# EJERCICIOS DE ANÁLISIS FUNCIONAL
# (Asignatura VCAF)
# HOJA 3

**Ejercicio 1:Demostrar que en un espacio con el producto escalar, para cualesquiera elementos $x, y, z$ tiene lugar la identidad de Apolonio, que es la siguiente:**
$\|z-x\|^2+\|z-y\|^2=\frac{1}{2}\|x-y\|^2+2\left\|z-\frac{x+y}{2}\right\|^2$

Como la norma proviene de un producto escalar, si desarrollamos tenemos lo siguiente:
$\|z-x\|^2+\|z-y\|^2=\left(\sqrt{\langle z-x, z-x\rangle}\right)^2+\left(\sqrt{\langle z-y, z-y\rangle}\right)^2=$
$=\langle z-x, z-x\rangle+\langle z-y, z-y\rangle=\langle z, z-x\rangle+\langle z, z-y\rangle-\langle x, z-x\rangle-\langle y, z-y\rangle=$
$=\langle z, z\rangle-\langle z, x\rangle-\langle x, z\rangle+\langle x, x\rangle+\langle z, z\rangle-\langle z, y\rangle-\langle y, z\rangle+\langle y, y\rangle+\langle x, y\rangle-\langle x, y\rangle=$
$=\frac{1}{2}\langle x, x\rangle+\frac{1}{2}\langle y, y\rangle-\langle x, y\rangle+2\langle z, z\rangle-2\langle z, x\rangle+\frac{1}{2}\langle x, x\rangle+\frac{1}{2}\langle y, y\rangle$
$-2\langle z, y\rangle+\langle x, y\rangle=\frac{1}{2}\|x-y\|^2+2(\langle z, z\rangle-\langle z, x\rangle+\frac{1}{4}\langle x, x\rangle+\frac{1}{4}\langle y, y\rangle-\langle z, y\rangle+\frac{1}{2}\langle x, y\rangle).$
Por otro lado si desarrollamos la norma tenemos lo siguiente:
$\left\|z-\frac{x+y}{2}\right\|^2=\langle z-\frac{x+y}{2}, z-\frac{x+y}{2}\rangle=\langle z, z\rangle-\langle z, \frac{x+y}{2}\rangle-\langle\frac{x+y}{2}, z\rangle+\langle\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\rangle=$
$=\langle z, z\rangle-\langle z, x\rangle+\frac{1}{4}\langle x, x\rangle+\frac{1}{4}\langle y, y\rangle-\langle z, y\rangle+\frac{1}{2}\langle x, y\rangle.$
Y como podemos observar coincide con lo que nos había salido anteriormente, luego se tiene la igualdad.

**Ejercicio 2:Demostrar que en el espacio $C[0,1]$ no se puede introducir el producto escalar coordinado con la norma de este espacio.**

Como estamos considerando $C[0,1]$ en $\mathbb{R}$ el producto escalar coordinado vendría dado por la siguiente expresión.
$\langle x, y\rangle=\frac{1}{4}\left\{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right\}$
Vemos que si la norma es $\|\|_{C[0,1]}$ entonces no obtenemos un producto escalar según la definición, antes dada. Vemos que no se cumple la siguiente propiedad $\langle x+y, z\rangle=\langle x, z\rangle+\langle y, z\rangle$.
Sea $x=x(t)\equiv t^2-1$ , $y=y(t)\equiv 1$ , $z=z(t)\equiv -t^2$
Por un lado tenemos
$\langle x+y, z\rangle=\frac{1}{4}\left\{\max_{t\in[0,1]}^2|x(t)+y(t)+z(t)|-\max_{t\in[0,1]}^2|x(t)+y(t)-z(t)|\right\}=$
$=\frac{1}{4}\left\{\max_{t\in[0,1]}^2|0|-\max_{t\in[0,1]}^2|t^2-1+1+t^2|\right\}=\frac{1}{4}(-4)=-1$
Por otro lado
$\langle x, z\rangle+\langle y, z\rangle=\frac{1}{4}\left\{\max_{t\in[0,1]}^2|x(t)+z(t)|-\max_{t\in[0,1]}^2|x(t)-z(t)|\right\}+$

$+\frac{1}{4}\left\{\max_{t\in[0,1]}^{2}|y(t)+z(t)|-\max_{t\in[0,1]}^{2}|y(t)-z(t)|\right\}=\frac{1}{4}[\max_{t\in[0,1]}^{2}|-1|-\max_{t\in[0,1]}^{2}|2t^2-1|+$
$+\max_{t\in[0,1]}^{2}|1-t^2|-\max_{t\in[0,1]}^{2}|1+t^2|]=\frac{1}{4}(1-1+0-1)\neq -1$

Luego no se cumple esta propiedad del producto escalar y por tanto no es un producto escalar.

