenerlo en todo t, por ser el espacio resonante.
Si el cardinal de J es mayor que 1, pero finito, se aplica inducción: se tiene

que $A_n f$ (n sumandos) verifica que $A_n f \prec A_{n-1} f \prec ... \prec f$.
Si el cardinal de J es infinito numerable, como $|Af| \leq A(|f|)$, basta verlo para una f no negativa. En este caso,

$$f_n = f\chi_E + \sum_{m=1}^{n} f\chi_{E_m}$$

satisfacen que son positivas, crecen hacia f y además $0 \leq Af_n \uparrow Af$ en casi todo punto, por lo tanto

$$Af_n = A_n f_n \prec f_n \prec f$$

y aplicando la Proposición 5/(5) se sigue el resultado. □

3.4. Espacios invariantes por reordenamiento

En los espacios l_p^n, la norma $\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p}$ de un vector $(a_1, ..., a_n)$ depende de los valores de los a_i pero no del orden en el que estén colocados. En otras palabras, la norma de los l^p nos habla de si algo es "grande" o "pequeño" sin importar cómo está distribuido el vector en el espacio de medida.
Esta propiedad es la que vamos a estudiar ahora en espacios de Banach arbitrarios.

Definición 12. Una norma ρ sobre un espacio $\sigma-$finito (R, μ) se dice invariante por reordenamiento si $\rho(f) = \rho(g)$ para cualesquiera f, g equimedibles de M_0^+. En este caso, $X(\rho)$ se dice invariante por reordenamiento.

De esta definición ya se deduce que los L^p lo son.

Proposición 9. *Sea ρ invariante por reordenamiento sobre (R, μ) resonante. Entonces la norma asociada, ρ' es invariante por reordenamiento y además:*

$$\rho'(g) = \sup\left\{\int_0^\infty f^*(s)g^*(s)ds : \rho(f) \leq 1\right\} \qquad (g \in M_0^+)$$

$$\rho(f) = \sup\left\{\int_0^\infty f^*(s)g^*(s)ds : \rho'(g) \leq 1\right\} \qquad (f \in M_0^+)$$

Demostración. Por definición de la norma asociada, sabemos que

$$\rho'(g) = \sup \left\{ \int_R fg d\mu : \rho(f) \leq 1 \right\}.$$

Usando ahora la definición de espacio resonante, obtenemos que la igualdad anterior coincide con:

$$\rho'(g) = \sup \left\{ \int_0^\infty f^*(s) g^*(s) ds : \rho(f) \leq 1 \right\}.$$

Como dos funciones equimedibles tienen las mismas reordenadas decrecientes, tenemos que ρ' es invariante por reordenamiento.

Usando los mismos argumentos y que $\rho'' = \rho$ completamos la prueba. □

Corolario 3. *(Desigualdad de Hölder) Sea ρ invariante por reordenamiento. Si $f, g \in M_0^+$*

$$\int_R fg d\mu \leq \int_0^\infty f^*(s) g^*(s) ds \leq \rho(f)\rho'(g).$$

Todos estos resultados se pueden enunciar también en los espacios generados por éstos funcionales y sus respectivas normas.

Corolario 4. *Sea X un espacio de Banach funcional sobre un espacio de medida resonante. Entonces, X es invariante por reordenamiento si y sólo si X' lo es. En este caso:*

$$\|g\|_{X'} = \sup \left\{ \int_0^\infty f^*(s) g^*(s) ds : \|f\|_X \leq 1 \right\} \qquad (g \in X')$$

$$\|f\|_X = \sup \left\{ \int_0^\infty f^*(s) g^*(s) ds : \|g\|_{X'} \leq 1 \right\} \qquad (f \in X)$$

Corolario 5. *(Desigualdad de Hölder) Sea X espacio invariante por reordenamiento sobre un espacio de medida resonante (R, μ). Si $f \in X$ y $g \in X'$,*

$$\int_R |fg| d\mu \leq \int_0^\infty f^*(s) g^*(s) ds \leq \|f\|_X \|g\|_{X'}.$$

Teorema 15. *Sea* (R, μ) *un espacio resonante.* $f_1, f_2 \in M_0^+$*. Sea* ρ *invariante por reordenamiento sobre* (R, μ)*. Entonces,* $f_1 \prec f_2$ *implica* $\rho(f_1) \leq \rho(f_2)$*.*

Demostración. Gracias al corolario 4, hay que ver que

$$\int_0^\infty f_1^*(s)g^*(s)ds \leq \int_0^\infty f_2^*(s)g^*(s)ds, \quad \forall g, \rho'(g) \leq 1.$$

Pero sabemos por hipótesis que $\int_0^t f_1^* \leq \int_0^t f_2^*$. Como g^* es decreciente, basta utilizar el teorema de Hardy para deducir el resultado. $\square$

Corolario 6. *El resultado anterior también se puede formular utilizando el espacio* X *generado por* ρ*.*

A continuación, enunciamos un resultado importante acerca del operador A descrito anteriormente.

Teorema 16. *Sea* (R, μ) *un espacio de medida resonante y* $(E_j)_{j \in J} \subset R$ *un conjunto finito o numerable de conjuntos disjuntos dos a dos con medida finita. Sea* $E = R \setminus \cup_{j \in J} E_j$*. Supongamos que* $f \in M_0$ *y que es integrable en cada* E_j*. Definimos*

$$Af = f\chi_E + \sum_{j \in J} \left(\frac{1}{\mu(E_j)} \int_{E_j} f d\mu \right) \chi_{E_j}.$$

Entonces, A *es una contracción para cada* X *invariante por reordenamiento sobre* (R, μ)*, es decir,*

$$\|Af\|_X \leq \|f\| \text{ para todo } f \in X.$$

Demostración. Ya hemos visto (Proposición 8) que $Af \prec f$, así pues, basta usar el corolario anterior para concluir el resultado. $\square$

Teorema 17. *Sea* (R, μ) $\sigma-$*finito y* λ *una norma invariante por reordenamiento en* $(\mathbb{R}^+, m)$*. El funcional* $\underline{\lambda}$ *definido por* $\underline{\lambda}(f) = \lambda(f^*), f \in M_0^+$ *es una norma invariante por reordenamiento en* (R, μ)*.*

