VARIABLE COMPLEJA Y ANÁLISIS FUNCIONAL

(Curso 2001-2002)

HOJA 4

Ejercicio 1. *Halla el orden del cero $z_0 = 0$ para la siguiente función:*

$$(e^z - e^{z^2})\log(1-z);$$

Solución:

<u>Defnción</u>

> *"Sea $f : G \to \mathbb{C}$ holomorfa. Se dice que $f(z)$ tiene un cero de orden m en $z_0 \in G$ si existe $g : G \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $g(z_0) \neq 0$ y $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$. Equivalentemente si*
>
> $$f(z_0) = f'(z_0) = ... = f^{m-1)}(z_0) = 0 \quad y \quad f^{m)}(z_0) \neq 0"$$

Entonces, para calcular el orden de esta función vamos a calcular las derivadas en $z = 0$ hasta que sea distinta de cero.

$$f'(z) = (e^z - 2ze^{z^2})log(1-z) + (e^z - e^{z^2})\Big(\frac{-1}{1-z}\Big);$$

$$f'(0) = 0;$$

$$f''(z) = (e^z - 2e^{z^2} - 4z^2e^{z^2})log(1-z) - 2(e^z - 2ze^{z^2})\frac{1}{(1-z)} +$$

$$+(e^z - 2ze^{z^2})\Big(\frac{-1}{1-z}\Big) + (e^z - e^{z^2})\frac{1}{(1-z)^2}$$

$$f''(0) = -2 \neq 0$$

El orden de $z = 0$ para la función f es 2.

Ejercicio 2. *Sea $D = D(0;2)$. ¿Existe alguna función holomorfa en D que verifique $f\left(\frac{i}{n}\right) = -\frac{1}{n^2}$ y $f\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n}$, $n = 5, 6, 7...$?*

Solución:

Para resolver este problema es necesario el Principio de Identidad, enunciado a continuación.

<u>Principio de Identidad</u>:

> *"Sean f,$g : G \to \mathbb{C}$ holomorfas.*
>
> *$f = g \Leftrightarrow \{z \in G / f(z) = g(z)\}$ tiene un punto de acumulación en G."*

Supongamos que existe una función f holomorfa en D tal que verifique $f\left(\frac{i}{n}\right) = -\frac{1}{n^2}$ y $f\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n}$, $n = 5, 6, 7....$

Las sucesiones $\{\frac{i}{n}\}$ y $\{\frac{n+1}{n}\}$ tienen un punto de acumulación dentro del disco D, que es 0 y 1, respectivamente.

Considerando la función holomorfa $g(z) = z^2$, se ve que:

$$g\left(\frac{i}{n}\right) = f\left(\frac{i}{n}\right) = -\frac{1}{n^2}.$$

Aplicando el Principio de Identidad se tiene:

$\{\frac{i}{n}\}$ tiene un punto de acumulación en $D \Leftrightarrow f = g$

Considerando la función holomorfa $h(z) = z - 1$, se ve que:

$$h\left(\frac{n+1}{n}\right) = f\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

Aplicando el Principio de Identidad se tiene:

$\frac{n+1}{n}$ tiene un punto de acumulación en $D \Leftrightarrow f = h$

De lo anterior se deduce que las funciones h y g son iguales, que es absurdo. Esta contradicción viene de suponer que existe una función f holomorfa en D tal que verifique $f\left(\frac{i}{n}\right) = -\frac{1}{n^2}$ y $f\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n}$, $n = 5, 6, 7....$

Por tanto, no existe dicha función.

Ejercicio 3. *Clasifica las singularidades de la siguiente función:*

$$f(z) = \frac{z}{senz}$$

Solución:

Las singularidades de la función f son:

$$z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Se distinguen dos casos:

<u>Si $z = 0$</u>:

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{cosz} = 1$$

Entonces $z = 0$ es una singularidad evitable.

<u>Si $z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} - \{0\}$</u>:

$$\lim_{z \to k\pi} \frac{(z - k\pi)z}{senz} = \lim_{z \to k\pi} \frac{2z - k\pi}{cosz} =$$

$$= \begin{cases} -k\pi \neq 0 \quad si \quad k \quad impar \\ k\pi \neq 0 \quad si \quad k \quad par \end{cases}$$

Luego, son polos de orden 1.

