EJERCICIO DE ANÁLISIS FUNCIONAL
(Asignatura VCAF)
HOJA 5

Ejercicio 1: Demostrar que en el espacio $C[-1,1]$ los siguientes funcionales son lineales, continuos, y hallar sus normas:

a) $F(x) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)dt - x(0);$

b) $F(x) = \int\limits_{-1}^{0} x(t)dt - \int\limits_{0}^{1} x(t)dt;$

a)$\rightarrow$ Vemos que es lineal.

Es lineal ya que las integrales tienen esa propiedad.

$\rightarrow$ Vemos que es un funcional continuo.

Como es lineal sabemos que:

F continuo $\Longleftrightarrow |F(x)| \leq M \|x\| \ \forall x \in C[-1,1]$ y donde M es constante.

Pero esto es claro ya que:

$|F(x)| = \left| \int\limits_{-1}^{1} x(t)dt - x(0) \right| \leq \int\limits_{-1}^{1} |x(t)|\, dt + |x(0)| \leq (1+1)\|x\| + \|x\| = 3\|x\|.$

$\rightarrow$ Vemos que $\|F\| = 3$.

Por definición sabemos que $\|F\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |F(x)|$.

Por lo anterior sabemos que:

$|F(x)| \leq 3\|x\| \Longrightarrow \|F\| \leq 3$.

Vemos que se tiene la igualdad:

Tomo $x \equiv -1$ en $[-1,1] \Longrightarrow \|x\| = 1$, en particular, $\|x\| \leq 1$ entonces se tiene que $|F(x)| = \left| = \int\limits_{-1}^{1} -1dt - x(0) \right| = |-2-1| = 3 \Longrightarrow \|F\| = 3.$

b)$\rightarrow$ Vemos que es lineal.

Es lineal ya que las integrales tienen esa propiedad.

$\rightarrow$ Vemos que es un funcional continuo.

Como es lineal sabemos que:

F continuo $\Longleftrightarrow |F(x)| \leq M \|x\| \ \forall x \in C[-1,1]$ y donde M es constante.

Pero esto es claro ya que:

$|F(x)| = \left| \int\limits_{-1}^{0} x(t)dt - \int\limits_{0}^{1} x(t)dt \right| \leq \left| \int\limits_{-1}^{0} x(t)dt \right| + \left| \int\limits_{0}^{1} x(t)dt \right| \leq \int\limits_{-1}^{1} \|x\|\, dt = 2\|x\|.$

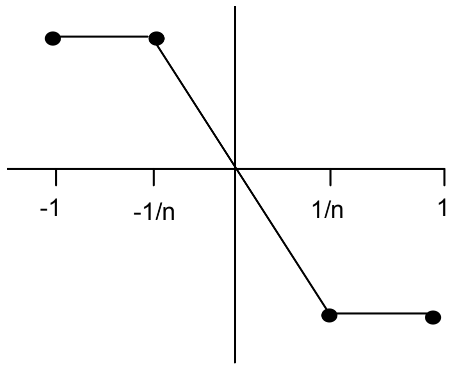
$\rightarrow$ Vemos que $\|F\| = 2$.

Por definición sabemos que $\|F\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |F(x)|$.

Por lo anterior sabemos que $|F(x)| \leq 2\|x\| \Longrightarrow \|F\| \leq 2$.

Vemos que se tiene la igualdad:
Tomo la sucesión $x_n(t)$siguiente:

$$x_n(t) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } -1 \leq t < \frac{-1}{n} \\ -nt \text{ si } \frac{-1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ -1 \text{ si } \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{array} \right\}$$



$\Longrightarrow x_n \in C[-1,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y además $\|x_n\| = \max\limits_{t\in[-1,1]} |x(t)| = 1$, en particular $\|x_n\| \leq 1$, entonces se tiene que $|F(x)| = \left| \int\limits_{-1}^{\frac{-1}{n}} 1dt + \int\limits_{\frac{-1}{n}}^{0} -nt - \int\limits_{0}^{\frac{1}{n}} -nt - \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1} -1 \right| =$
$= \left| \frac{-1}{n} + 1 + \left(\frac{-n}{2}t^2\right)_{\frac{-1}{n}}^{0} + \left(\frac{n}{2}t^2\right)_{0}^{\frac{1}{n}} + 1 - \frac{1}{n} \right| = \left|2 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n}\right| \rightarrow 2$ entonces como $\|F\| \leq 2$ y $|F(x)| \rightarrow 2$ cuando $n \rightarrow \infty$. Luego se tiene que $\|F\| = 2$.

