EJERCICIOS DE ANÁLISIS FUNCIONAL
(Asignatura VCAF)
HOJA 4

Ejercicio 1: Demostrar que los siguientes operadores son lineales, acotados y hallar sus normas (para el punto h sólo estimar la norma).

a) $A : C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau.$

$\to$ La linealidad es claro, por que las integrales tienen la propiedad de ser lineales luego:

$A((\lambda x + \mu y)(t)) = \int\limits_0^t (\lambda x + \mu y)(\tau)d\tau = \int\limits_0^t \lambda x(\tau) + \mu y(\tau)d\tau = \int\limits_0^t \lambda x(\tau)d\tau +$
$+ \int\limits_0^t \mu y(\tau)d\tau = \lambda \int\limits_0^t x(\tau)d\tau + \mu \int\limits_0^t y(\tau)d\tau = \lambda A(x(t)) + \mu A(y(t)).$

$\to$ Vemos que es acotado:

Por definición $A : X \to Y$ es acotado, si existe $c > 0$ tal que para cualquier x, que pertenece a la bola cerrada de centro cero y radio uno, se tiene que $\|Ax\| \leq c$. Sea entonces $x \in C[0,1]$ tal que $\|x\| \leq 1 \Longrightarrow \|Ax\| = \max\limits_{t\in[0,1]} \left| \int\limits_0^t x(\tau)d\tau \right| \leq$

$\leq \max\limits_{t\in[0,1]} \int\limits_0^t |x(\tau)|\, d\tau \leq \max\limits_{t\in[0,1]} \int\limits_0^t 1d\tau \leq 1.$

Luego tomando $c = 1$ se cumple la definición luego esta acotado.

$\to$ Calculamos su norma:

Por definición $\|A\| = \sup\limits_{\substack{x\in X \\ \|x\|\leq 1}} \|Ax\|$, es claro que $\|A\| \leq 1$, ya que por lo anterior, sabemos que $\|Ax\| \leq 1\ \forall x \in C[0,1]$ tal que $\|x\| \leq 1$.

Vemos que $\exists x \in C[0,1]$ tal que $\|x\| \leq 1$ en el que se tiene $\|Ax\| = 1$, si tomamos $x(t) = 1\ \forall t \in [0,1]$

$\Longrightarrow Ax(t) = \int\limits_0^t 1d\tau \Longrightarrow \|Ax\| = \max\limits_{t\in[0,1]} \int\limits_0^t 1d\tau = 1.$

b) $A : C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = t^2 x(0).$

$\to$ Vemos que el operador es lineal:

$A((\lambda x + \mu y)(t)) = t^2(\lambda x + \mu y)(0) = t^2\lambda x(0) + t^2\mu y(0) = \lambda t^2 x(0) + \mu t^2 y(0) =$
$= \lambda A(x(t)) + \mu A(y(t)).$

$\to$ Vemos que es acotado:

Por definición $A : X \to Y$ es acotado, si existe $c > 0$ tal que para cualquier x que pertenece a la bola cerrada de centro cero y radio uno, se tiene que $\|Ax\| \leq c$. Sea entonces $x \in C[0,1]$ tal que $\|x\| \leq 1 \Longrightarrow \|Ax\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |Ax(t)| = \max\limits_{t\in[0,1]} |t^2 x(0)| \leq$

$\leq (1)^2 \, |x(0)| \leq 1.$

Luego tomando $c = 1$ se cumple la definición luego esta acotado.

$\rightarrow$ Calculamos su norma:

Por definición $\|A\| = \sup\limits_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|Ax\|$, es claro que $\|A\| \leq 1$, ya que por lo anterior, sabemos que $\|Ax\| \leq 1 \; \forall x \in C[0,1]$ tal que $\|x\| \leq 1$.