Demostración. La única propiedad de norma que no se deduce automáticamente de las propiedades de λ es la triangular. Sabemos que:

$$(f_1+f_2)^{**} \leq f_1^{**} + f_2^{**} = (f_1^* + f_2^*)^{**}.$$

Por lo tanto, $(f_1+f_2)^* \prec (f_1^*+f_2^*)$. Dado que $(\mathbb{R}^+, m)$ es resonante, podemos usar el Teorema 15 con λ y obtener:

$$\underline{\lambda}(f_1+f_2) = \lambda((f_1+f_2)^*) \leq \lambda(f_1^*+f_2^*) \leq \lambda(f_1^*) + \lambda(f_2^*) = \underline{\lambda}(f_1) + \underline{\lambda}(f_2).$$

□

El resultado que sigue muestra que cualquier norma invariante por reordenamiento sobre (R,μ) surge de este moso di (R,μ) es resonante.

Teorema 18. *(Teorema de representación de Luxemburg) Sea ρ una norma invariante por reordenamiento sobre el espacio de medida (R,μ). Entonces, existe $\bar{\rho}$ invariante por reordenamiento sobre $(\mathbb{R}^+, m)$ tal que*

$$\rho(f) = \bar{\rho}(f^*) \qquad f \in M_0^+$$

Además, si σ es invariante por reordenamiento en $(\mathbb{R}^+, m)$ y $\rho(f) = \sigma(f^*)$, para todo $f \in M_0^+$ se tiene que $\rho'(g) = \sigma'(g^*), g \in M_0^+$ donde ρ' es la norma asociada.

Demostración. Definamos $\bar{\rho}(h) = \sup\left\{\int_0^\infty g^* h^* ds : \rho'(g) \leq 1\right\},\ \ h \in M_0^+(\mathbb{R}^+, m)$
Claramente por lo visto en la Proposición 9, $\rho(f) = \bar{\rho}(f^*)$ Hay que ver que $\bar{\rho}$ es una norma en $(\mathbb{R}^+, m)$.
Para la propiedad triangular: Hemos visto que $(h_1+h_2)^* \prec h_1^* + h_2^*$ por lo tanto, $\bar{\rho}(h_1+h_2) \leq \bar{\rho}(h_1) + \bar{\rho}(h_2)$. se sigue usando la definición de $\bar{\rho}$ y el Lema de Hardy).
El resto de (P1) es trivial.
Para ver (P2), $0 \leq h_1 \leq h_2$ implica que $h_1^* \leq h_2^*$, luego $\bar{\rho}(h_1) \leq \bar{\rho}(h_2)$.
(P3) Sale análogamente usando el Teorema de la convergencia monótona.
(P4) Basta ver que $\bar{\rho}(\chi_[0,t)) < \infty, \forall t > 0$. Es claro que para $t \in Rg(\mu)$ se tiene ya que existe un subconjunto F de medida t tal que $\rho(\chi_F) < \infty$ y por lo tanto $\rho(\chi_F^* = \chi_{[0,t)}) < \infty$.
Usando la propiedad triangular, lo tenemos para cualquier múltiplo de t y ahora basta usar (P2) para tenerlo para cualquier t.
(P5) sigue el mismo argumento.
Sea ahora σ otra norma r.i. como en el enunciado. Dado que $(\mathbb{R}^+, m)$ es resonante, la norma asociada σ' es

$$\sigma'(k) = \sup\left\{\int_0^\infty h^*(s)k^*(s)ds : \sigma(h) \leq 1\right\}.$$

En particular, $\sigma'(g^*) = \sup\{\int_0^\infty g^*(s)h^*(s)ds : \sigma(h) \leq 1\}$, por lo tanto, $\rho'(g) \leq \sigma'(g^*)$

Para ver la otra desigualdad, sea H el conjunto de las funciones h simples no negativas, decrecientes en el intervalo $[0, \mu(R))$ y tal que $\sigma(h) \leq 1$. Como σ' tiene la propiedad de Fatou,

$$\sigma'(g^*) = \sup\left\{\int_0^\infty g^*(s)h^*(s)ds : h \in H\right\}.$$

Si (R, μ) es no-atómico, cada $h \in H$ es la reordenada decreciente de una función simple y habríamos acabado.

Si no es asi, volvemos a aplicar el argumento de cambiar cada átomo por un intervalo y alterar la función y sale de forma análoga. $\square$

4. Otras propiedades de los espacios invariantes por reordenamiento.

En este último capítulo mostramos más propiedades de los espacios invariantes por reordenamiento. Estudiamos la función fundamental, los espacios de Lorentz asociados a una función cóncava, los espacios $L^1 + L^\infty$ y $L^1 \cap L^\infty$, así como los índices de Boyd de un espacio invariante por reordenamiento.

4.1. La función fundamental

Lo que vamos a hacer ahora, es asociar a cada espacio r.i. una función, que llamaremos función fundamental. Queremos estudiar qué propiedades podemos conocer del espacio estudiando dicha función.

Definición 13. Sea X r.i. sobre (R, μ). Para cada t en el rango de μ, sea $E \subset R$, con $\mu(E) = t$. Entonces $\phi_X(t) = \|\chi_E\|_X$ es lo que llamamos función fundamental de X.
Sabemos que esta bien definida ya que si hay un $F \subset R$, con $\mu(F) = t$, entonces χ_E y χ_F son equimedibles y asi $\|\chi_E\|_X = \|\chi_F\|_X$.

