VARIABLE COMPLEJA Y ANÁLISIS FUNCIONAL

(Curso 2001-2002)

HOJA 5

Ejercicio 1. *Calcula:*

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2} dx \quad (a, b > 0)$;

Solución:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2} dx = Re \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+b^2} dx$$

La integral que estamos considerando es convergente en toda la recta real porque $x^2 + b^2 \neq 0$ (x es una variable real) y el integrando es una función continua y está acotada por:

$$\left| \frac{\cos ax}{x^2+b^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

siendo $\frac{1}{x^2}$ una función integrable cuando x tiende hacia $-\infty$ y hacia ∞.

Tomamos la función de variable compleja:

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}$$

y se toma el semidisco D_R del semiplano superior acotado por el intervalo $[-R, R]$ en el eje real y la semicircunferencia Γ_R de radio R y centro 0 en el semiplano superior.

Integramos la función $f(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}$ en la frontera de $D_R(\partial D_R)$, orientada positivamente. Para ello aplicamos el Teorema del Residuo. La función tiene un único polo en el interior de ∂D_R, un polo simple, $z = bi$.

$$Res(f, bi) = \frac{e^{-ba}}{2bi}$$

Así,

$$2\pi i Res(f, bi) = \int_{\partial D_R} \frac{e^{iaz}}{b^2+z^2} dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{iax}}{x^2+b^2} dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz$$

$$\int_{\partial D_R} \frac{e^{iaz}}{b^2+z^2} dz = 2\pi i Res(f, bi) = 2\pi i \frac{e^{-ba}}{2bi} = \pi \frac{e^{-ba}}{b}$$

Se tienen las siguientes acotaciones:

$$|e^{iaz}| = e^{-aImz} \leq 1, \quad \text{porque } a > 0 \quad e \quad Imz \geq 0, \text{ para } z \in \Gamma_R$$

y

$$|z^2 + b^2| \geq |R^2 - b^2|, \quad \text{para } z \in \Gamma_R$$

Por lo tanto:

$$\lim_{R\to\infty} \Big| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \Big| \leq \lim_{R\to\infty} \frac{\pi R}{|R^2 - b^2|} = 0$$

Cuando $R \to \infty$:

$$\frac{\pi}{b} e^{-ba} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+b^2} dx$$

Finalmente:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2} dx = \frac{\pi}{b} e^{-ba}}$$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{sen^2 x}{x^2(1+x^2)} dx$

Solución:

$$\int_0^{\infty} \frac{sen^2 x}{x^2(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen^2 x}{x^2(1+x^2)} dx$$

La integral que estamos considerando es convergente en toda la recta real porque $x = 0$ es una singularidad evitable y el integrando es una función continua y está acotada por:

$$\Big| \frac{sen^2 x}{x^2(1+x^2)} \Big| \leq \frac{1}{x^4}$$

siendo $\frac{1}{x^4}$ una función integrable cuando x tiende hacia $-\infty$ y hacia ∞.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen^2 x}{x^2(1+x^2)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen^2 x}{x^2} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen^2 x}{x^2+1} dx$$

Para calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen^2 x}{x^2}$ tomamos la función de variable compleja:

$$f(z) = \frac{(e^{2iz} - 1)}{z^2}$$

y se toma el dominio D que es un semidisco del semiplano superior de radio R, salvando la singularidad en $z = 0$ con una semicircunferencia γ_ε de radio ε. Como f es una función holomorfa en D, por el Teorema de Cauchy se tiene:

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0$$

Esta integral se descompone en la suma de cuatro integrales, de ε a R a lo largo del eje real positivo, alrededor del contorno semicircular Γ_R de radio R en sentido directo, de $-R$ a $-\varepsilon$ a lo largo del eje real negativo y alrededor del contorno semicircular γ_ε de radio ε en sentido inverso:

$$\int_{\partial D} f(z) = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{(e^{2ix} - 1)}{x^2} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{(e^{2iz} - 1)}{z^2} dz +$$

$$+ \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{(e^{2ix} - 1)}{x^2} dx + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{(e^{2iz} - 1)}{z^2} dz = 0$$

Si $R \to \infty$:

$$\Big| \int_{\Gamma_R} f(z)dz \Big| \leq \pi R \frac{2}{|R^2|} \leq \frac{2\pi R}{R^2} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

porque $|e^{2iz} - 1| \leq e^{-2Imz} + 1 \leq 2$

Cuando $R \to \infty$:

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{(e^{2ix} - 1)}{x^2} dx + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{(e^{2ix} - 1)}{x^2} dx + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{(e^{2iz} - 1)}{z^2} dz = 0$$

El desarrollo de Laurent de $f(z)$ en 0 es:

$$f(z) = \frac{e^{2iz} - 1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^n}{n!} z^{n-2} =$$

$$= \frac{2i}{z} - 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^{n+2}}{(n+2)!} z^n$$

La parte no singular por ser holomorfa tiene una cota M independiente de ε de forma que

$$M long(\gamma_\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Tomando la parametrización $\gamma_\varepsilon(\theta) = \varepsilon e^{i\theta}, \quad \theta \in [\pi, 0]$:

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z} dz = \int_\pi^0 \frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta = -\pi i$$

Luego,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = 2\pi$$

y por tanto,

$$\int_0^\infty \frac{e^{2ix}-1}{x^2}dx + \int_{-\infty}^0 \frac{e^{2ix}-1}{x^2}dx + 2\pi = 0$$

y si tomo la parte real de la integral se tiene:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{cos2x - 1}{x^2}dx + 2\pi = 0$$

y concluimos que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{sen^2 x}{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1-cos(2x)}{x^2}dx = \pi$$

Para calcular $\int_{-\infty}^\infty \frac{sen^2 x}{x^2+1}dx$, como

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{sen^2 x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{cos2x}{x^2+1}dx$$

Y sabemos que:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+1} = arctg(\infty) - arctg(-\infty) = \pi$$

Sólo tenemos que calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos 2x}{x^2+1} dx$. Para ello tomamos el semidisco D_R del semiplano superior acotado por el intervalo $[-R, R]$ en el eje real y el contorno semicircular Γ_R de radio R en el semiplano superior. Se integra la función $\frac{e^{2iz}}{1+z^2}$ en ∂D_R. La función tiene un único polo en el semiplano superior, un polo simple en i, cuyo residuo es:

$$Res\Big(\frac{e^{2iz}}{1+z^2}, i\Big) = \frac{e^{-2}}{2i}$$

Así,

$$\int_{\partial D_R} \frac{e^{2iz}}{1+z^2} dz = \pi e^{-2}$$

Como $|e^{2iz}| \leq 1$ en el semiplano superior:

$$\Big| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{2iz}}{1+z^2} dz \Big| \leq \frac{1}{R^2-1} \pi R \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

De nuevo:

$$\int_{\partial D_R} \frac{e^{2iz}}{1+z^2} dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{2ix}}{1+x^2} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{2iz}}{1+z^2} dz$$

Pasando al límite de $R \to \infty$, se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{1+x^2} dx = \pi e^{-2}$$

Y por tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen^2 x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} Re(\pi e^{-2}) = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-2})$$

Finalmente:

$$\boxed{\int_{0}^{\infty} \frac{sen^2 x}{x^2(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{4}(1 + e^{-2})}$$

c) $\displaystyle \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^6} dx$

Solución:

Tomamos la función de variable compleja:

$$f(z) = \frac{z}{1+z^6}$$

y se toma el sector circular S_R del semiplano superior acotado por el intervalo $[0, R]$ en el eje real, el segmento $\gamma = [e^{\frac{\pi}{3}i}, 0]$ y el arco de circunferencia Γ_R de radio R, centro 0 y ángulo $\frac{\pi}{3}$ en el semiplano superior.

Integramos la función $f(z) = \frac{z}{1+z^6}$ en la frontera de $S_R(\partial S_R)$, orientada positivamente. Para ello aplicamos el Teorema del Residuo.