Vemos que $\exists x \in C[0,1]$ tal que $\|x\| \leq 1$ en el que se tiene $\|Ax\| = 1$ si tomamos $x(t) = 1 \; \forall t \in [0,1] \Longrightarrow Ax(t) = t^2 x(0) = t^2$

$\Longrightarrow \|Ax\| = \max\limits_{t \in [0,1]} |t^2| = 1.$

c) $A : C[0,1] \rightarrow C[0,1], \; Ax(t) = x(t^2).$

$\rightarrow$ Vemos que el operador es lineal:

$A((\lambda x + \mu y)(t)) = (\lambda x + \mu y)(t^2) = \lambda x(t^2) + \mu y(t^2) = \lambda A(x(t)) + \mu A(y(t)).$

$\rightarrow$ Vemos que es acotado:

Por definición $A : X \rightarrow Y$ es acotado, si existe $c > 0$ tal que para cualquier x que pertenece a la bola cerrada de centro cero y radio uno, se tiene que $\|Ax\| \leq c$. Sea entonces $x \in C[0,1]$ tal que $\|x\| \leq 1 \Longrightarrow \|Ax\| = \max\limits_{t \in [0,1]} |Ax(t)| = \max\limits_{t \in [0,1]} |x(t^2)| \leq 1.$

Luego tomando $c = 1$ se cumple la definición luego esta acotado.

$\rightarrow$ Calculamos su norma:

Por definición $\|A\| = \sup\limits_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|Ax\|$, es claro que $\|A\| \leq 1$, ya que por lo anterior, sabemos que $\|Ax\| \leq 1 \; \forall x \in C[0,1]$ tal que $\|x\| \leq 1$.

Vemos que $\exists x \in C[0,1]$ tal que $\|x\| \leq 1$ en el que se tiene $\|Ax\| = 1$, si tomamos $x(t) = 1 \; \forall t \in [0,1] \Longrightarrow Ax(t) = x(t^2) \Longrightarrow \|Ax\| = \max\limits_{t \in [0,1]} |1| = 1.$

d) $A : C'[a,b] \rightarrow C[a,b], \; Ax(t) = x(t).$

$\rightarrow$ Vemos que el operador es lineal:

$A((\lambda x + \mu y)(t)) = (\lambda x + \mu y)(t) = \lambda x(t) + \mu y(t) = \lambda A(x(t)) + \mu A(y(t)).$

$\rightarrow$ Vemos que es acotado:

Por definición $A : X \rightarrow Y$ es acotado, si existe $c > 0$ tal que para cualquier x que pertenece a la bola cerrada de centro cero y radio uno, se tiene que $\|Ax\| \leq c$. Sea entonces $x \in C'[0,1]$ tal que $\|x\| \leq 1 \Longleftrightarrow \left(\max\limits_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max\limits_{t \in [0,1]} |x'(t)| \right) \leq 1$

$\Longrightarrow \|Ax\| = \max\limits_{t \in [0,1]} |Ax(t)| = \max\limits_{t \in [0,1]} |x(t)| \leq 1.$

Luego tomando $c = 1$ se cumple la definición luego esta acotado.

$\rightarrow$ Calculamos su norma:

Por definición $\|A\| = \sup\limits_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|Ax\|$, es claro que $\|A\| \leq 1$, ya que por lo anterior, sabemos que $\|Ax\| \leq 1 \; \forall x \in C'[0,1]$ tal que $\|x\| \leq 1$. Vemos que $\exists x \in C'[0,1]$ tal que

$\|x\| \leq 1$ en el que se tiene $\|Ax\| = 1$, si tomamos $x(t) = 1$ $\forall t \in [0,1] \Longrightarrow x'(t) = 0$ $\forall t \in [0,1]$

$\Longrightarrow \|x\| = \left(\max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |x'(t)| \right) = \left(\max\limits_{t\in[0,1]} |1| + \max\limits_{t\in[0,1]} |0| \right) = 1$

Vemos ahora que $\|Ax\| = 1$

$Ax(t) = x(t) = 1 \Longrightarrow \|Ax\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |1| = 1$, luego $\|A\| = 1$.

e) $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax(t) = t \int\limits_0^1 x(\tau) d\tau$.

$\rightarrow$ La linealidad es claro por que las integrales tienen la propiedad de ser lineales luego:

$A((\lambda x + \mu y)(t)) = t \int\limits_0^1 (\lambda x + \mu y)(\tau) d\tau = t \int\limits_0^1 \lambda x(\tau) + \mu y(\tau) d\tau = t \int\limits_0^1 \lambda x(\tau) d\tau +$

$+ t \int\limits_0^1 \mu y(\tau) d\tau = \lambda t \int\limits_0^1 x(\tau) d\tau + \mu t \int\limits_0^1 y(\tau) d\tau = \lambda A(x(t)) + \mu A(y(t))$.