Ejemplo 5. *Calculemos algunas funciones fundamentales. Supongamos $0 < t < \mu(R)$:*

$\phi_{L^p}(t) = t^{1/p}$, $\phi_{l_p}(n) = n^{1/p}$
$\phi_{L^\infty}(0) = 0$, $\phi_{l_\infty}(0) = 0$
$\phi_{L^\infty}(t) = 1$, $\phi_{l_\infty}(n) = 1$

Teorema 19. *Sea X r.i. en un espacio (R, μ) resonante y sea X' el espacio asociado de X. Entonces, $\phi_X(t)\phi_{X'}(t) = t, \quad \forall t \in Rg(\mu)$.*

Demostración. Si $t = 0$ ya está, dado que $\phi_X(0) = 0$ para cualquier X.
Sea, por tanto, $0 < t < \infty, t \in Rg(\mu)$, entonces, existe un $E \subset R$ de medida t. Se cumple:

$$t = \int_E d\mu \leq \|\chi_E\|_X \|\chi_E\|_{X'} = \phi_X(t)\phi_{X'}(t).$$

Hay que ver la otra desigualdad, para ello, observemos que:

$$\phi_X(t) = \|\chi_E\|_X = \sup \left\{ \int_E |g| d\mu : \|g\|_{X'} \leq 1 \right\}.$$

Tomamos cualquiera de estas g y sea $h = \left(\frac{1}{t} \int_E |g| d\mu \right) \chi_E$. Se tiene

$$\left(\frac{1}{t} \int_E |g| d\mu \right) \phi_{X'}(t) = \|h\|_{X'} \leq \|Ag\|_{X'} \leq \|g\|_{X'} \leq 1,$$

donde hemos usado el Teorema 16. Ahora basta tomar supremos para obtener el resultado. □

Corolario 7. *Sea X r.i. sobre (R, μ) resonante. ϕ_X satisface:*

(1) ϕ_X es creciente, $\phi_X(t) = 0$ si y sólo si $t = 0$.

(2) $\phi_X(t)/t$ es decreciente.

(3) ϕ_X es continua salvo quizás en el origen.

Demostración. (1) Sea $t \leq s$ y sean E, F conjuntos medibles tales que $\mu(E) = t$ y $\mu(F) = s$. Por la propiedad de retículo de X se tiene $\|\chi_E\|_X \leq \|\chi_F\|_X$ y así $\phi_X(t) \leq \phi_X(s)$.
Si $\phi_X(t) = 0 \Leftrightarrow \|\chi_E\|_X = 0 \Leftrightarrow \chi_E = 0$ en casi todo punto, por lo tanto $\mu(E) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

(2) Por el teorema anterior, $\phi_X(t)/t = 1/\phi_{X'}(t)$ y ahora, aplicando (1), tenemos que es decreciente.

(3) Si (R, μ) es atómico, ϕ_X está definida en un conjunto discreto, por lo tanto, es continua.
Si el espacio no es atómico, ϕ_X es creciente en $(0, \mu(R))$ por lo que como mucho tendrá discontinudades de salto. Supongamos que existe un t_0 en el que hay una discontinuidad de salto. Como ϕ_X es creciente, $\phi_X(t_0^-) < \phi_X(t_0^+)$ entonces,

$$\frac{\phi_X(t_0^-)}{t_0} < \frac{\phi_X(t_0^+)}{t}$$

pero esto no puede ser por (2).

□

Ahora, queremos estudiar qué ha de cumplir una función para poder ser función fundamental de un espacio. Para ello introducimos los siguientes conceptos.

Definición 14. Sea ϕ no negativa en $\mathbb{R}^+$. Se dice que es cuasicóncava si:

$$\phi(t) \text{ es creciente en } (0,\infty); \qquad \phi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

$$\phi(t)/t \text{ es decreciente en } (0,\infty).$$

Observación: Toda función no negativa y cóncava en $[0,\infty)$ que sólo se anula en el origen es cuasicóncava.

Definición 15. Sea ϕ cuasicóncava en $\mathbb{R}^+$. El espacio de Lorentz se define como

$$M_\phi = M_\phi(\mathbb{R}^+, m) = \left\{ f \in M_0 : \|f\|_{M_\phi} = \sup_{0<t<\infty} \{f^{**}(t)\phi(t)\} < \infty \right\}.$$

Proposición 10. *Si ϕ es cuasicóncava, el espacio de Lorentz asociado, M_ϕ es r.i. y $\phi_{M_\phi} = \phi$ es decir,la función fundamental del espacio, coincide con ϕ.*

Demostración. Las propiedades (P1), (P2), (P3) de la norma para el funcional

$$\rho(f) = \sup_{0<t<\infty} \{f^{**}(t)\phi(t)\}, \qquad f \in M_0^+$$

se siguen facilmente de las propiedades de f^{**}. Para la propiedad triangular hay que usar el Teorema 14.

Sabemos que M_ϕ es r.i. por estar definido en términos de f^*. Veamos la propiedad (P4): Sea $E \subset \mathbb{R}^+, m(E) = t$, por lo tanto $\chi_E^* = \chi_{[0,t)}$ y entonces

$$\begin{aligned} \|\chi_E\|_{M_\phi} &= \sup_{0<s<\infty} \left\{ \chi_{(0,t)}^{**}(s)\phi(s) \right\} = \sup_{0<s<\infty} \left\{ \text{mín}\left(1, \frac{t}{s}\right)\phi(s) \right\} \\ &= \text{máx}\left\{ \sup_{0<s<t} \phi(s), t \sup_{t \le s \le \infty} \frac{\phi(s)}{s} \right\} = \phi(t). \end{aligned}$$

ya que ϕ crece y $\phi(s)/s$ decrece y como $\phi(t) < \infty$, hemos acabado con la (P4) y además hemos probado que la función fundamenta coincide con ϕ. Ahora veamos (P5). Si $f \in M_\phi$ y $E \subset \mathbb{R}^+, m(E) = t$

$$\left|\int_E f(x)dx\right| \leq \int_0^t f^*(s)ds \leq \frac{t}{\phi(t)} \sup_{0<s<\infty} \{f^{**}(s)\phi(s)\} = C_t \|f\|_{M_\phi}.$$

□

El siguiente resultado demuestra que, de hecho, el espacio de Lorentz M_ϕ es el más grande con función fundamental ϕ.