**Ejercicio 3:Demostrar que en el espacio $l_1$ no se puede introducir el producto escalar coordinado con la norma de este espacio.**

Si se pudiera introducir el producto escalar coordinado con la norma de $l_1$, se tendría que verificar la identidad de paralelogramo, que dice:

$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$

Sea $x=(1,0,...,0,...)$ , $y=(0,1,...,0,...)$ entonces se verifica lo siguiente:

$\|x+y\|_1^2=4.$

$\|x-y\|_1^2=4.$

$\|x\|_1=\|y\|_1=1.$

Luego $8=4$, pero esto es una contradicción luego esta norma no verifica la identidad del paralelogramo.

**Ejercicio 4:En el espacio lineal $(C[a,b],\|\|_2)$ de funciones continuas sobre el intervalo, tomamos**

$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=\int_a^b \mathbf{x(t)y(t)dt}$

**¿Es de Hilbert este espacio?**

No, es de Hilbert, por el ejercicio 4 de la hoja 1, sabemos que $(C[a,b],\|\|_2)$ no es de Banach, entonces si vemos que la norma inducida por este producto escalar coincide con $\|\|_2$ ya sabríamos que no es de Hilbert.

$\|\|_{\langle,\rangle}=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\sqrt{\int_a^b x(t)y(t)dt}=\sqrt{\int_a^b |x(t)|^2\,dt}=\|\|_2.$

**Ejercicio 5:En el espacio lineal de sucesiones $x=(x_1,x_2,...)$ tales que $\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty$, tomamos**

$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k y_k$ **donde** $0<\lambda_k<1$

**¿Es de Hilbert este espacio?**

En general, no, es de Hilbert, consideramos la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k$ tal que sea convergente y por tanto dado $\varepsilon>0$ existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=n_0+1}^{\infty}\lambda_k<\varepsilon$.

Consideramos ahora la sucesión $x_n = (1, ..., 1, 0, ..., 0, ...)$ donde son uno las $n$ primeras coordenadas. Entonces para todo $m, n > n_0$ se tiene que:

$\|x_m - x_n\| = \sum_{k=n}^{m} \lambda_k < \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k < \varepsilon$. Luego esta sucesión es de Cauchy.

Por otro lado esta sucesión no converge luego este espacio no es completo, entonces no es Hilbert.

**Ejercicio 6:Demostrar que un espacio de Hilbert es estrictamente normado.**

Para verlo utilizamos el criterio del ejercicio 6 de la hoja 2.

Supongamos $x, y \in s$ con $x \neq y$, es decir, $\|x\| = \|y\| = 1$

Si $\|\alpha x + (1-\alpha)y\| = 1 \ \forall \alpha \in [0,1] \Longleftrightarrow \|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 = 1 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \langle \alpha x + (1-\alpha)y, \alpha x + (1-\alpha)y \rangle = 1 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \langle \alpha x, \alpha x \rangle + \langle (1-\alpha)y, (1-\alpha)y \rangle + 2\langle \alpha x, (1-\alpha)y \rangle = 1 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \alpha^2 \langle x, x \rangle + (1-\alpha)^2 \langle y, y \rangle + 2\alpha(1-\alpha)\langle x, y \rangle = 1$

Como $\|x\| = \|y\| = 1 \Longrightarrow$ de lo anterior se obtiene lo siguiente.

$\alpha^2 + (1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)\langle x, y \rangle = 1 \Longleftrightarrow \langle x, y \rangle = \frac{1-\alpha^2-(1-\alpha)^2}{2\alpha(1-\alpha)} = 1$

$\Longrightarrow \langle x, y \rangle = 1 \Longrightarrow \cos\psi = \frac{\langle x,y \rangle}{\|x\|\|y\|} = 1 \Longrightarrow \psi = 0 + 2\pi k \Longrightarrow x = y$ pero esto es una contradicción ya que estabamos suponiendo que $x \neq y$ entonces es estrictamente normado.