$\rightarrow$ Vemos que es acotado:

Por definición $A : X \to Y$ es acotado, si existe $c > 0$ tal que para cualquier x que pertenece a la bola cerrada de centro cero y radio uno, se tiene que $\|Ax\| \leq c$.

Sea entonces $x \in L_2[0,1]$ tal que $\|x\| \leq 1 \Longleftrightarrow \left(\int\limits_0^1 |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq 1$.

Por otro lado $\|Ax(t)\| = \left\| t \int\limits_0^1 x(\tau) d\tau \right\| = \left(\int\limits_0^1 \left| t \int\limits_0^1 x(\tau) d\tau \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} =$

$= \left(\int\limits_0^1 |t|^2 \left(\int\limits_0^1 x(\tau) d\tau \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left(\int\limits_0^1 x(\tau) d\tau \right)^2 \int\limits_0^1 |t|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} =$

$= \left(\int\limits_0^1 x(\tau) d\tau \right) \left(\int\limits_0^1 |t|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int\limits_0^1 |t|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

La penúltima desigualdad se tiene por que por la desigualdad de Hölder se tiene que:

$\int\limits_0^1 |x(\tau)| d\tau \leq \left(\int\limits_0^1 |x(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^1 1 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2 \leq 1$.

$\rightarrow$ Vemos que $\|A\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$:

Por definición $\|A\| = \sup\limits_{\substack{x\in X \\ \|x\|\leq 1}} \|Ax\|$, es claro que $\|A\| \leq 1$, ya que por lo anterior, sabemos que $\|Ax\| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\forall x \in L_2[0,1]$ tal que $\|x\| \leq 1$. Vemos que $\exists x \in L_2[0,1]$ tal que $\|x\| \leq 1$ en el que se tiene $\|Ax\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, si tomamos $x(t) = 1$ $\forall t \in [0,1]$

$\Longrightarrow \|Ax(t)\| = \left(\int\limits_0^1 t^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \|Ax\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

f) $A : C'[a,b] \to C[a,b]$, $Ax(t) = \frac{dx}{dt}$.

→ Vemos que el operador es lineal:
$A((\lambda x+\mu y)(t))=\frac{d(\lambda x+\mu y)}{dt}=\lambda\frac{dx}{dt}+\mu\frac{dy}{dt}=\lambda A(x(t))+\mu A(y(t))$.
→ Vemos que es acotado:

Por definición $A:X\rightarrow Y$ es acotado, si existe $c>0$ tal que para cualquier x que pertenece a la bola cerrada de centro cero y radio uno, se tiene que $\|Ax\|\leq c$. Sea entonces $x\in C'[0,1]$ tal que $\|x\|\leq 1 \iff \left(\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|+\max\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)|\right)\leq 1$ $(\star)$

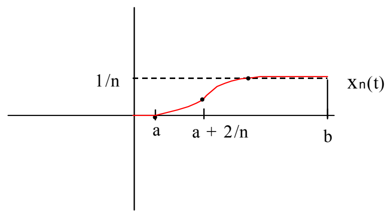
$\Longrightarrow \|Ax(t)\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|Ax(t)|=\max\limits_{t\in[0,1]}\left|\frac{dx}{dt}\right|\leq 1$, esta última desigualdad es por $(\star)$.

Luego tomando $c=1$ se cumple la definición luego esta acotado.

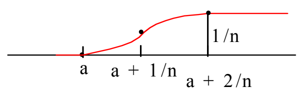
→ Calculamos su norma:

Por definición $\|A\|=\sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|\leq 1}}\|Ax\|$, es claro que $\|A\|\leq 1$, ya que por lo anterior de este mismo apartado sabemos que $\|Ax\|\leq 1$ $\forall x\in C'[0,1]$ tal que $\|x\|\leq 1$.