Proposición 11. *Sea X r.i. en $(\mathbb{R}^+, m)$. Entonces, $X \hookrightarrow M_{\phi_X}$ con norma 1, es decir,*

$$\|f\|_{M_{\phi_X}} \leq \|f\|_X \text{ para toda } f \in X$$

Demostración. Sea $t > 0$, usando la desigualdad de Hölder

$$\int_0^t f^*(s)ds \leq \|\chi_{[0,t)}\|_{X'}\|f\|_X = \phi_{X'}(t)\|f\|_X = \frac{t}{\phi_X(t)}\|f\|_X$$

Por lo tanto

$$f^{**}(t)\phi_X(t) \leq \|f\|_X$$

Y queda probado el resultado. □

Ya tenemos el espacio más grande para una función fundamental dada. Para buscar el más pequeño, tenemos que profundizar en la teoría de funciones cóncavas y cuasicóncavas.

Definición 16. Denotaremos por $\tilde{\phi}$ a la mínima función cóncava mayorante de ϕ. Esto es, la función cóncava más pequeña que es más grande que ϕ.

Proposición 12. *Si ϕ es cuasicóncava, $\tilde{\phi}$ verifica*

$$\frac{1}{2}\tilde{\phi} \leq \phi \leq \tilde{\phi}.$$

Demostración. De la definición de cuasicóncava se deduce que $\phi(t) \leq (1 + \frac{t}{x})\phi(x)$. Por lo tanto, ϕ está dominada por la función cóncava $\psi(t) = (1 + \frac{t}{x})\phi(x)$, luego $\tilde{\phi}(t) \leq \psi(t)$. En particular, si $t = x$, $\tilde{\phi}(x) \leq \psi(x) = 2\phi(x)$. Con todo esto, concluimos que $\frac{1}{2}\tilde{\phi} \leq \phi \leq \tilde{\phi}$. □

Proposición 13. *Sea X r.i. sobre $(\mathbb{R}^+, m)$. Entonces X puede ser renormado con una norma r.i. tal que la función fundamental sea cóncava.*

Demostración. Sabemos que ϕ_X es cuasicóncava. Por la proposición anterior, $\tilde{\phi}$ verifica que $\frac{1}{2}\tilde{\phi} \leq \phi \leq \tilde{\phi}$.
Sea $M_{\tilde{\phi}}$ el espacio de Lorentz asociado a la función mayorante y sea

$$v(f) = \text{máx}\{\|f\|_X, \|f\|_{M_{\tilde{\phi}}}\} \quad f \in M_0(\mathbb{R}^+)$$

Dado que tanto X como $M_{\tilde{\phi}}$ son r.i., la norma v también es r.i. Además,

$$\|f\|_X \leq v(f) \leq \text{máx}\{\|f\|_X, 2\|f\|_{M_\phi}\} \leq 2\|f\|_X.$$

donde hemos usado la Proposición 11 y la 12, obteniendo $\|\cdot\|_X \sim v$.
También,

$$v(\chi_{(0,t)}) = \text{máx}\{\|\chi_{(0,t)}\|_X = \phi(t), \tilde{\phi}(t)\} = \tilde{\phi}(t).$$

Por lo tanto, $X = X(v)$ y tiene como función fundamental $\tilde{\phi}$ que es cóncava. □

Definición 17. Sea X r.i. en $(\mathbb{R}^+, m)$ y supongamos que X está renormado como en la proposición anterior tal que ϕ_X es cóncava. Los espacios de Lorentz $\Lambda(X)$ y $M(X)$ se definen:

$$M(X) = M_{\phi_X} : \|f\|_{M(X)} = \sup_{0<t<\infty} \{f^{**}(t)\phi_X(t)\}.$$

$$\Lambda(X) = \left\{ f \in M_0^+ : \|f\|_{\Lambda(X)} = \int_0^\infty f^*(s) d\phi_X(s) < \infty \right\}.$$

La integral en la norma de $\|f\|_{\Lambda(X)}$ se puede reescribir en la forma

$$\|f\|_\infty \phi_X(0^+) + \int_0^\infty f^*(s)\psi_X(s)ds$$

donde ψ_X es una función no-negativa y decreciente. La llamaremos, función derivada de ϕ.

Teorema 20. *Sea X un espacio funcional de Banach r.i. sobre $(\mathbb{R}^+, m)$. Supongamos que, de nuevo, ha sido renormado para que tenga una función fundamenta cóncava. Entonces $\Lambda(X)$ y $M(X)$ son r.i. y cada uno tiene como función fundamental ϕ_X. Además:*

$$\Lambda(X) \hookrightarrow X \hookrightarrow M(X)$$

y ambas inclusiones son de norma 1.

Demostración. Para $M(X)$ el resultado está visto en las Proposiciones 10 y 11.
Las propiedades (P1)-(P3) de la norma en $\Lambda(X)$ se obtienen fácilmente. Para la triangular, basta ver que $(f+g)^* \prec f^* + g^*$ y como ϕ_X es cóncava, su derivada, ψ_X es no negativa y decreciente (por el Lema de Hardy), entonces

$$\|f+g\|_{\Lambda(X)} = \int_0^\infty (f+g)^*\psi_X \leq \int_0^\infty f^*\psi_X + \int_0^\infty g^*\psi_X = \|f\|_{\Lambda(X)} + \|g\|_{\Lambda(X)}.$$

Para ver (P4), sea E con medida $t > 0$, por lo tanto

$$\|\chi_E\|_{\Lambda(X)} = \int_0^\infty \chi_{[0,t)}(s) d\phi_X(s) = \phi_X(t).$$

Con esto hemos obtenido (P4) y además, que $\phi_{\Lambda(X)} = \phi_X$.
(P5) se va a deducir de la inclusión primera. Por lo tanto, veamos esto. Por el Lema de Fatou y dado que ambas normas son r.i. basta verlo para funciones simples decrecientes. En ese caso $f = f^*$:

$$f^* = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{(0,t_k)}, c_k > 0 \text{ y } 0 < t_1 < ... < t_n.$$

Se tiene que

$$\|f\|_X \leq \sum_{k=1}^n c_k \|\chi_{(0,t_k)}\|_X = \sum_{k=1}^n c_k \phi_X(t_k) = \int_0^\infty f^*(s) d\phi_X(s) = \|f\|_{\Lambda(X)}.$$

Con esto, concluimos la prueba. □

Corolario 8. *Si X es r.i. sobre $(\mathbb{R}^+, m)$ con función fundamental cóncava ϕ_X, se verifica que $\Lambda(X)$ y $M(X)$ son el más pequeño y el más grande de todos los espacios con la misma función fundamental.*

4.2. Los espacios $L^1 + L^\infty$ y $L^1 \cap L^\infty$.

Podemos construir más ejemplos de espacios r.i. sin más que hacer intersecciones y sumas de espacios L^p. En este apartado estudiaremos los espacios $L^1 + L^\infty$ y $L^1 \cap L^\infty$ que además son particularmente importantes dado que como veremos, son el más grande y el más pequeño de los espacios r.i.

