VARIABLE COMPLEJA Y ANÁLISIS FUNCIONAL

(Curso 2001-2002)

HOJA 3

Ejercicio 1. *Aplicando la fórmula integral de Cauchy, calcula la siguiente integral:*

$$\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{z e^{\frac{1}{z+2}}} dz;$$

Solución:

<u>Fórmula Integral de Cauchy</u>

> *"$G \subset \mathbb{C}$ abierto, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorfa. $\gamma_1, ..., \gamma_m$ de clase 0 a trozos cerrados, tales que*
>
> $$\sum_{k=1}^{m} Ind(\gamma_k, w) = 0, \quad \forall w \notin G$$
>
> *Entonces:*
>
> $$f^{n)}(a) \sum_{k=1}^{m} Ind(\gamma_k, a) = \frac{n!}{2\pi i} \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz,$$
>
> $$\forall a \in G - \bigcup_{k=1}^{m} Im(\gamma_k), \quad \forall n \geq 0"$$

Sea $g(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{e^{\frac{1}{z+2}}}$ que se trata de una función holomorfa en el disco $D(0,1)$, ya que $cosz \neq 0$ en dicho disco. Se tiene:

$$\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{z e^{\frac{1}{z+2}}} dz = \int_{|z|=1} \frac{g(z)}{z} dz$$

Aplicando la fórmula integral de Cauchy, considerando el camino $\gamma \equiv \{|z| = 1\}$, orientado positivamente, se obtiene:

Como:

$$Ind(\gamma, 0) = 1$$

entonces:

$$\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{z e^{\frac{1}{z+2}}} dz = \int_{|z|=1} \frac{g(z)}{z} dz = 2\pi i g(0) = 2\pi i \frac{\operatorname{tg} 0}{e^{\frac{1}{2}}} = 0$$

$$\boxed{\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{z e^{\frac{1}{z+2}}} dz = 0}$$

Ejercicio 2. *Calcular*

$$\int_{|z-2|=3} \frac{\cosh e^{i\pi z}}{z^3 - 4z^2} dz$$

Solución:

Se expresa el integrando como suma de fracciones simples:

$$\int_{|z-2|=3} \frac{\cosh e^{i\pi z}}{z^3 - 4z^2} dz = -\frac{1}{4} \int_{|z-2|=3} \Big(\frac{1}{4} z + 1\Big) \frac{\cosh e^{i\pi z}}{z^2} dz +$$

$$+ \frac{1}{16} \int_{|z-2|=3} \frac{\cosh e^{i\pi z}}{z - 4} dz$$

Sean $g_1(z) = \Big(\frac{1}{4} z + 1\Big) cosh(e^{i\pi z})$ y $g_2(z) = \cosh e^{i\pi z}$ holomorfas en todo el plano, en particular en el disco $D(2,3)$.

Sea $\gamma \equiv \{|z-2| = 3\}$ orientado positivamente.

Aplicando la fórmula integral de Cauchy, enunciada en el ejercicio 1:

Como

$$Ind(\gamma; 0) = 1$$
$$Ind(\gamma; 4) = 1$$

entonces:

$$\int_{|z-2|=3} \frac{\cosh e^{i\pi z}}{z^3 - 4z^2} dz = 2\pi i \Big[-\frac{1}{4} g_1'(0) + \frac{1}{16} g_2(4) \Big] = 2\pi i \Big[-\frac{1}{4} \Big(\frac{1}{4} \Big(\frac{e + e^{-1}}{2} \Big) +$$

$$+i\pi\Big(\frac{e-e^{-1}}{2}\Big)\Big)+\frac{1}{16}\Big(\frac{e+e^{-1}}{2}\Big)\Big]=$$

$$=\frac{\pi^2}{4}(e-e^{-1})$$

$$\boxed{\int_{|z-2|=3}\frac{\cosh e^{i\pi z}}{z^3-4z^2}dz=\frac{\pi^2}{4}(e-e^{-1})}$$

Ejercicio 3. *Calcula la integral:*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+\pi^2}$$

siendo $\gamma(\theta)=\theta e^{i\theta}$ *para* $0\leq\theta\leq 2\pi$ *y* $\gamma(\theta)=4\pi-\theta$ *para* $2\pi\leq\theta\leq 4\pi$.

Solución:

La función $f(z)=\frac{1}{z^2+\pi^2}$ tiene dos polos: $z=-i\pi$ y $z=i\pi$. Sólo $z=-i\pi$ está en el interior del recinto delimitado por la curva γ, que llamaremos R_γ.

Sea $g(z)=\frac{1}{z-i\pi}$ una función holomorfa en R_γ.

Tomando el camino γ orientado positivamente, se aplica la Fórmula Integral de Cauchy enunciada en el ejercicio 1 y se tiene que:

$$Ind(\gamma;-i\pi)=1$$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+\pi^2}=2\pi i(g(-i\pi))=-1$$

Ejercicio 4. *Sea* Γ *el ciclo compuesto por el camino* $\partial D(0,3)$ *recorrido en sentido directo y el camino* $\partial D(0,1)$ *recorrido en sentido inverso. Calcula*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{z^2-2}{z}dz$$

Solución:

La función $g(z)=z^2-2$ es entera. Consideremos $\gamma_1=\partial D(0,3)$ y $\gamma_2=\partial D(0,1)$. Aplicando la Fórmula Integral de Cauchy, enunciada en el ejercicio 1, se obtiene:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{z^2-2}{z}dz=\frac{1}{2\pi i}\Big[\int_{\gamma_1}\frac{z^2-2}{z}dz+\int_{\gamma_2}\frac{z^2-2}{z}dz\Big]=$$

$$=g(0)(Ind(\gamma_1,0)+Ind(\gamma_2,0))=g(0)(1-1)=0.$$