Por otro lado considero la sucesión $x_n(t):[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ como se observa en el siguente dibujo:



Si ampliamos el dibujo tenemos la siguiente situación:



La pendiente de la gráfica de $x_n(t)$, en $a+\frac{1}{n}$, será $1-\frac{1}{n}$, es decir, $x_n(a+\frac{1}{n})=1-\frac{1}{n}$.
Luego tenemos la siguiente situación:
$0\le x_n'(t)\le 1-\frac{1}{n}$.
$0\le x_{n(t)}\le \frac{1}{n}$ si $t\in[a,a+\frac{2}{n}]$.
$x_n(t)=\frac{1}{n}$ si $t\ge a+\frac{2}{n}$.
Luego $\|x_n(t)\|=\left(\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|+\max\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)|\right)=\frac{1}{n}+1-\frac{1}{n}=1.$
Por otro lado $\|Ax_n(t)\|=\|x_n'(t)\|_\infty=1-\frac{1}{n}\to 1$ cuando $n\to\infty$
$\Longrightarrow \|A\|=1.$

g) $A_\lambda: L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, $A_\lambda x(t)=\left\{\begin{smallmatrix} x(t),\ t\le\lambda\ \lambda\in(0,1)\\ 0,\ t>\lambda\ \lambda\in(0,1)\end{smallmatrix}\right\}$.

$\to$ La linealidad es claro por que las integrales tienen la propiedad de ser lineales luego:
$A((\lambda x+\mu y)(t))=\left\{\begin{smallmatrix}(\lambda x+\mu y)(t)\text{ si }t\le\lambda\\ 0\text{ si }t>\lambda\end{smallmatrix}\right\}=\lambda A(x(t))+\mu A(y(t)).$
$\to$ Vemos que es acotado:
Por definición $A:X\to Y$ es acotado, si existe $c>0$ tal que para cualquier x que pertenece a la bola cerrada de centro cero y radio uno, se tiene que $\|Ax\|\le c$. Sea entonces $x\in L_2[0,1]$ tal que $\|x\|\le 1\Longleftrightarrow \left(\int\limits_0^1|x(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\le 1$

$\Longrightarrow \left(\int\limits_0^\lambda|x(t)|^2\,dt+\int\limits_\lambda^1|x(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\le 1\ (\star).$

Por otro lado $\|A_\lambda x(t)\|=\left(\int\limits_0^1|A_\lambda x(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int\limits_0^\lambda|x(t)|^2\,dt+\int\limits_\lambda^1|0|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\le$

$\le\left(\int\limits_0^1|x(t)|^2\,dt.\right)^{\frac{1}{2}}\le 1$. La última desigualdad se tiene por $(\star)$.
$\to$ Vemos que $\|A_\lambda\|=1$:
Por definición $\|A\|=\sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|\le 1}}\|Ax\|$, es claro que $\|A\|\le 1$, ya que por lo anterior sabemos que $\|Ax\|\le 1\ \forall x\in L_2[0,1]$ tal que $\|x\|\le 1$.

Por otro lado si tomamos $x(t)=\left\{\begin{smallmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\text{ si }t\le\lambda\\ 0\text{ si }t>\lambda\end{smallmatrix}\right\}\Longrightarrow \|x\|=\left(\int\limits_0^1|x(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}=$
$=\left(\int\limits_0^\lambda\left|\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int\limits_0^\lambda\frac{1}{\lambda}dt\right)^{\frac{1}{2}}=1.$

Por otro lado $\|Ax(t)\|=\left(\int\limits_0^\lambda\left|\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}=1\Longrightarrow\|A\|=1$, ya que para este $x(t)$ hemos visto que el supremo se alcanza.

h) $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, $Ax(t)=\int\limits_0^t x(\tau)d\tau$.

$\rightarrow$ La linealidad es claro por que las integrales tienen la propiedad de ser lineales luego:

$A((\lambda x+\mu y)(t))=\int_0^t(\lambda x+\mu y)(\tau)d\tau=\int_0^t \lambda x(\tau)+\mu y(\tau)d\tau=\int_0^t \lambda x(\tau)d\tau+$
$+\int_0^t \mu y(\tau)d\tau=\lambda\int_0^t x(\tau)d\tau+\mu\int_0^t y(\tau)d\tau=\lambda A(x(t))+\mu A(y(t))$.

$\rightarrow$ Vemos que es acotado:

Por definición $A:X\rightarrow Y$ es acotado, si existe $c>0$ tal que para cualquier x que pertenece a la bola cerrada de centro cero y radio uno, se tiene que $\|Ax\|\leq c$.