Definición 18. Sea (R, μ) un espacio $\sigma-$finito.

(a) Se define $L^1 + L^\infty = \{f = g + h \in M_0 : g \in L^1, h \in L^\infty\}$. Ponemos

$$\|f\|_{L^1+L^\infty} = \inf_{f=g+h} \{\|g\|_{L^1} + \|h\|_{L^\infty}\}.$$

(b) El espacio $L^1 \cap L^\infty$ se dota de la siguiente norma

$$\|f\|_{L^1\cap L^\infty} = \max\{\|f\|_{L^1}, \|f\|_{L^\infty}\}.$$

Esta norma puede describirse también de la siguiente forma

$$\|f\|_{L^1\cap L^\infty} = \sup_{0<t<\infty} \frac{\int_0^t f^*(s)ds}{\min(1,t)} = \sup_{0<t<\infty} (f^{**}(t) \max(1,t)).$$

En algunas ocasiones, es útil disponer de otra descripción de la norma de $L^1 + L^\infty$.

Teorema 21. *Sea (R, μ) $\sigma-$finito y sea $f \in M_0$. Entonces:*

$$\inf_{f=g+h} \{\|g\|_{L^1} + t\|h\|_{L^\infty}\} = \int_0^t f^*(s)ds = tf^{**}(t), \quad \forall t > 0.$$

Demostración. La segunda desigualdad es trivial teniendo en cuenta la definición de f^{**}.
Sea ahora $f \in M_0, \quad t > 0$. Llamamos $\alpha_t = \inf\{\|g\|_{L^1} + t\|h\|_{L^\infty}\}$. Veamos primero que

$$\int_0^\infty f^*(s)ds \leq \alpha_t.$$

Sea $f \in L^1 + L^\infty, f = g + h$, por lo tanto

$$\int_0^t f^*(s)ds \leq \int_0^t g^*(s)ds + \int_0^t h^*(s)ds \leq \|g\|_{L^1} + t\|h\|_{L^\infty}.$$

y esa desigualdad queda vista.
Veamos la recíproca. Basta ver que existen $g \in L^1, h \in L^\infty, f = g + h$ tales que:

$$\|g\|_{L^1} + t\|f\|_{L^\infty} \leq \int_0^t f^*(s)ds.$$

Podemos suponer que el lado derecho es finito. Por la desigualdad de Hardy-Littlewood, f es integrable en cualquier conjunto de medida a lo más t. Sea $E = \{x : |f(x)| > f^*(t)\}$ y sea $t_0 = \mu(E)$. Por las propiedades de f^* se tiene que $t_0 \leq t$ por lo tanto f es integrable en E. En particular

$$g(x) = \text{máx}\{|f(x)| - f^*(t), 0\} \cdot sgn(f(x)) \text{ pertenece a } L^1(\mu)$$

y

$$h(x) = \text{mín}\{|f(x)|, f^*(t)\} \cdot sgn(f(x)) \text{ a } L^\infty$$

con norma $\|h\|_\infty \leq f^*(t)$. Por lo tanto:

$$\|g\|_{L^1} = \int_E |f|d\mu - \mu(E)f^*(t) \leq \int_0^{t_0} f^*(s) - t_0 f^*(t).$$

Luego

$$\|g\|_{L^1} + t\|h\|_{L^\infty} \leq \int_0^{t_0} f^*(s)ds + (t - t_0)f^*(t).$$

Pero $f^*(s)$ es constantemente igual a $f^*(t)$ siempre que $t_0 < s < t$. Por lo tanto

$$\|g\|_{L^1} + t\|h\|_{L^\infty} \leq \int_0^t f^*(s)ds$$

y hemos acabado, ya que $f = g + h$. □

Se puede probar también que:

Teorema 22. *Los espacios $L^1 + L^\infty$ y $L^1 \cap L^\infty$ sobre espacios de medida resonantes (R, μ) son r.i. y las normas vienen dadas por:*

$$\|f\|_{L^1+L^\infty} = \int_0^1 f^*(s)ds$$

$$\|f\|_{L^1\cap L^\infty} = \sup_t \frac{\int_0^t f^*(s)ds}{\text{mín}(1, t)}$$

Además $(L^1 + L^\infty)' = L^1 \cap L^\infty$ y $(L^1 \cap L^\infty)' = L^1 + L^\infty$.

Como consecuencia de esto resulta que:

Corolario 9. *Las funciones fundamentales de estos espacios son:*

$$\phi_{L^1+L^\infty}(t) = \min(1,t)$$
$$\phi_{L^1\cap L^\infty}(t) = \max(1,t)$$

Teorema 23. *Sea X un espacio de Banach funcional r.i. Se tiene que*

$$L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow X \hookrightarrow L^1 + L^\infty$$

y las inclusiones son de norma 1 si se cambia la norma de X por una que es múltiplo de ella.