Ejercicio 2: ¿Estarán acotadas los siguientes funcionales lineales en el espacio $C[0,1]$?

a) $F(x) = \int\limits_{0}^{1} x(\sqrt{t})dt$;

Si está acotado, ya que si $x \in C[0,1]$, es tal que $\|x\| \leq 1 \Longrightarrow \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| \leq 1$ entonces como la función que a cada t le manda a $\sqrt{t}$ es acotada, y no nos da problemas se tiene que $x(\sqrt{t}) = x(z)$ donde $z = \sqrt{t} \in [0,1] \Longrightarrow \max\limits_{t\in[0,1]} \left|x(\sqrt{t})\right| \leq 1$.

Luego por tanto $|F(x)| = \left| \int\limits_{0}^{1} x(\sqrt{t})dt \right| \leq \int\limits_{0}^{1} \left|x(\sqrt{t})\right| dt \leq 1$ entonces es acotado por 1 $\forall x \in C[0,1]$.

b) $F(x) = \lim\limits_{n\rightarrow\infty} \int\limits_{0}^{1} x(t^n)dt$;

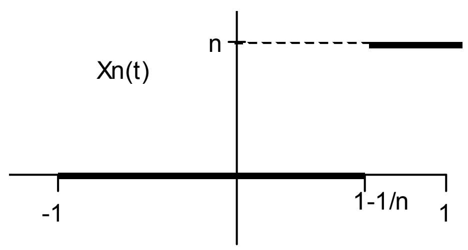
Si está acotada, ya que si $x \in C[0,1]$ es tal que $\|x\| \leq 1 \Longrightarrow \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| \leq 1$, entonces como si $t \in [0,1] \Longrightarrow t^n \in [0,1]$ se tiene que $\max\limits_{\substack{t\in[0,1]\\ n\in N}} |x(t^n)| \leq 1$.

Luego por tanto $|F(x)| = \left| \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 x(t^n)dt \right| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 |x(t^n)|\, dt \leq \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ entonces es acotado por 1 $\forall x \in C[0,1]$.

Ejercicio 3: Demostrar que los siguientes funcionales son lineales, continuos, y hallar sus normas:

a) $F(x) = \int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt$ **donde** $x \in L_1[-1,1]$;

1) Vemos que es lineal:
$F(\lambda x + \mu y) = \int\limits_{-1}^{1} t(\lambda x + \mu y)(t)dt = \int\limits_{-1}^{1} t\lambda x(t)dt + \int\limits_{-1}^{1} t\mu y(t)dt = \lambda F(x) + \mu F(y)$.
2) Vemos que es continuo:
Como es lineal sabemos que:
F continuo $\Longleftrightarrow |F(x)| \leq M \|x\| \ \forall x \in L_1[-1,1]$ y donde M es constante.
Pero esto es claro ya que:
$|F(x)| = \left| \int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt \right| \leq \int\limits_{-1}^{1} |t|\, |x(t)|\, dt \leq \int\limits_{-1}^{1} |x(t)|\, dt \leq \|x\|$.
3) Vemos que $\|F\| = 1$.
Por definición sabemos que $\|F\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} |F(x)|$.
Por lo anterior sabemos que $|F(x)| \leq \|x\| \Longrightarrow \|F\| \leq 1$.
Vemos que se tiene la igualdad:
Tomo la sucesión $x_n(t)$siguiente:
$$x_n(t) = \left\{ \begin{array}{c} n \text{ si } 1 - \frac{1}{n} < t < 1 \\ 0 \text{ si } -1 < t < 1 - \frac{1}{n} \end{array} \right\}$$



Vemos que $\|x_n(t)\|_1 = 1$.
$\|x_n(t)\|_1 = \int\limits_{-1}^{1} |x_n(t)|\, dt = \int\limits_{1-\frac{1}{n}}^{1} ndt = n(1 - (1 - \frac{1}{n})) = 1$.