Sea entonces $x\in L_2[0,1]$ tal que $\|x\|\leq 1\iff\left(\int_0^1|x(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\leq 1(\star)$.

Por otro lado $\|Ax(t)\|^2=\int_0^1\left|\int_0^t x(\tau)d\tau\right|^2 dt=\int_0^1\left(\int_0^t x(\tau)d\tau\right)^2 dt\leq$
$\leq\int_0^1\left(\int_0^1 x(\tau)d\tau\right)^2 dt\leq\left(\int_0^1|x(\tau)|\,d\tau\right)^2\leq\int_0^1|x(\tau)|^2\,d\tau=\|x\|_2^2\leq 1$ hemos utilizado en la penúltima desigualdad la desigualdad de Hölder.

$\rightarrow$Como en este apartado sólo nos piden estimar la norma podemos decir que $\|A\|\leq 1$.

Ejercicio 2: En el espacio l_2 consideramos el operador A que transforma el elemento $x=(x_1,x_2,...)\in l_2$ en el elemento $Ax=(\lambda_1x_1,\lambda_2x_2,...)$ donde $\lambda_n\in\mathbb{R}$ $(n\in\mathbb{N})$.

a) Demostrar que para cualesquiera λ_n el operador A es lineal.

$A:D(A)\rightarrow l_2$ donde $Ax=(\lambda_1x_1,\lambda_2x_2,...)$.
$A(ax+by)=A(ax_1+by_1,ax_2+by_2,...)=(\lambda_1(ax_1+by_1),\lambda_2(ax_2+by_2),...)=$
$=(\lambda_1ax_1+\lambda_1by_1,\lambda_2ax_2+\lambda_2by_2,...)=(\lambda_1ax_1,\lambda_2ax_2,...)+(\lambda_1by_1,\lambda_2by_2,...)=$
$=a(\lambda_1x_1,\lambda_2x_2,...)+b(\lambda_1y_1,\lambda_2y_2,...)=aAx+bAx$.

b)¿Bajo que condiciones para la sucesión $\lambda_n, D(A)$ coincide con todo el espacio l_2?

La condición necesaria y suficiente es que $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ esté acotada.

$\Longrightarrow$) Si $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada$\Longrightarrow|\lambda_n|\leq M\ \forall n\in\mathbb{N}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2x_n^2\leq M^2\|x\|_2^2<\infty$ $\Longrightarrow D(A)=l_2$.

$\Longleftarrow$) Suponemos que $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada.

Entonces $\exists\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty$ pero $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2x_n^2=\infty$. Para demostrar esto suponemos que no es cierto, es decir, que si $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada $\Longrightarrow\forall\{x_n\}_n$ tal que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in l_2$

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 x_n^2 < \infty.$

Como $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada, podemos suponer sin pérdida de generalidad que, $|\lambda_n| > \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$, ya que si $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no esta acotada tiene una subsucesión que tiende a ∞; y trabajamos con ella y obtenemos un $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que queremos es $x_n = \left\{\begin{smallmatrix} x_{n_k} & \text{si } n_k=n \\ 0 & \text{en otro caso}\end{smallmatrix}\right\}$.

Luego tenemos la hipótesis $|\lambda_n| > \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Considero el operador $L : l_2 \to l_2$ donde $L\left[(x_n)_n\right] = (\frac{1}{\lambda_n} x_n)_n$ es lineal, inyectiva y es sobreyactiva, por suponer que es falsa la afirmación L es continua, ya que $\|L(x)\|_2 \leq \frac{1}{\varepsilon}\|x\|_2$, entonces por el teorema de la aplicación abierta L es isomorfismo; luego L^{-1} es continua pero $\|L^{-1}(e_n)\|_2 = \|\lambda_n e_n\|_2 = |\lambda_n|$ pero esto es una contradicción, ya que $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada entonces L^{-1} no es continua entonces teníamos lo que queríamos.

c)¿Bajo que condiciones para la sucesión λ_n,el operador A es acotado y cuál será su norma?