Demostración. Por el Teorema de Luxemburg y las representaciones de las normas, basta verlo en el espacio $(\mathbb{R}^+, m)$. Usando la desigualdad de Hölder, se tiene que:

$$\|f\|_{L^1+L^\infty} = \int_0^1 f^*(s)ds \leq \|\chi_{[0,1]}\|_{X'}\|f\|_X = \phi_{X'}(1)\|f\|_X$$

Por lo tanto, $X \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ con norma a lo sumo $\phi_{X'}(1)$. Además, si tomamos $f = \chi_{[0,1]}$,

$$\int_0^1 \chi[0,1](s)ds \leq \phi_{X'}(1)\phi_X(1) \leq 1.$$

Por lo tanto, ya sabemos que la norma es exactamente $\phi_{X'}(1)$.
Intercambiando los papeles de X y X' se tiene que $X' \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ con norma $\phi_X(1)$, por lo tanto, pasando a los asociados:

$$L^1 \cap L^\infty = (L^1 + L^\infty)' \hookrightarrow X \text{ y } \|f\|_X \leq \phi_X(1)\|f\|_{L^1\cap L^\infty}.$$

Basta renormar el espacio, pasar de $\|\cdot\|_X$ por $\phi_{X'}(1)\|\cdot\|_X$ para que cada una de las inclusiones tenga norma 1. $\square$

Corolario 10. *Sea X r.i. sobre (R,μ) finito, entonces Ł$^\infty \hookrightarrow X \hookrightarrow L^1$. Además, si $\mu(R) = 1$ y $\|1\|_X = 1$ las inclusiones son de norma 1.*

Corolario 11. *Sea (R,μ) completamente atómico, de átomos numerables con medida α. Si X es un espacio r.i. sobre (R,μ), entonces*

$$l^1 \hookrightarrow X \hookrightarrow l^\infty$$

Además, si $\alpha = 1$ y la norma en X de la función característica de un átomo es 1, entonces las dos inclusiones son de norma 1.

4.3. Índices de Boyd

Estos índices fueron introducidos por primera vez por Boyd en 1969. Surgieron para demostrar resultados de interpolación en espacios invariantes por reordenamiento entre L^{p_1} y L^{p_2}.
Si tenemos un operador T acotado en L^{p_1} y L^{p_2} y un espacio X invariante por reordenamiento entre ellos, en el sentido de que contiene a L^{p_1} y está contenido en L^{p_2}, los índices de Boyd ayudan a ver si T es también acotado en X.
Sin embargo, este resultado se escapa de los límites de este trabajo, pero merece la pena mencionarlo como motivación para esta sección, en la que introduciremos las definiciones de los índices y sus propiedades fundamentales.

Veamos antes unos conceptos previos.

Definición 19. Una función real $\omega : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ es subaditiva si para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $\omega(s+t) \leq \omega(s) + \omega(t)$.

Lema 6. *Sea ω creciente y subaditiva en $(-\infty, \infty)$ tal que $\omega(0) = 0$, entonces $-\omega(-s) \leq \omega(s)$. Además*

$$\frac{\omega(s)}{s} \to \alpha > 0, s \to \infty \quad y \quad \alpha = \lim_{s\to\infty} \frac{\omega(s)}{s} = \inf_{s>0} \frac{\omega(s)}{s}.$$

Demostración. Por ser subaditiva, sabemos que $0 = \omega(0) = \omega(s + (-s)) \leq \omega(s) + \omega(-s) \Rightarrow -\omega(-s) \leq \omega(s)$.
Sea $\alpha = \inf_{s>0} \frac{\omega(s)}{s}$. Es claro que $0 \leq \alpha \leq \omega(1)$, en particular, $\alpha < \infty$.
Sea $\epsilon > 0$, sea $t > 0$ tal que

$$\alpha \leq \frac{\omega(t)}{t} < \alpha + \epsilon.$$

Elegimos un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left(1 + \frac{1}{N}\right) \frac{\omega(t)}{t} < \alpha + \epsilon$.
Para cada $s \geq Nt$, $\exists n \geq N$ tal que $nt \leq s < (n+1)t$. Como ω es creciente y subaditiva, tenemos que $\omega(s) \leq (n+1)\omega(t)$, entonces

$$\frac{\omega(s)}{s} \leq \frac{(n+1)\omega(t)}{nt} \leq \left(1 + \frac{1}{N}\right) \frac{\omega(t)}{t} < \alpha + \epsilon$$

y con esto queda probado el resultado. □

Definición 20. Una función no-negativa ψ en $(0,\infty)$ se dice submultiplicativa si

$$\psi(st) \leq \psi(s)\psi(t) \qquad (0 < s, t < \infty)$$

A cada ψ submultiplicativa, podemos asociarle una ω en $(-\infty,\infty)$ definida por $\omega(s) = \log\psi(e^s)$.
Claramente, ω es subaditiva. Si ψ es creciente y $\psi(1) = 1$, entonces ω verifica las hipótesis del lema anterior sea $\alpha = \text{ínf}_{s>0} \frac{\omega(s)}{s}$. Entonces, si llamamos $\bar{\alpha}(\psi) = \alpha$ se verifica que $0 \leq \bar{\alpha} < \infty$ y

$$\bar{\alpha}(\psi) = \lim_{t\to 0} \frac{\log(\psi(t))}{\log t} = \inf_{t>1} \frac{\log\psi(t)}{\log t}.$$

Lema 7. *Sea ψ creciente y submultiplicativa en $(0,\infty)$ para la que $\psi(1) = 1$. Sea a un real positivo. Se verifica que*

$$\bar{\alpha}(\psi) < a \Leftrightarrow \int_1^\infty t^{-a}\psi(t)\frac{dt}{t} < \infty.$$

Demostración. Si $\bar{\alpha}(\psi) < a$, entonces existe un $\epsilon > 0$ de manera que $\bar{\alpha}(\psi) < a - \epsilon$. Por la definición de $\bar{\alpha}$ se tiene que existe un $T > 1$ tal que

$$\frac{\log\psi(t)}{\log t} < a - \epsilon \qquad \forall t \geq T.$$

Por lo tanto, $\psi(t) < t^{a-\epsilon}, \forall t \geq T$. Luego

$$\int_1^\infty t^{-a}\psi(t)\frac{dt}{t} \leq \psi(T)\int_1^T t^{-1-a}dt + \int_T^\infty t^{-1-\epsilon}dt < \infty.$$

Recíprocamente, si $\int_1^\infty t^{-a}\psi(t)\frac{dt}{t} < \infty$, entonces $s^{-a}\psi(s) < 1$ para cierto $s > 1$. Por lo que:

$$\bar{\alpha}(\psi) \leq \frac{\log\psi(s)}{\log(s)} < \frac{\log(s^a)}{\log(s)} = a.$$

y hemos terminado. $\square$

A partir de ahora llamaremos X a un espacio funcional de Banach r.i. sobre un espacio de medida infinito, no atómico y $\sigma-$finito.
En este caso, el teorema de Luxemburg nos da una norma funcional $\bar{\rho}$ r.i. sobre $(\mathbb{R}^+, m)$, que definimos en la demostración del teorema, y podemos trabajar con el espacio generado por esta nueva norma en vez de con X. Lo denotamos $\bar{X}$.