Ejercicio 4. *Desarrolla en serie de Laurent:*

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}, \quad en\ 1 < |z| < 2\ y\ en\ 0 < |z-1| < 1$$

Solución:

<u>Desarrollo en $1 < |z| < 2$</u>

La función f se puede escribir de la siguiente forma:

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-2}$$

El desarrollo en serie de Laurent de $\frac{1}{z-1}$ en este anillo es:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

ya que $1 < |z| < 2$, y por tanto, $\frac{1}{2} < |\frac{1}{z}| < 1$.
El desarrollo en serie de Laurent de $\frac{1}{z-2}$ en este anillo es:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

ya que $1 < |z| < 2$, y por tanto, $|\frac{z}{2}| < 1$.
El desarrollo en serie de Laurent de f es:

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2}}z^n = -\Big(\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n + \frac{1}{2}z^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2}}z^n\Big)$$

Desarrollo en $0 < |z-1| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-2}$$

El desarrollo en serie de Laurent de $\frac{1}{z}$ en este anillo es:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$

ya que $|z-1| = |1-z| < 1$.
El desarrollo en serie de Laurent de $\frac{1}{z-2}$ en este anillo es:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{-1-(1-z)} = \frac{-1}{1-(z-1)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$$

ya que $|z-1|<1$.

El desarrollo en serie de Laurent de f es:

$$f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n=$$

$$=-\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2}(-1)^n-\frac{1}{2}\Big)(z-1)^n=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{2n+1}$$

El resultado final es entonces:

$$\boxed{\frac{1}{z(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{2n+1}}$$

Ejercicio 5. *Calcula el residuo de la función siguiente en el punto indicado:*

$$f(z)=\tfrac{z^2}{z^4-1},\quad en\ z_0=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Solución:

Expresando la singularidad z_0 de la siguiente forma:

$$z_0=e^{i\frac{\pi}{2}}=i;$$

y la función f:

$$f(z)=\frac{z^2}{z^4-1}=\frac{z^2}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}$$

Observamos que es un polo de orden 1.

Sea $g(z)=(z-i)f(z)$. Entonces:

$$Res(f,e^{i\frac{\pi}{2}})=g(e^{i\frac{\pi}{2}})=g(i)=\frac{1}{4i}$$

Ejercicio 6. *Calcula:*

$$\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{(1-z)^3} dz$$

Solución:

En este ejercicio se aplica el Teorema del Residuo, enunciado a continuación.

<u>Teorema del Residuo</u>:

"Sea $f : G - \{a_1, ...a_m\} \rightarrow \mathbb{C}$ función holomorfa; $a_1, ...a_m$ singularidades aisladas de f.

Sea γ de clase 1 a trozos, cerrada, $Im\gamma \subset G$, tal que γ no pasa por ningún a_i y $\gamma \approx 0$ (en G). Entonces:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Ind(\gamma, a_k) Res(f, a_k)."$$

Como la función tiene un polo de orden 3 en $z = 1$, sabemos que:

$$Res(f, 1) = \frac{1}{2!} g''(1),$$

siendo $g(z) = e^z$.

Como, $g''(z) = e^z$, entonces $g''(1) = e$.

Aplicando el Teorema del Residuo a nuestro problema y considerando el camino $\gamma \equiv \{z/|z-1| = \frac{1}{2}\}$ orientado positivamente se obtiene:

$$\int_\gamma f(z)dz = \pi i e$$

Ejercicio 7. *Determina el número de raíces de la ecuación siguiente en los recintos indicados:*

$$f(z) = z^4 - 5z + 1 = 0;$$

en el círculo $|z| < 1$ *y en el anillo* $1 < |z| < 2$.

Solución:

En este ejercicio se utiliza el Teorema de Rouché que se enuncia a continuación, para determinar el número de ceros del polinomio $f(z)$ tanto en el interior del círculo unidad como en el interior del anillo $1 < |z| < 2$:

<u>TEOREMA DE ROUCHE</u> (Para funciones holomorfas)

> *"Sean* $f, g : G \to \mathbb{C}$ *holomorfas.*
>
> $\bar{D}(a, R) \subset G$, $\gamma \equiv \{z/|z - a| = R\}$.
>
> *Supongamos que* f *y* g *no tienen ceros en* $Im\gamma$.
>
> *Si* $|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$ *en* $|z - a| = R$
>
> *Entonces* f *y* g *tienen el mismo número de ceros contando su*
>
> *multiplicidad en* $D(a, R)$.

<u>Para $|z| < 1$</u>:

Para resolver este caso usaremos la función auxiliar:

$$g(z) = 5z - 1$$

Si $|z| = 1$:

$$|f(z) + g(z)| = |z^4| = 1 < |5z - 1| = |g(z)|$$

f y g son funciones holomorfas. Como es claro que g tiene un único cero en $D(0, 1)$, que es $z = \frac{1}{5}$, por el Teorema de Rouche f tiene también exactamente un cero en $D(0, 1)$.

<u>Para $1 < |z| < 2$</u>:

En este caso usaremos la función auxiliar:

$$g(z) = -z^4$$

Si $|z| = 2$:

$$|f(z) + g(z)| = |5z - 1| \leq 11 < 16 = |z^4| = |g(z)|$$

f y g son funciones holomorfas. Por el Teorema de Rouche, f y g tienen el mismo número de ceros en $D(0, 2)$, y f tiene cuatro ceros en $D(0, 2)$ contados con su multiplicidad.

Por tanto, en el anillo $1 < |z| < 2$ la función f tiene exactamente tres ceros.