Para que sea acotado hay que pedir $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| = M < \infty$ ya que si $x \in l_2$ tal que $\|x\| \leq 1 \Longleftrightarrow \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 1.$

$\|Ax\|_2 = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} M^2 |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = M\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq M.$

Por otro lado si A es acotado $\Longrightarrow \|A\| \leq M < \infty \Longrightarrow \|Ae_i\| \leq \|A\| \|e_i\|_2$ donde $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$, donde la coordenada i-ésima es 1$\Longleftrightarrow |\lambda_i| \leq \|A\|$

$\Longrightarrow \sup|\lambda_i| \leq \|A\| \leq M < \infty.$

$\to$ Vemos que $\|A\| = \sup|\lambda_i|$, pero esto es claro, ya que por lo anterior tenemos que $\|A\| \leq \sup|\lambda_i|$ y $\|A\| \geq \sup|\lambda_i| \Longrightarrow \|A\| = \sup|\lambda_i|$.

d)Si A es un operador acotado, ¿existe siempre $x \in l_2$ $x \neq 0$ tal que $\|Ax\| = \|A\| \|x\|$?

No, si tomamos $\lambda_n = 1 - \frac{1}{n}$ es claro que entonces $\|A\| = 1$.

Por otro lado si tomo $x \in l_2$ tal que $\|x\|_2^2 \leq 1$, es decir, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \leq 1$, se tiene que

$\|Ax\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |x_n|^2 \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n}) |x_n|^2 < 1$ entonces no existe $x \in l_2$ tal que $x \neq 0$ tal que $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$.

e)¿Bajo que condiciones para la sucesión λ_n, $R(A)$ es un subespacio cerrado de l_2?

La condición necesaria y suficiente es que $\inf\limits_{\lambda_k \neq 0} |\lambda_k| > 0$.

Vemos primero que: $A(l_2)$ es cerrado $\Longleftrightarrow A(l_2) = l_2$.

$\Longrightarrow$) 1) Si algún $\lambda_k = 0 \Longrightarrow A(l_2) \subset \{x : x_k = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_k = 0\}$, luego para ver que $A(l_2)$ es cerrado, basta verlo en el caso en que $\lambda_k \neq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$.

2) Si $\lambda_k \neq 0 \ \forall k \Longrightarrow |\lambda_k| \geq \varepsilon > 0 \ \forall k \in \mathbb{N} \Longrightarrow A(l_2) = l_2$, ya que $\forall y \in l_2$ tomo $\left\{\frac{y_k}{\lambda_k}\right\}$ y se tiene que :

$\star \left\{\frac{y_k}{\lambda_k}\right\} \in l_2$ ya que $\sum \left(\frac{y_k}{\lambda_k}\right)^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum y_k^2 < \infty$.

$\star A(\frac{y_k}{\lambda_k}) = y$ es obvio.

Por otro lado $A(l_2) \supset \varphi = \{x : x_n$ es eventualmente $0\} \Longrightarrow$ como $A(l_2)$ es cerrado, $A(l_2)$ contiene a la clausura de φ que es l_2.

$\Longleftarrow$) Obvio.

Vemos ahora que: $A(l_2)$ es subespacio cerrado $\Longleftrightarrow \inf\limits_{\lambda_k \neq 0} |\lambda_k| > 0$.

$\Longrightarrow$) Obvio.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $\{\lambda_k\} \to 0$ entonces existe $(x_k) \in l_2$ tal que $\left(\frac{x_k}{\lambda_k}\right) \notin l_2$ (por un resultado que demostamos en b)) $\Longrightarrow A(l_2) \neq l_2 \Longrightarrow A(l_2)$ no es cerrado.

Ejercicio 3: En el espacio l_2, para un elemento $x = (x_1, x_2, ...) \in l_2$ pongamos las sucesiones de operadores

$A_n x = \left(\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, ...\right)$ **y** $B_n x = (0, 0, ..., 0, x_{n+1}, x_{n+2}, ...)$, $n \in \mathbb{N}$ **donde son cero las n primeras coordenadas.**

¿Cual es el caracter de la convergencia de cada una de las sucesiones?

$\to$ La sucesión A_n converge hacia el operador nulo uniformemente, Vamos a comprobarlo.

Por definición, A_n se dice uniformemente convergente hacia el operador A, y se denota $A_n \to A$ cuando $\|A_n - A\| \to 0$ donde$\|A_n - A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|A_n x - Ax\|$.

Es claro que $A \equiv 0 \Longrightarrow$tenemos lo siguiente.