Las raíces de $z^6 + 1$ son:

$$z = e^{\frac{\pi}{6}i(2k+1)}, \quad k = 0, .., 5$$

La función tiene un único polo en el interior de ∂S_R, un polo simple, $z = e^{\frac{\pi}{6}i}$.

$$Res(f, e^{\frac{\pi}{6}i}) = -\frac{1+\sqrt{3}i}{12}$$

Por lo tanto:

$$\int_{\partial S_R} f(z)dz = \int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_0^R f(x)dx + \int_\gamma f(z)dz = 2\pi i Res(f, e^{\frac{\pi i}{6}})$$

Tomando la parametrización $\gamma(t) = te^{i\frac{\pi}{3}}, \quad t \in [R, 0]$

$$\int_\gamma f(z)dz = -\int_0^R \frac{te^{\frac{\pi}{3}i}}{1+t^6e^{2\pi i}} e^{\frac{\pi}{3}i}dt = -e^{\frac{2\pi i}{3}} \int_0^R \frac{t}{1+t^6}dt$$

Además,

$$\lim_{R\to\infty} \Big| \int_{\Gamma_R} \frac{z}{1+z^6}dz \Big| \leq \lim_{R\to\infty} \frac{R^2\pi}{3|R^6-1|} = 0$$

Cuando R tiende a infinito se obtiene:

$$(1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}) \int_0^\infty f(x)dx = 2\pi i Res(f, e^{\frac{\pi i}{6}})$$

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^6}dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$$

$d)$ $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{logx}{1+x^2}dx$

Solución:

Se define $G = \mathbb{C} - [0, +\infty)$.

La función $f(z) = \frac{log^2 z}{1+z^2}$, con $0 < argz < 2\pi$, es holomorfa en G.

Consideramos que la semirrecta tiene un borde superior y un borde inferior, y se extiende por continuidad a cada uno de estos bordes, definiendo con $argz = 0$ al borde superior y con $argz = 2\pi$ al borde inferior.

Para $\varepsilon > 0$ pequeña y $R > 0$ grande, se consideran los puntos z del dominio $D \subset \mathbb{C} - [0, +\infty)$ que satisfacen $\varepsilon < |z| < R$. La función $f(z)$ tiene dos polos simples en D, $z = i$ y $z = -i$. Se calculan sus residuos correspondientes:

$$Res(f, i) = i\frac{\pi^2}{8};$$

$$Res(f, -i) = -\frac{9}{8}\pi^2 i;$$

Aplicando el Teorema del Residuo:

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i\Big(\frac{i\pi^2}{8} - \frac{9\pi^2 i}{8}\Big) = 2\pi^3$$

La integral a lo largo de ∂D se descompone en la suma de cuatro integrales:

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{log^2 x}{1+x^2}dx + \int_{\Gamma_R} f(z)dz - \int_{\varepsilon}^{R} \frac{(logx + 2\pi i)^2}{1+x^2}dx + \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz$$

Además:

$$\lim_{R\to\infty}\Big|\int_{\Gamma_R} f(z)dz\Big| \le \lim_{R\to\infty} 2\pi R\frac{|logR + 2\pi|^2}{|R^2 - 1|} = 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big|\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz\Big| \le \lim_{\varepsilon\to 0} 2\pi\varepsilon\frac{|log\varepsilon + 2\pi|^2}{|1 - \varepsilon^2|} = 0$$

Tomando $R \to \infty$ y $\varepsilon \to 0$:

$$2\pi^3 = \int_0^{+\infty} \frac{log^2 x}{1+x^2}dx - \int_0^{+\infty} \frac{log^2 x + 4\pi i log x - 4\pi^2}{1+x^2}dx =$$

$$= 4\pi^2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} - 4\pi i \int_0^{\infty} \frac{log x}{1+x^2}dx$$

Como las dos integrales anteriores son reales y el resultado final también lo es, se deduce que la parte imaginaria anterior es idénticamente nula:

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{log x}{1+x^2}dx = 0}$$

Ejercicio 2. *Calcula la suma de las series:*

a) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2}, \quad (a \in (0,1));$

Solución:

Sea $f(z) = \frac{1}{(z+a)^2}$ y $h(z) = \frac{\pi cotg \pi z}{z}$.