**Ejercicio 7:Sea que $x_n, y_n$ pertenecen a la bola unitaria cerrada $\overline{B}(0,1)$ en un espacio de Hilbert $H$ y $\langle x_n, y_n \rangle \to 1$ para $n \to \infty$. Demostrar que $\|x_n - y_n\| \to 1$ donde $n \to \infty$.**

Como $x_n \in \overline{B}(0,1)$ y $y_n \in \overline{B}(0,1) \Longrightarrow \|x_n\| \leq 1$ y $\|y_n\| \leq 1 \Longleftrightarrow \langle x_n, x_n \rangle \leq 1$ y $\langle y_n, y_n \rangle \leq 1$.

Vemos que $\|x_n - y_n\|^2 \to 0$, ya que esto implica que $\|x_n - y_n\| \to 0$ entonces $\|x_n - y_n\|^2 = \langle x_n - y_n, x_n - y_n \rangle = \langle x_n, x_n \rangle + \langle y_n, y_n \rangle - 2\langle x_n, y_n \rangle \leq 1 + 1 - 2\langle x_n, y_n \rangle \to 0$, ya que $\langle x_n, y_n \rangle \to 1$.

**Ejercicio 8:En el espacio $l_2$ consideramos el conjunto $M = \left\{ x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, ...) : \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0 \right\}$. Demostrar que $M$ es un subespacio vectorial denso en $l_2$.**

1) Vemos que $M$ es una variedad lineal.

$\star$ Vemos que si $x, y \in M \Longrightarrow x + y \in M$

$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} y_k = 0 \Longrightarrow x + y \in M$

$\star$ Vemos que si $x \in M \Longrightarrow \lambda x \in M$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda x_k = \lambda \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = 0 \Longrightarrow \lambda x \in M$

2) Vemos que es denso en $l_2$

Para ello consideramos la función la función lineal $L : l_2 \to \mathbb{R}$ tal que $L(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ ($L$ no es continua)

Por un resultado visto en clase $KerL$ o es cerrado ó es denso, ya que

$M = KerL$ es un hiperplano en $l_2$.Vemos que no es cerrado entonces tiene que ser denso.

Sea $e_1 = (1, 0, ...)$ se tiene que $e_1$ pertenece a la clausura de $M$, ya que si considero la sucesión $x^{(k)} = e_1 - \frac{1}{k}(e_1 + ... + e_k) \Longrightarrow x^{(k)} \in M$ y $x^{(k)} \to e_1$ con la norma $\|\|_2$. Vemos esto último que $x^{(k)} \to e_1$ con la norma $\|\|_2$.

Basta ver que $\left\|x^{(k)} - e_1\right\|_2 \to 0$.

Pero $\left\|\frac{1}{k}(e_1 + ... + e_k)\right\|_2 = \sum\limits_{n=1}^{k} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k} \to 0$ cuando $k \to \infty \Longrightarrow$ efectivamente $e_1$ pertenece a la clausura de $M$.

Pero $\sum\limits_{k=1}^{\infty} e_1^k = 1 \neq 0 \Longrightarrow e_1 \notin M$. Luego $M$ no es cerrado entonces tiene que ser denso.

**Ejercicio 9:En el espacio $l_2$ poner un ejemplo de un conjunto $M$ tal, que el conjunto $M + M^{\perp}$ no coincide con todo el $l_2$.**

Considero el conjunto $M = \left\{x \in l_2 : \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = 0\right\}$ para demostrar que $M + M^{\perp} \neq l_2$ probamos antes que $M^{\perp}$ coincide con el espacio ortonormal de la clausura de $M$.

Por un lado sabemos que $M$ está contenido en la clausura de $M \Longrightarrow$ El ortonormal de la clausura de $M$ está contenido en $M^{\perp}$.