$\|A_n x - 0\| = \|A_n x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left|\frac{x_i}{n}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i|^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{n}$ pero $\frac{1}{n} \to 0$ ya que $n \to \infty$

$\Longrightarrow \|A_n - A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|A_n x - Ax\| \to 0$ luego tenemos la convergencia uniforme.

$\to$ La sucesión B_n converge puntualmente al operador nulo. Vamos a comprobarlo.

Sea $x \in l_2$

$\Longrightarrow \|B_n x - Bx\| = \|B_n x - 0\| = \|B_n x\| = \left(\sum_{i=0}^{n} |0|^2 + \sum_{i=n}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Luego se tiene la convergencia puntual a 0.

Pero B_n no converge uniformemente a 0 ya que $\|B_n\| = 1 \ \forall n$.

Veamos que efectivamente $\|B_n\| = 1$.

Por un lado $\|B_n(x)\| \leq \|x\| \Longrightarrow \|B_n\| \leq 1$.

Por otro lado $\|B_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|B_n(x)\| \geq \|B_n(e_{n+1})\| = 1$.

Ejercicio 4: Consideremos el operador $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax = \int_0^t e^\tau x(\tau) d\tau$ **la sucesión de operadores** $A_n : C[0,1] \to C[0,1]$, $A_n x(t) = \int_0^t \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\tau^k}{k!}\right] x(\tau) d\tau, n \in \mathbb{N}$.

¿Converge la sucesión A_n hacia A?¿Cuál es el caracter de la convergencia?

$\to$ Si converge, la sucesión A_n converge a A uniformemente. Vemos esta convergencia.

$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|A_n x - Ax\|$ donde $\|A_n x - Ax\| = \max_{t\in[0,1]} \|A_n x - Ax\|$, pero esta convergencia está clara, ya que $\sum_{k=0}^{n} \frac{\tau^k}{k!} \to e^\tau$ si $n \to \infty$

$\Longrightarrow \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\tau^k}{k!} - e^\tau\right] \to 0$ si $n \to \infty$.

Luego se tiene que $|A_n x - Ax| = \left|\int_0^t \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\tau^k}{k!}\right] x(\tau) d\tau - e^\tau x(\tau) d\tau\right| \leq$

$\leq \int_0^t \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{\tau^k}{k!} - e^\tau\right| x(\tau) d\tau \to 0$ si $n \to \infty$.

Luego $\|A_n x - Ax\| \to 0$ si $n \to \infty \Longrightarrow \|A_n - A\| \to 0$ si $n \to \infty$.

Ejercicio 5: En el espacio de Hilbert H el operador de proyección ortogonal sobre el subespacio $L \subset H$ para $x = u + v$ siendo $u \in L$ y $v \in L^\perp$, se define por la igualdad $Px = u$.

Demostrar que el operador P es acotado y hallar su norma.

$\to$ Vemos que P es acotado.

$P : H \to H$, $P(x) := u$, sea $x \in H$ tal que $\|x\| \leq 1 \Longrightarrow \|x\|^2 \leq 1$

$\Longrightarrow \|u + v\|^2 = \langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle + 2\langle u, v\rangle \leq 1 \Longleftrightarrow \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle \leq 1$.

Por otro lado sabemos que $u \in L$ y $v \in L^\perp \Longrightarrow \langle u, v\rangle = 0 \Longrightarrow 2\langle u, v\rangle = 0$ y $\|v\|^2 \geq 0 \Longrightarrow \|u\|^2 + \|v\|^2 \leq 1 \Longrightarrow \|u\|^2 \leq 1$.

Luego tenemos que $\|Px\| = \|u\| \leq 1 \Longrightarrow P$ está acotado.

$\rightarrow$ Vemos que $\|P\| = 1$.

Sabemos que $\|P\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Px\|$, entonces por el apartado anterior $\|P\| \leq 1$.

Por otro lado si $x = u \in L$ tal que $u \neq 0$, puedo suponer que $\|x\| = \|u\| = 1$, ya que sino tomo $u' := \frac{u}{\|u\|} \Longrightarrow \|x\| = 1$, en particular $\|x\| \leq 1$, y además se verifica que:

$\|Px\| = \|u\| = \|x\| = 1$ entonces con esto vemos que el supremo se alcanza y por tanto $\|P\| = 1$.