Los polos de h son:

$z = 0$ (de orden 2)

$z \in \mathbb{Z}(z \neq 0)$, (de orden 1)

Sea $C_N, N \in \mathbb{N}$, el borde del cuadrado de vértices:

$$\pm\Big(N+\frac{1}{2}\Big)(1+i) \quad y \quad \pm\Big(N+\frac{1}{2}\Big)(1-i)$$

Por el Teorema del Residuo:

$$\int_{C_N} \frac{\pi cotg \pi z}{z} = 2\pi i (Res(h,0) + \sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} Res(h,n));$$

$$Res(h,n) = \lim_{z\to n} \pi \frac{(z-n)cotg(\pi z)}{z} = \pi \lim_{z\to n} \frac{(z-n)cos\pi z}{z \operatorname{sen} \pi z} = \frac{1}{n}$$

Luego:

$$\int_{C_N} \frac{\pi cotg\pi z}{z} = 2\pi i\Big(Res(h,0) + \sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} \frac{1}{n}\Big) = 2\pi i Res(h,0)$$

El desarrollo de h en serie de Laurent en 0 es de la siguiente forma:

$$h(z) = \frac{b_{-2}}{z^2} + \frac{b_{-1}}{z} + b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$$

La función h es par, entonces

$$0 = h(z) - h(-z) = 2\sum_{k=-1}^{\infty} b_{2k+1} z^{2k+1}$$

Entonces todos los coeficientes impares del desarrollo de h en serie de Laurent en 0 son nulos, en particular:

$$b_{-1} = Res(h,0) = 0$$

Entonces:

$$\int_{C_N} \frac{\pi cotg\pi z}{z} = 2\pi i Res(h,0) = 0$$

Usando este resultado:

$$\int_{C_N} \frac{\pi cotg\pi z}{(z+a)^2} dz = \int_{C_N} \pi cotg\pi z\Big(\frac{1}{(z+a)^2} - \frac{a_0}{z}\Big) dz$$

Desarrollamos $\frac{1}{z} f\left(\frac{1}{z}\right)$ en serie de Laurent en 0:

$\frac{1}{z} f\left(\frac{1}{z}\right)$ está acotada en $|z| < \frac{1}{R}$ que es equivalente a decir que $zf(z)$ está acotado en $|z| > R$, ésto es así porque

$$zf(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$$

lo que significa que está acotado en un entorno de infinito.

$z = 0$ es una singularidad evitable de f, por ser f una función holomorfa y acotada cerca de 0.

Por ser una singularidad evitable, la serie de Laurent de la función f en 0 no tiene parte singular:

$$\frac{1}{z} f\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 + a_1 z + ... \quad en \quad |z| < \frac{1}{R}$$

Entonces el desarrollo de Laurent en infinito de la función $f(z)$ es:

$$f(z) = \frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + ... \quad en \quad |z| > R$$

$$f(z) - \frac{a_0}{z} = \frac{a_1}{z^2} + ... = \frac{1}{z^2}\left(a_1 + \frac{a_2}{z} + ...\right) \quad en \quad |z| > R$$

$$\lim_{z \to \infty} \left(a_1 + \frac{a_2}{z} + ...\right) = a_1$$

Por tanto,

$$\left| f(z) - \frac{a_0}{z} \right| \leq \frac{M}{|z|^2} \quad en \quad |z| > R$$

De todo lo anterior se tiene que:

$$\Big| \int_{C_N} \frac{\pi cotg \pi z}{(z+a)^2} \Big| \leq \frac{M}{N^2} \pi 8(N+1) \underset{z \in C_N}{Sup} |cotg \pi z|$$

$$|cotg \pi z| = \Big| \frac{cos \pi z}{sen \pi z} \Big| = \Big| \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \Big| =$$

$$= \Big| \frac{e^{2\pi iz} + 1}{e^{2\pi iz} - 1} \Big| = \Big| \frac{e^{2\pi iz} + 1 + 1 - 1}{e^{2\pi iz} - 1} \Big| \leq \frac{2 + |e^{2\pi iz} - 1|}{|e^{2\pi iz} - 1|} = \frac{2}{|e^{2\pi iz} - 1|} + 1$$

Si se prueba que $|e^{2\pi iz} - 1| \geq \frac{1}{2}$ en C_N tendremos que:

$$|cotg \pi z| \leq \frac{2}{|e^{2\pi iz} - 1|} + 1 \leq 1 + 4 = 5$$

Y obtenido esto tendremos que:

$$\underset{z\in C_N}{Sup} \quad |cotg\pi z| \leq 5$$

y entonces

$$\Big| \int_{C_N} \frac{\pi cotg\pi z}{(z+a)^2} \Big| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Veamos entonces que en efecto $|e^{2\pi iz}-1| \geq \frac{1}{2}$ en C_N:

Para:

$$z = t \pm \Big(N+\frac{1}{2}\Big)i \quad t \in \Big[-\Big(N+\frac{1}{2}\Big), N+\frac{1}{2}\Big]$$

$$e^{2\pi iz} = e^{2\pi it} e^{\pm 2\pi(N+\frac{1}{2})}$$

$$|e^{2\pi iz}| = |e^{\pm 2\pi(N+\frac{1}{2})}| \geq \frac{3}{2}$$

$$|e^{2\pi iz}-1| \geq \frac{1}{2}$$

Para:

$$z = \pm\Big(N+\frac{1}{2}\Big) + ti, \quad t \in \Big[-\Big(N+\frac{1}{2}\Big), N+\frac{1}{2}\Big]$$

$$e^{2\pi iz} = e^{\pm 2\pi i(N+\frac{1}{2})} e^{-2\pi t} = e^{\pm \pi i} e^{-2\pi t} = -e^{-2\pi t} < 0$$

Al ser un valor negativo dista de 1 más de $\frac{1}{2}$:

$$|e^{2\pi iz}-1| \geq \frac{1}{2}$$

Finalmente:

$$\int_{C_N} \frac{\pi cotg\pi z}{(z+a)^2} dz =$$

$$= 2\pi i\Big[\sum_{n=-N}^{N} Res(\pi f(z) cotg\pi z, n) + Res(\pi f(z) cotg\pi z, -a)\Big]$$

Cuando $N \to \infty$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} Res(\pi f(z) cotg \pi z, n) = -Res(\pi f(z) cotg \pi z, -a)$$

Llamamos $g(z) = \pi cotg \pi z$:

$$Res(g, -a) = g'(-a) = -\frac{\pi^2}{(sen \pi a)^2}$$

Entonces:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} Res(\pi f(z) cotg \pi z, n) = \frac{\pi^2}{(sen \pi a)^2}$$

Y este resultado es posible porque $a \in (0, 1)$, por tanto, el denominador no se anula.

Además,

$$Res\Big(\frac{\pi cotg \pi z}{(z+a)^2}, n\Big) = \pi \lim_{z \to n} \frac{(z-n) cos \pi z}{(z+a)^2 sen \pi z} =$$

$$= \frac{\pi cos n\pi}{(n+a)^2 \pi cos n\pi} = \frac{1}{(n+a)^2}$$

El resultado final es:

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2}{(sen \pi a)^2}}$$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$;

Solución:

En este ejercicio se va a utilizar el resultado obtenido en el apartado anterior

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

La igualdad anterior es cierta porque:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

De esta forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{4}}{(n+\frac{1}{2})^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$;

Solución:

En este ejercicio se aplica el resultado obtenido en el apartado a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Ejercicio 3. *Para cada $R > 0$ sea Γ_R el borde del rectángulo de vértices $\pi, -\pi, \pi + iR$ y $-\pi + iR$ recorrido en sentido directo. Utiliza la integral $\int_{\Gamma_R} \frac{z}{1-e^{-iz}} dz$ para calcular*

$$\int_0^\pi \frac{xsenx}{2-2cosx} dx$$

Solución:

La función $f(z) = \frac{z}{1-e^{-iz}}$ tiene una única singularidad, que es evitable, en $z = 0$ ya que:

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{1-e^{-iz}} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{ie^{-iz}} = \frac{1}{i}$$

Además:

$$e^{-iz} = 1 \Leftrightarrow -iz = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Entonces:

$$0 = \int_{\Gamma_R} \frac{z}{1-e^{-iz}} dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{1-e^{-ix}} dx +$$
$$+ \int_0^R i \frac{\pi + ix}{1-e^{-i(\pi+ix)}} dx - \int_0^R i \frac{-\pi + ix}{1-e^{-i(-\pi+ix)}} dx + \int_{\gamma_R} \frac{z}{1-e^{-iz}} dz$$

donde γ_R es el segmento $[-\pi + iR, \pi + iR]$.

$$0 = \int_{\Gamma_R} \frac{z}{1-e^{-iz}} = \int_0^\pi \frac{x}{1-e^{-ix}} dx +$$
$$+ \int_{-\pi}^0 \frac{t}{1-e^{-it}} dt + i \int_0^R \left(\frac{\pi + ix}{1+e^x} - \frac{-\pi + ix}{1+e^x} \right) dx + \int_{\gamma_R} \frac{z}{1-e^{-iz}} dz =$$