Vemos que $|F(x_n)| \to 1$.

$F(x_n) = \int\limits_{1-\frac{1}{n}}^{1} tn = \left(\frac{n}{2}t^2\right)_{1-\frac{1}{n}}^{1} = \frac{n}{2}(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}) \to 1$ entonces como $\|F\| \leq 1$ y $|F(x)| \to 1$ cuando $n \to \infty$. Luego se tiene que $\|F\| = 1$.

b) $F(x) = \int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{3}} x(t)dt$ **donde** $x \in L_2[0,1]$;

1) Vemos que es lineal:

$F(\lambda x + \mu y) = \int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{3}}(\lambda x + \mu y)(t)dt = \int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{3}} \lambda x(t)dt + \int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{3}} \mu y(t)dt = \lambda F(x) +$
$+ \mu F(y)$.

2) Vemos que es continua:

Como es lineal sabemos que:

F continuo $\Longleftrightarrow |F(x)| \leq M \|x\| \; \forall x \in L_2[-1,1]$ y donde M es constante.

Pero esto es claro ya que, utilizando la desigualdad de Hölder, tenemos que:

$|F(x)| = \left|\int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{3}} x(t)dt\right| \leq \int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{3}} |x(t)|\, dt \leq \left(\int\limits_0^1 t^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2 = \sqrt{3}\, \|x\|_2$.

3) Vemos que $\|F\| = \sqrt{3}$.

Por definición sabemos que $\|F\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |F(x)|$.

Por lo anterior sabemos que:

$|F(x)| \leq \sqrt{3}\, \|x\|_2 \Longrightarrow \|F\| \leq \sqrt{3}$.

Vemos que se tiene la igualdad:

Tomo $x_0(t) = \frac{t^{\frac{-1}{3}}}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \|x_0\|_2 \leq 1$.

$|F(x_0)| = \int\limits_0^1 t^{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Luego se tiene que $\|F\| = \sqrt{3}$.

c) $F(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$ **donde** $x = (x_1, x_2, ...) \in l_2$;

1) Vemos que es lineal:

$F(\lambda x + \mu y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda x_k + \mu y_k)}{k} = \lambda \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} + \mu \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k} = \lambda F(x) + \mu F(y)$.

2) Vemos que es continuo:

Como es lineal sabemos que:

F continuo $\Longleftrightarrow |F(x)| \leq M \|x\| \; \forall x \in l_2$ y donde M es constante.

Pero esto es claro ya que, utilizando la desigualdad de Hölder, tenemos que:

$|F(x)| \leq \left\|\frac{1}{k}\right\|_2 \|x\|_2 \Longrightarrow |F(x)| \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|x\|_2$. Luego F es continuo.

3) Vemos que $\|F\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$.

Por definición sabemos que $\|F\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} |F(x)|$. Por lo anterior sabemos que:
$|F(x)| \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|x\|_2 \Longrightarrow \|F\| \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}}$.
Vemos que se tiene la igualdad:
Tomo $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\left(\frac{1}{k}\right) \frac{1}{\frac{\pi}{\sqrt{6}}}\right)_{k\in\mathbb{N}} \Longrightarrow \|x\|_2 \leq 1$ y $x \in l_2$.
Por otro lado $|F(x)| = \frac{1}{\frac{\pi}{\sqrt{6}}} \left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right| = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$.
Luego se tiene que $\|F\| = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$.