Definición 21. Para todo $t > 0$, sea E_t el operador dilatador, es decir, $(E_t f)(s) = f(st)$. Definimos $h_X(t) = \|E_{1/t}\|_{B(\bar{X})}$, donde $B(\bar{X})$ denota los operadores acotados de $\bar{X}$ en $\bar{X}$.

Para justificar la anterior definición de h_X, tenemos que demostrar que E_t es acotado de $\bar{X}$ en $\bar{X}$.

Proposición 14. *Para todo $t > 0$, E_t es acotado de $\bar{X}$ en $\bar{X}$. La función h_X es creciente y submultiplicativa en $(0, \infty), h_X(1) = 1$ y*

$$h_X(t) \leq \text{máx}(1, t).$$

Además, si X' el espacio asociado de X, $h_X(t) = t h_{X'}\left(\frac{1}{t}\right), 0 < t < \infty$.

Demostración. $E_{1/t}$ es una contracción en $L^\infty(\mathbb{R}^+, m)$ y, como

$$\int_0^\infty |E_{1/t}(f)(s)| ds = \int_0^\infty |f(s/t)| ds = t \int_0^\infty f(v) dv.$$

Por lo tanto, $E_{1/t}$ es acotado en $L^1(\mathbb{R}^+, m)$ con norma t. Aplicando ahora el Teorema de interpolación dado en [1, Chapter 3, Thm. 2.2], resulta que $E_{1/t}$ es acotado en $\bar{X}$ con norma menor o igual que el $\text{máx}(1, t)$.
$h_X(1) = 1$ trivialmente, ya que E_1 es la identidad.
Es fácil ver que $(E_t f)^* = E_t f^*$, entonces

$$\|E_{1/t} f\|_{\bar{X}} = \sup \left\{ \int_0^\infty f^*\left(\frac{s}{t}\right) g^*(s) ds : \|g\|_{\bar{X}'} \leq 1 \right\}$$

para cualquier $f \in \bar{X}$. Tenemos por tanto, que h_X es creciente en t. También h_X es submultiplicativa ya que $E_{st} = E_s E_t$. Además, mediante un cambio de variable en la expresión anterior

$$\|E_{1/t} f\|_{\bar{X}} \leq t \|f\|_{\bar{X}} \|E_t g\|_{\bar{X}'} \leq t \|f\|_{\bar{X}} h_{X'}\left(\frac{1}{t}\right).$$

Entonces, $h_X(t) \leq t h_{X'}(1/t)$. Ahora, cambiando X por X', t por $1/t$ y usando que $X = X''$ se obtiene $h_{X'}(1/t) \leq 1/t h_X(t)$ y se concluye la igualdad. □

Definición 22. Sea X un espacio funcional de Banach r.i. sobre un espacio de medida infinito, sin átomos y $\sigma-$finito. Los índices de Boyd de X son los números $\underline{\alpha}_X$ y $\bar{\alpha}_X$ definidos mediante

$$\underline{\alpha}_X = \sup_{0<t<1} \frac{\log h_X(t)}{\log t} \qquad \bar{\alpha}_X = \inf_{t>1} \frac{\log h_X(t)}{\log t}$$

Proposición 15. *Los índices $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_X$ y $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_X$ de X vienen dado por los límites:*

$$\underline{\alpha}_X = \lim_{t\to 0^+} \frac{\log h_X(t)}{\log t}, \qquad \bar{\alpha}_X = \lim_{t\to\infty} \frac{\log h_X(t)}{\log t}$$

y satisfacen $0 \leq \underline{\alpha} \leq \bar{\alpha} \leq 1$.
Además los índices $\underline{\alpha}' = \underline{\alpha}_{X'}$ y $\bar{\alpha}' = \bar{\alpha}_{X'}$ del espacio asociado vienen dados por

$$\underline{\alpha}' = 1 - \bar{\alpha}, \qquad \bar{\alpha}' = 1 - \underline{\alpha}$$

Demostración. La identidad $h_X(t) = th_{X'}(1/t)$ implica:

$$\frac{\log h_X(t)}{\log t} = 1 - \frac{\log h_{X'}(1/t)}{\log(1/t)}.$$

Por lo tanto $\underline{\alpha}' = 1 - \bar{\alpha}, \bar{\alpha}' = 1 - \underline{\alpha}$.
Las propiedades de h_X vistas en la Proposición 14 y la propia definición, demuestran que

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(h_X) = \lim_{t\to\infty} \frac{\log h_X(t)}{\log t}.$$

Usando lo que sabemos de éste índice y las relaciones entre los asociados, sacamos también la definición a través del límite para $\underline{\alpha}$.
Que $\bar{\alpha} \leq 1$ sale de que $h_X(t) \leq \max(1,t)$. Aplicándolo a X' se obtiene que $\underline{\alpha} = 1 - \bar{\alpha}' \geq 0$. Dicho esto, basta ver que $\underline{\alpha} \leq \bar{\alpha}$.
Como h_X es submultiplicativa: $1 = h_X(1) \leq h_X(t)h_X(1/t), \forall t > 1$. Luego

$$\frac{\log h_X(1/t)}{\log(1/t)} = \frac{\log(1/h_X(1/t))}{\log t} \leq \frac{\log h_X(t)}{\log t}.$$

Ahora, si $t \to \infty$, el miembro de la izquierda tiende a $\underline{\alpha}$, el de la derecha a $\bar{\alpha}$ y hemos acabado. □

Definición 23. Para $0 < a \leq 1$ definimos el siguiente operador en $M_0(\mathbb{R}^+, m)$.

$$(P_a f)(t) = t^{-a} \int_0^t s^a f(s) \frac{ds}{s}, \quad 0 < t < \infty.$$

De forma análoga y para $0 \leq a < 1$, definimos

$$(Q_a f)(t) = t^{-a} \int_t^\infty s^a f(s) \frac{ds}{s}, \quad 0 < t < \infty.$$

Hacemos notar que Q_b es el operador adjunto de P_a cuando $a + b = 1$, por lo tanto:

$$\int_0^\infty (P_a f)(t) g(t) dt = \int_0^\infty f(t)(Q_b g)(t) dt.$$

Teorema 24. *Se verifica:*

(a) El operador P_a es acotado en $\bar{X}$ si y sólo si $a > \bar{\alpha}_X$.