Con el cambio de variable: $\quad x = -t, \quad dx = -dt$, se tiene:

$$\int_{-\pi}^0 \frac{t}{1-e^{-it}} dt = \int_0^\pi \frac{-x}{1-e^{ix}} dx$$

Entonces,

$$0=\int_{\Gamma_R}\frac{z}{1-e^{-iz}}=\int_0^{\pi}\frac{x}{1-e^{-ix}}dx+\int_0^{\pi}\frac{-x}{1-e^{ix}}dx+$$

$$+2\pi i\int_0^R\frac{dx}{1+e^x}+\int_{\gamma_R}\frac{z}{1-e^{-iz}}=$$

$$=\int_0^{\pi}x\Big(\frac{1}{1-e^{-ix}}-\frac{1}{1-e^{ix}}\Big)dx+$$

$$+2\pi i\int_0^R\frac{dx}{1+e^x}+\int_{\gamma_R}\frac{z}{1-e^{-iz}}=$$

$$=i\int_0^{\pi}\frac{xsen(-x)}{1-cosx}dx+2\pi i\int_0^R\frac{dx}{1+e^x}+\int_{\gamma_R}\frac{z}{1-e^{-iz}}$$

Se tiene que $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{z}{1-e^{-iz}}=0$, entonces:

$$\lim_{R\to\infty}\Big(i\int_0^{\pi}\frac{xsen(-x)}{1-cosx}dx+2\pi i\int_0^R\frac{dx}{1+e^x}+\int_{\gamma_R}\frac{z}{1-e^{-iz}}\Big)=$$

$$=i\Big(-\int_0^{\pi}\frac{xsenx}{1-cosx}dx+2\pi\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+e^x}\Big)=0$$

Y por tanto,

$$\int_0^{\pi}\frac{xsenx}{1-cosx}dx=2\pi\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+e^x}$$

Haciendo el cambio de variable: $e^x=t, \quad tdx=dt$ se tiene:

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+e^x}=\int_1^{\infty}\frac{dt}{t(1+t)}=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\Big(\int_1^R\frac{dt}{t}-\int_1^R\frac{dt}{1+t}\Big)=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\Big(ln\frac{R}{1+R}\Big)+ln(2)$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+e^x} = \lim_{R\to\infty} \left(ln\frac{R}{1+R}\right) + ln(2) =$$

Por ser el logaritmo una función continua:

$$= ln\Big(\lim_{R\to\infty} \frac{R}{1+R}\Big) + ln(2) = ln(2)$$

Finalmente:

$$\boxed{\int_0^\pi \frac{xsenx}{2-2cosx}dx = \pi ln(2)}$$

Ejercicio 4. *¿Existe una función holomorfa del disco $D = D(0;1)$ en él mismo con $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ y $f'(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$?*

Solución:

En este ejercicio se aplica el siguiente resultado:

$f : D \to \mathbb{C}$ holomorfa, tal que $|f(z)| \leq 1, \quad a \in D,$

$\alpha = f(a) \quad (\alpha \in D$ salvo que f sea constante) entonces

$$\boxed{|f'(a)| \leq \frac{1-|\alpha|^2}{1-|a|^2}}$$

Supongamos que existe una función holomorfa que cumple las condiciones del enunciado,por el resultado anterior se cumpliría:

$$\frac{2}{3} \leq \frac{1-|f(a)|^2}{1-a^2} = \frac{7}{12}$$

Se llega a una contradicción, por tanto, no existe ninguna función holomorfa del disco $D = D(0;1)$ en él mismo con $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ y $f'(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$

Ejercicio 5. *Supongamos que f es holomorfa en un entorno del disco $\bar{D}(0;1)$ y $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$ y supongamos que f tiene un cero simple en $z = \frac{1}{4}(1+i)$ y un cero doble en $z = \frac{1}{2}$.¿Puede ser $f(0) = \frac{1}{2}$?*

Solución:

Si $f : G \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa, donde $\bar{D}(0;1) \subset G$ y $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$, veamos primero cómo ha de ser la expresión de esta función:

Por hipótesis: $f(\partial D) = \partial D$

f puede ser constante(no se va a tener en cuenta) ó $f : D \to D$, por el Principio del Módulo Máximo y el Teorema de la Aplicación Abierta.