d) $F(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$ **donde** $x = (x_1, x_2, ...) \in l_1$;
1) Vemos que es lineal:
$F(\lambda x + \mu y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda x_k + \mu y_k)}{k} = \lambda \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} + \mu \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k} = \lambda F(x) + \mu F(y)$.
2) Vemos que es continuo:
Como es lineal sabemos que:
F continuo $\Longleftrightarrow |F(x)| \leq M \|x\| \; \forall x \in l_1$ y donde M es constante.
Pero esto es claro ya que,
$|F(x)| = \left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k} \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| \leq \|x\|_1$. Luego F es continuo.
3) Vemos que $\|F\| = 1$.
Por definición sabemos que $\|F\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} |F(x)|$.
Por lo anterior sabemos que $|F(x)| \leq \|x\|_1 \Longrightarrow \|F\| \leq 1$.
Vemos que se tiene la igualdad:
Tomo $x = (1, 0, ...) \Longrightarrow \|x\|_1 \leq 1$ y $x \in l_1$.
Entonces se tiene:
$|F(x)| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k} = 1$. Luego se tiene que $\|F\| = 1$.

e) $F(x) = x_1 + x_2$ **donde** $x = (x_1, x_2, ...) \in l_\infty$;

1) Vemos que es lineal:
$F(\lambda x + \mu y) = (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) = \lambda (x_1 + x_2) + \mu (y_1 + y_2) =$
$= \lambda F(x) + \mu F(y)$.
2) Vemos que es continuo:
Como es lineal sabemos que:
F continuo $\Longleftrightarrow |F(x)| \leq M \|x\| \; \forall x \in l_\infty$ y donde M es constante.
Pero esto es claro ya que,
$|F(x)| = |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \leq \|x\|_\infty + \|x\|_\infty = 2 \|x\|_\infty$. Luego F es continuo.
3) Vemos que $\|F\| = 2$.
Por definición sabemos que $\|F\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} |F(x)|$.
Por lo anterior sabemos que $|F(x)| \leq 2 \|x\|_\infty \Longrightarrow \|F\| \leq 2$.
Vemos que se tiene la igualdad:

Tomo $x = (1, 1, 0, ...) \Longrightarrow \|x\|_\infty \leq 1$ y $x \in l_\infty$.
Entonces se tiene:
$|F(x)| = |x_1 + x_2| = 1 + 1 = 2$. Luego se tiene que $\|F\| = 2$.

Ejercicio 4: En los espacios l_1, c_0 dar ejemplos de funcionales lineales continuos que alcanza su norma y que no la alcanza sobre una bola unitaria cerrada.

$\rightarrow$ Vemos primero los ejemplos en l_1.

• Vemos un ejemplo de un funcional que alcanza su norma:
$F(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$ $x \in l_1$.
Por el apartado d) del ejercicio 3, de esta hoja, sabemos que es lineal, continuo y que $\|F\| = 1$ y como hemos visto en este apartado si tomo
$x = (1, 0, ...) \in l_1 \Longrightarrow \|x\| \leq 1$; luego x pertenece a la bola cerrada unitaria y $F(x) = 1$, luego alcanza su norma.
• Vemos un ejemplo en el que no se alcanza la norma:
$F(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) x_k$ $x = (x_1, x_2, ...) \in l_1$igual que en el apartado d) del ejemplo 3, de la hoja 5, demostramos que es lineal y continuo.
Vemos que $\|F\| = 1$.
$|F(x)| = \left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) x_k\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|1 - \frac{1}{k}\right| |x_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| \leq 1 \Longrightarrow \|F\| \leq 1$.
Por otro lado considero $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ...) \in l_1$ tal que $\|e_i\| = 1$
$\Longrightarrow |F(e_i)| = \left|1 - \frac{1}{i}\right|$ $\forall i \in \mathbb{N}$ y como $\lim\limits_{i \to \infty} \left|1 - \frac{1}{i}\right| = 1 \Longrightarrow |F(e_i)| \to 1$
$\Longrightarrow \|F\| = 1$.
Vemos que este funcional no alcanza su norma, pero esto es claro porque $\forall x \in l_1$ tal que $\|x\| \leq 1$.
$|F(x)| = \left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) x_k\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|1 - \frac{1}{k}\right| |x_k|$ pero $\left|1 - \frac{1}{k}\right| < 1$ ya que $\frac{1}{k} \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{N} \Longrightarrow |F(x)| < \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| \leq 1 \Longrightarrow |F(x)| < 1$.