(b) Q_a es acotado en $\bar{X}$ si y solo si $a < \underline{\alpha}_X$.

Demostración. Supongamos P_a acotado en $\bar{X}$. Sean $f \in \bar{X}$ y $g \in \bar{X}'$ tales que $\|f\|_{\bar{X}} \leq 1$ y $\|g\|_{\bar{X}'} \leq 1$.
Se tiene que

$$\int_0^\infty f^* \left(\frac{s}{t}\right) g^*(s) ds$$

decrece con t, por lo tanto, para cada $t > 0$ fijo, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f^* \left(\frac{s}{t}\right) g^*(s) ds &= at^a \left(\int_0^{1/t} u^{a-1} du\right) \left(\int_0^\infty f^* \left(\frac{s}{t}\right) g^*(s) ds\right) \\
&\leq at^a \int_0^{1/t} \left(\int_0^\infty f^*(su) g^*(s) ds\right) u^{a-1} du \\
&= at^a \int_0^\infty g^*(s) \left(\int_0^{1/t} f^*(su) u^a \frac{du}{u}\right) ds.
\end{aligned}$$

Si $t > 1$ podemos cambiar los límites de integración de la integral de dentro por el $[0, 1]$ y mediante un cambio de variable, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f^* \left(\frac{s}{t}\right) g^*(s) ds &\leq at^a \int_0^\infty g^*(s) \left(s^{-a} \int_0^s f^*(v) v^a \frac{dv}{v}\right) \\
&= at^a \int_0^\infty g^*(s)(P_a f^*)(s) ds \\
&\leq at^a \|P_a\|_{B(\bar{X})}.
\end{aligned}$$

Tomando supremos en f y g en las condiciones descritas anteriormente,

$$h_X(t) = \|E_{1/t}\|_{B(\bar{X})} \leq at^a \|P_a\|_{B(\bar{X})} \qquad t > 1.$$

Por lo tanto, obtenemos

$$\frac{\log h_X(t)}{\log(t)} \leq a + \frac{\log(a\|P_a\|)}{\log t}$$

y haciendo tender t a infinito, obtenemos $\bar{\alpha}_X \leq a$.
Hemos probado entonces que $\|P_a\| = \|P_a\|_{B(\bar{X})} < \infty$ implica que $a \geq \bar{\alpha}_X$.
Tenemos que ver que la desigualdad es estricta. Sea $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon\|P_a\| < 1$.
Entonces el operador $I - \epsilon P_a$ es acotado e invertible y

$$(I - \epsilon P_a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n P_a^n.$$

El operador $T = P_a(I - \epsilon P_a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n P_a^{n+1}$ es acotado también.
Además, puede verse por inducción que

$$(P_a^{n+1} f)(t) = \int_0^1 f(st) \frac{(\log 1/s)^n}{n!} s^{a-1} ds.$$

Por lo tanto, usando el teorema de Beppo Levi, tenemos, para funciones no negativas de $\bar{X}$ que

$$(Tf)(t) = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\epsilon \log(1/s))^n}{n!} \right) f(st) s^{a-1} ds = \int_0^1 f(st) s^{a-\epsilon-1} ds.$$

Partiendo cada función de $\bar{X}$ en su parte positiva y negativa, podemos obtener el resultado para toda función de $\bar{X}$. Así $T = P_{a-\epsilon}$. Dado que T es acotado, usando el mismo argumento de antes, deducimos que $a - \epsilon \geq \bar{\alpha}_X$. Y por lo tanto $a > \bar{\alpha}_X$ como queríamos.

Veamos ahora el reciproco, supongamos que $a > \bar{\alpha}_X$. El Lema 8 nos dice que

$$\int_0^1 \|E_s\|_{B(\bar{X})} s^{a-1} ds = \int_1^{\infty} t^{-a} h_X(t) \frac{dt}{t} < \infty.$$

Por lo tanto, si tomamos f y g como antes

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\infty} (P_a f)(t) g(t) dt \right| &\leq \int_0^{\infty} \left(\int_0^1 |f(st)| s^{a-1} ds \right) |g(t)| dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{\infty} |f(st) g(t)| dt \right) s^{a-1} ds \\ &\leq \int_0^1 \|E_s\|_{B(X)} s^{a-1} ds \end{aligned}$$

Usando lo que hemos visto sobre esta última integral y tomando supremos sobre las f y g sujetas a esas condiciones, deducimos que P_a es acotado en $\bar{X}$. Por lo tanto, la parte (a) queda probada.
Ahora si $0 \leq a < 1$, usando que Q_a es el adjunto de P_a, se tiene que Q_a es acotado en $\bar{X}$ si y sólo si P_{1-a} es acotado en $\bar{X}'$. Por el apartado (a), esto ocurre si y sólo si $1 - a > \bar{\alpha}_{X'}$. Pero $\bar{\alpha}_{X'} = 1 - \underline{\alpha}_X$, por lo tanto Q_a es acotado en $\bar{X}$ si y sólo si $a < \underline{\alpha}_X$ y el teorema queda probado. $\square$

Referencias

[1] C. Bennet and R. Sharpley, *Interpolation of Operators.* Academic Press, Boston, 1988

[2] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation Spaces. An Introduction.* Springer, Berlin, 1976

[3] D. E. Edmunds and H. Triebel, *Function Spaces, Entropy Numbers, Differential Operators.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.

[4] H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators.* North-Holland, Amsterdam, 1978.