Salvo que f sea constante , si f no se anula , entonces $\frac{1}{f} : D \to \mathbb{C}$ holomorfa y

$$\left|\frac{1}{f}(z)\right| = 1, \quad \forall z \in \partial D$$

Por el Principio del Módulo Máximo,$\frac{1}{f} : D \to D$ y se llega a una contradicción porque si $f : D \to D$ entonces $\frac{1}{f}$ manda un punto que está en el interior del disco a un punto exterior y por tanto para $|z| < 1$, $\frac{1}{|f(z)|} > 1$.

Por tanto, f se anula en D(salvo f constante).

En $a_1, .., a_n$ se tiene $f(a_i) = 0, \quad i = 1, .., n$.

El número de ceros es finito porque si hubiese infinitos ceros, habría un punto de acumulación (Teorema de Weierstrass) dentro de G, tal vez en la frontera de D y por el Principio de Identidad, f sería idénticamente nula.

Se considera

$$H(z) = \frac{f(z)}{\varphi_{a_1}(z)...\varphi_{a_n}(z)},$$

donde $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ con $|a| < 1$, es una transformación de Möbius.

H es una función holomorfa en D, ya que sus singularidades en $a_1, ..., a_n$ son evitables y además

$$|H(z)| = \frac{|f(z)|}{|\varphi_{a_1}(z)|...|\varphi_{a_n}(z)|} = 1 \quad si \quad |z| = 1$$

Como $|H(z)| = 1$ si $|z| = 1$ y H no se anula $\Rightarrow H(z) = c \quad (|c| = 1)$. Esto es así por el siguiente resultado:

"$G \subset \mathbb{C}$ abierto acotado. $f : G \to \mathbb{C}$ holomorfa, $f : \bar{G} \to \mathbb{C}$ continua, tal que $|f(z)| = c \quad \forall z \in \partial G$, entonces f es constante ó f tiene un cero en G."

Por tanto la expresión de $f(z)$ es de la forma:

$$\boxed{f(z) = c\varphi_{a_1}(z)...\varphi_{a_n}(z)}$$

En nuestro caso:

$$f(z) = c\varphi_{\frac{1+i}{4}}(z)[\varphi_{\frac{1}{2}}(z)]^2\varphi_{a_4}(z)...\varphi_{a_n}(z)$$

$$f(0) = c\Big(\frac{-1+i}{4}\Big)\Big(\frac{-1}{2}\Big)^2(-a_4)...(-a_n)$$

Como $|c| = 1$, $|a_i| \leq 1, \quad i = 4, ..., n$:

$$|f(0)| = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{4}|a_4|...|a_n| < \frac{\sqrt{2}}{16}$$

Por tanto, $f(0)$ no puede valer $\frac{1}{2}$ ni ningún valor que tenga módulo mayor que $\frac{\sqrt{2}}{16}$.

Ejercicio 6. *Sea u una función armónica en Ω. Sean $a \in \Omega$ y $R > 0$ tales que $\bar{D}(a; R) \subset \Omega$. Demuestra que*

$$u(a) = \frac{1}{\pi R^2}\iint_{\bar{D}(a;R)} u(x, y)dxdy$$

Solución:

Para resolver este ejercicio se aplicará el Teorema del Valor Medio:

$$u : G \to \mathbb{R} \textit{ armónica, } \bar{D}(a;R) \subset G \textit{ entonces}$$

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})d\theta$$

Hacemos un cambio de variable a coordenadas polares:

$$x = a + \rho cos\theta$$

$$y = a + \rho sen\theta$$

Entonces:

$$\iint_{\bar{D}(a;R)} u(x,y)dxdy = \int_0^R \Big(\int_0^{2\pi} \rho u(a + \rho cos\theta, a + \rho sen\theta)d\theta\Big)d\rho =$$

$$= \int_0^R \Big(\int_0^{2\pi} \rho u(a + \rho e^{i\theta})d\theta\Big)d\rho = 2\pi u(a)\int_0^R \rho = 2\pi u(a)\frac{R^2}{2}$$

Entonces:

$$\frac{1}{\pi R^2}\iint_{\bar{D}(a;R)} u(x,y)dxdy = u(a)$$