$\rightarrow$ Vemos los ejemplos de c_0.

• Vemos un ejemplo en el que si se alcanza la norma:
Sea $F(x) = x_1 + x_2$ con $x \in c_0$ para ver que es lineal y continuo es análogo al apartado e) del ejercicio 3, de la hoja 5, pero teniendo en cuenta que ahora estamos

en c_0, donde la norma es $\|x\| = \max_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$, de la misma forma se demuestra que $\|F\| = 2$.

Vemos que se alcanza, tomamos $x = (1, 1, 0, ...) \in c_0$
$\Longrightarrow |F(x)| = |x_1 + x_2| = 2$.

• Vemos un ejemplo en el que no se alcanza la norma:
$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} x_k$ con $x \in c_0$.

Ver la continuidad y la linealidad es análogo a los casos anteriores.

Calculamos su norma, $\|F\| = 2$.

Si $x \in c_0$ tal que $\|x\| \leq 1 \Longrightarrow \|x\| = \max_{k\in\mathbb{N}} |x_k| \leq 1 \Longrightarrow |x_k| \leq 1$, por tanto,
$|F(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left|2^{-k+1}\right| |x_k| \leq$
$\leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} = 2 \Longrightarrow \|F\| \leq 2$.

Por otro lado si tomo $\rho_i = (1, 1, ..., 1^{(i)}, 0, 0, ...) \in c_0 \Longrightarrow \|\rho_i\| = 1$ y
$|F(\rho_i)| = \left|\sum_{k=1}^{i} 2^{-k+1}\right| = \frac{1-2^{-i+1}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{2}{2^i}\right) \to 2$ cuando $i \to \infty$ entonces se tiene que $\|F\| = 2$.

Vemos que la norma no se alcanza.

Como si $x \in c_0 \Longrightarrow \lim_k x_k \to 0$ luego existe k_0 tal que si $k \geq k_0$
$\Longrightarrow |x_k| < \frac{1}{2} < 1$.

Luego si $x \in c_0$ tal que $\|x\| \leq 1$
$|F(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left|2^{-k+1}\right| |x_k| = \sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k+1} |x_k| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k+1} |x_k| <$
$< \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+2} = 2$ donde en la última desigualdad estamos utilizando que
$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k+1} |x_k| < \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k+1}$ ya que $|x_k| < 1\ \forall k > k_0$.

Ejercicio 5: Para cada $y \in l_q$se considera la aplicación $T_y : l_p \to \mathbb{K}$ definida por $T_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n (x \in l_p)$. Demuestra que $T_y \in (l_p)^*$y que la aplicación $T : l_q \to (l_p)^*$donde $T(y) = T_y$es un isomorfismo isométrico de $l_q$sobre $(l_p)^*$.

$\to$ Vemos que $(l_p)^* = l_q$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Considero $T_y : l_p \to \mathbb{K}$ donde $y \in l_q$ y $T_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ con $x \in l_p$.

Vemos que $T_y \in (l_p)^*$, es decir, que es lineal y continua:

1) Vemos que es lineal:

$T_y(\lambda x_1+\mu x_2)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda x_1^n+\mu x_2^n)y^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda x_1^n y^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu x_2^n y^n=\lambda T_y(x_1)+\mu T_y(x_2)$.

Luego es lineal.

2) Vemos que es continua:

Para ver esto basta ver que el operador es acotado, es decir que $\forall x\in l_p$, $\|F(x)\|\leq M\|x\|$.

$|T_y(x)|=\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n y_n\right|\leq\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|\,|y_n|\leq\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$ donde en la última desigualdad hemos utilizado la desigualdad de Hölder, como $y\in l_q$

$\Longrightarrow\|y\|_q<\infty\Longrightarrow|T_y(x)|\leq\|y\|_q\|x\|_p\Longrightarrow T_y()$ es continua.

Luego $T_y\in(l_p)^*$.

$\rightarrow$ Consideramos ahora la aplicación:

$T:l_q\rightarrow(l_p)^*$ donde $T(y)=T_y$.

Vemos que es un isomorfismo isométrico de l_q sobre $(l_p)^*$.

1)Vemos primero que T es un isomorfismo lineal.

Por definición $\|\|^*$ en $(l_p)^*$ es $\|x^*\|^*=\sup\{|x^*(x)|:\|x\|=1\}$

$\Longrightarrow\|T_y\|=\sup\limits_{\|x\|=1}|T_y(x)|$.

Para ver que es isomorfismo utilizamos la caracterización, que dice que:

X,Y son isomorfos, si y sólo, si $\exists F:X\rightarrow Y$ lineal y sobreyectiva tal que $\alpha\|x\|\leq\|F(x)\|\leq\beta\|x\|\ \forall x\in X$, en nuestro caso ver que T es lineal es muy fácil.

Vemos que es sobreyectiva.

Sea $f\in(l_p)'\Longrightarrow f:l_p\rightarrow\mathbb{K}$, ¿existe $y\in l_q$ tal que $f(x)=T_y(x)$?

Como $f(x)\in\mathbb{K}$ lo hacemos por casos:

1) Si $x=(0,...,0,...)$ entonces tomo $y=(0,...,0,...)\in l_q$ y es obvio que $f(x)=T_y(x)$, ya que $f(x)=0$ por ser lineal.

2) Si existe i_0 tal que $x_{i_0}\neq 0$ entonces tomo $y=(0,....,\frac{f(x)}{x_{i_0}},...,0,...)$, es claro que, $y\in l_q$ y $T_y(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i y_i=\frac{f(x)}{x_{i_0}}x_{i_0}=f(x)$. Luego T es sobreyectiva.

$\rightarrow$ Por último vemos que $\|F(x)\|=\|x\|$, es decir, en nuestro caso particular $\|T_y\|=\|y\|_q$.

Como hemos visto anteriormente.

$|T_y(x)|\leq\|y\|_q\|x\|_p\Longrightarrow|T_y(x)|\leq\|y\|_q\Longrightarrow|T_y|\leq\|y\|_q$.

Vemos ahora que se tiene la igualdad $\|T_y\|=\sup\limits_{\|x\|=1}|T_y(x)|$, considero el siguente x, que se define:

$$x_i=\left\{\begin{array}{c}0 \text{ si } k_i=0\\ \frac{|y_i|^q}{y_i}\text{ si } k_i\neq 0\end{array}\right\}.$$

Y se tiene que $\|x\|_p^p=\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^p=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{|y_i|^{qp}}{|y_i|^p}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}|y_i|^q=\|y\|_q^q\Longrightarrow\|x\|_p=\|y\|_q^{\frac{q}{p}}$.

Suponemos que $\|y\|_q = 1 \Longrightarrow \|x\|_p = 1 \Longrightarrow |T_y(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right| = \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q =$
$= \|y\|_q^q$,
$|T_y(x)| \leq \|T_y\| \, \|x\|_p$, $\|y\|_q^q \leq \|T_y\| \, \|y\|_q^{\frac{q}{p}} \Longrightarrow \|y\|_q^{q-\frac{q}{p}=1} \leq \|T_y\|$
$\Longrightarrow \|y\|_q \leq \|T_y\|$.
Ahora si $y \neq 0$, ya que si $y = 0$ es obvio, tal que $\|y\|_q \neq 1$ consideramos $\hat{y} = \frac{y}{\|y\|_q} \Longrightarrow T_y(x) = T_{\hat{y}\|y\|_q}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \|y\|_q \, x_k \hat{y}_k = \|y\|_q \sum_{k=1}^{\infty} x_k \hat{y}_k = \|y\|_q \, T_{\hat{y}}(x)$.
Por el caso anterior sabemos que, $\|T_{\hat{y}}\| \, \|\hat{y}\|_q \Longrightarrow \left\|\|y\|_q \, T_{\hat{y}}\right\| \geq \|\hat{y}\|_q \, \|y\|_q$
$\Longrightarrow \|T_y\| \geq \|y\|_q$, ya que $\left\|\|y\|_q \, T_{\hat{y}}\right\| = \|T_y\|$ y $\|\hat{y}\|_q = 1 \Longrightarrow \|T_y\| \geq \|y\|_q$
$\forall y \in l_q \Longrightarrow (l_p)^* = l_q$.

Ejercicio 6: Para cada $y = (y_n)_{n\in N} \in l_1$se considera la aplicación $T_y : c_0 \to \mathbb{K}$ definida por $T_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n (x \in c_0)$.

Demuestra que $T_y \in (c_0)'$ y que la aplicación $T : l_1 \to (c_0)'$ donde $T(y) = T_y$es un isomorfismo isométrico de $l_1$sobre el dual de c_0.

$\to$ Considero $T_y : c_0 \to \mathbb{K}$ donde $y \in l_1$ y $T_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$.

Vemos que $T_y \in (c_0)^*$, es decir, que es lineal y continua.
1) Ver que es lineal es igual que el ejercicio 5 de esta hoja.
2)Vemos que es continua, para ver esto basta ver que, el operador es acotado, es decir, que $\forall x \in c_0$ se tiene que $|F(x)| \leq M \|x\|$ lo vemos
$|T_y(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \, |y_n| \leq \|x\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| \leq M \|x\|_\infty$ estamos utilizando que si $y \in l_1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| \leq M \Longrightarrow T_y()$ es continua $\Longrightarrow T_y \in (c_0)'$.

$\to$ Consideramos ahora la aplicación $T : l_1 \to (c_0)'$ donde $T(y) = T_y$. Vemos que es un isomorfismo isométrico de l_1 sobre $(c_0)'$.

1) Ver que es lineal es muy fácil y similar a lo hecho anteriormente.
2) Vemos que es isomorfismo (isométrico), para ello utilizamos la caracterización que dice que: X, Y son isomorfos, si y sólo, si $\exists F : X \to Y$ lineal y sobreyectiva tal que$\alpha \|x\| \leq \|F(x)\| \leq \beta \|x\| \; \forall x \in X$.
• Vemos que es sobreyectiva:
Sea $f \in (c_0)' \Longrightarrow f : c_0 \to \mathbb{K}$, ¿$\exists y \in l_1$ tal que $f(x) = T_y(x)$?
1) Si $x = (0, ..., 0, ...)$ entonces tomo $y = (0, ..., 0, ...) \in l_1$ y es obvio que $f(x) = T_y(x)$, ya que $f(x) = 0$ por ser f lineal.

2)Si existe i_0 tal que $x_{i_0} \neq 0$ entonces tomo $y = (0, ..., \frac{f(x)}{x_{i_0}}, ..., 0, ...)$ es claro que $y \in l_1$ y $T_y(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i y_i = \frac{f(x)}{x_{i_0}} x_{i_0} = f(x)$. Luego T es sobreyectiva.

$\rightarrow$ Por último vemos que $\|F(x)\| = \|x\|$, es decir, en nuestro caso particular,

$\|T_y\| = \|y\|_1$ donde $\|T_y\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |T_y(x)|$.

Por un lado $|T_y(x)| = \left| \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i y_i \right| \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i| |y_i| \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} |y_i| \rightarrow \|y\|$ cuando $n \rightarrow \infty$ entonces tenemos que $\|T_y\| \leq \|y\|_1$.

Por otro lado $\|T_y\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |T_y(x)| \geq |T_y(x^n)| \rightarrow \|y\|$ cuando $n \rightarrow \infty$

$\Longrightarrow \|T_y\| = \|y\|_1$.

Ejercicio 7: Para cada $y \in l_\infty$se considera la aplicación $T_y : l_1 \rightarrow \mathbb{K}$ definida por $T_y(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n (x \in l_1)$. Demuestra que $T_y \in (l_1)'$y que la aplicación $T : l_\infty \rightarrow (l_1)'$donde $T(y) = T_y$es un isomorfismo isométrico de l_∞sobre el dual de l_1.

$\rightarrow$ Vemos que Vemos que $T_y \in (l_1)'$, es decir, que es lineal y continua.

1) Ver que es lineal es muy fácil.

2)Vemos que es continua, para ver esto basta ver que, el operador es acotado, es decir, que $\forall x \in l_1$ se tiene que $|F(x)| \leq M \|x\|$ lo vemos

$|T_y(x)| = \left| \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| |y_n| \leq \|y\|_\infty \|x\|_1 \leq M \|x\|_1$ estamos utilizando que $\|y\|_\infty = M \Longrightarrow T_y()$ es continua $\Longrightarrow T_y \in (l_1)'$.

$\rightarrow$ Consideramos ahora la aplicación $T : l_\infty \rightarrow (l_1)'$ donde $T(y) = T_y$. Vemos que es un isomorfismo isométrico de l_∞ sobre $(l_1)'$.

1) Ver que es lineal es muy fácil y similar a lo hecho anteriormente.

2) Vemos que es isomorfismo (isométrico) para ello utilizamos la caracterización que dice que: X, Y son isomorfos, si y sólo, si $\exists F : X \rightarrow Y$ lineal y sobreyectiva tal que $\alpha \|x\| \leq \|F(x)\| \leq \beta \|x\| \; \forall x \in X$.

• Vemos que es sobreyectiva:

Sea $f \in (l_1)' \Longrightarrow f : l_1 \rightarrow \mathbb{K}$, ¿$\exists y \in l_1$ tal que $f(x) = T_y(x)$?

1) Si $x = (0, ..., 0, ...)$ entonces tomo $y = (0, ..., 0, ...) \in l_\infty$ y es obvio que $f(x) = T_y(x)$ ya que $f(x) = 0$ por ser f lineal.

2)Si existe i_0 tal que $x_{i_0} \neq 0$ entonces tomo $y = (0, ..., \frac{f(x)}{x_{i_0}}, ..., 0, ...)$ es claro que $y \in l_\infty$ y $T_y(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i y_i = \frac{f(x)}{x_{i_0}} x_{i_0} = f(x)$. Luego T es sobreyectiva.

$\to$ Por último vemos que $\|F(x)\| = \|x\|$, es decir, en nuestro caso particular,

$\|T_y\| = \|y\|_\infty$ donde $\|T_y\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} |T_y(x)|$.

Por un lado $|T_y(x)| = \left|\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i y_i\right| \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|\,|y_i| \leq \|y\|_\infty \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i| \leq \|y\|_\infty$entonces tenemos que $\|T_y\| \leq \|y\|_\infty$.

Por otro lado $\|y\|_\infty = 1$ considero $x_n = (0, ..., 0, 1^{(n)}, 0, ...) \Longrightarrow x_n \in l_1$ y $\|x_n\|_1$ $\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow |T_y(x_n)| = |y_n| \Longrightarrow \|T_y\| = \sup\limits_{\|x_n\|\leq 1} |y_n| \to \|y\|_\infty$ cuando $n \to \infty$ entonces para este caso $\|T_y\| = \|y\|_\infty$.

Si $\|y\|_\infty \neq 1$ suponemos que $y \neq 0$ por que si $y = 0$ es obvio.

Considero $\hat{y} = \frac{y}{\|y\|_\infty} \Longrightarrow \|\hat{y}\| = 1$ entonces por el caso anterior sabemos que $\|T_{\hat{y}}\| \geq \|\hat{y}\|_\infty$.

Por otro lado $T_y(x) = T_{\hat{y}\|y\|_\infty}(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|y\|_\infty x_k \hat{y}_k = \|y\|_\infty \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \hat{y}_k = \|y\|_\infty T_{\hat{y}}(x)$ entonces tenemos que $\|\|y\|_\infty T_{\hat{y}}\| \geq \|\hat{y}\|_\infty \|y\|_\infty \Longrightarrow \|T_y\| = \|y\|_\infty$ ya que $\|\|y\|_\infty T_{\hat{y}}\| = \|T_y\|$ y $\|\hat{y}\|_\infty = 1 \Longrightarrow \|T_y\| = \|y\|_\infty \Longrightarrow (l_1)' = l_\infty$.