Por otro lado si $x \in M^{\perp} \Longrightarrow \langle x, y\rangle = 0$ $\forall y \in M$. Además si $y_0$ pertenece a la clausura de $M \Longrightarrow \exists \{y_n\} \subset M$ tal que $\{y_n\} \to y_0$. Como $\{y_n\} \subset M \Longrightarrow \langle y_n, x\rangle = 0$ $\forall n \in N \Longrightarrow \langle y_0, x\rangle = \langle \lim y_n, x\rangle = \lim\langle y_n, x\rangle = 0 \Longrightarrow x$ pertenece al espacio ortonormal de la clausura de $M$. $\Longrightarrow M^{\perp} = \overline{M}^{\perp} = (l_2)^{\perp} = \{0\}$, ya que por el ejercicio anterior la clausura de $M$ coincide con $l_2 \Longrightarrow M + \overline{M}^{\perp} \neq l_2$.

**Ejercicio 10:En el espacio $(C[-1,1], \|\|_2)$ consideramos el conjunto $M$ de funciones $x(t)$ iguales a cero para $t \geq 0$.**

**a)Demostrar que M es un subespacio de $(C[-1,1], \|\|_2)$.**

Esto es claro ya que

$\star$ Si $x, y \in M \Longrightarrow x - y \in M$ ya que $(x - y)(t) = x(t) - y(t) = 0$ $\forall t \geq 0$.

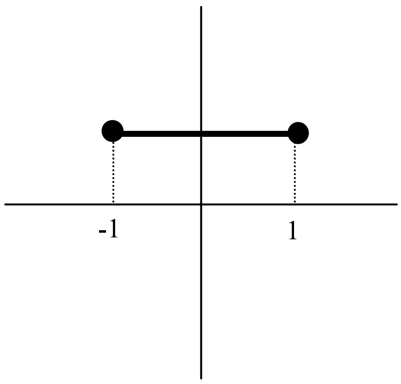
$\star$ Si $x \in M$ $a \in L_2 \Longrightarrow (ax)(t) = ax(t) = 0$ $\forall t \geq 0$.

**b) Describir el subespacio $M^{\perp}$.**

$M^{\perp} = \{x(t) \in C[-1,1] : x(t) = 0 \text{ para } t \leq 0\}$ el producto escalar asociado será:
$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right\} =$
$= \frac{1}{4}\left\{\int\limits_{-1}^{1} |x(t)+y(t)|^2 - \int\limits_{-1}^{1} |x(t)-y(t)|^2\right\} = 0$
$\Longleftrightarrow \int\limits_{-1}^{1} x(t)^2 + y(t)^2 + 2x(t)y(t) - [x(t)^2 + y(t)^2 - 2x(t)y(t)] = 0$
$4\int\limits_{-1}^{1} x(t)y(t) = 0 \Longleftrightarrow \int\limits_{-1}^{1} x(t)y(t) = 0 \Longrightarrow$ como $x(t) = 0$ si $t \geq 0 \Longrightarrow y(t) = 0$ si $t \leq 0$

**c) ¿Todo elemento $x$ del espacio $(C[-1,1], \|\|_2)$, admite una única representación de la forma, $x = u + v$, donde $u \in M$, $v \in M^{\perp}$?**

No se cumple
Si tomo la función $x(t) = 1$




Si se cumpliera entonces existirían $y \in M$ $z \in M^{\perp}$ tal que $x = y + z$.
Como $y \in M \Longrightarrow y \equiv 0$ en $[0,1] \Longrightarrow z = 0$ en $[-1,0]$ ya que $z \in C[-1,1]$. Luego no se cumple.

**Ejercicio 11:Sea $M$ un conjunto convexo cerrado en un espacio de Hilbert $H$. Demostrar que en $M$, existe y es único, un elemento de norma mínima.**

1) Vemos la existencia:
$\rightarrow$ Si $0 \in M$ ya estaría porque el 0 lo sería.
$\rightarrow$ Si $0 \notin M$.

Sea $d(0,M)=d$ entonces existe $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset M$ tal que $\|y_n\|\to d$.

Como $M$ es convexo entonces $\frac{y_n+y_m}{2}\in M$ entonces $\|y_n+y_m\|^2\geq 4d^2$.

Por la identidad del paralelogramo tenemos que:

$2(\|y_n\|^2+\|y_m\|^2)=\|y_n+y_m\|^2+\|y_n-y_m\|^2$.

$\Longrightarrow 2(\|y_n\|^2+\|y_m\|^2)\geq 4d^2+\|y_n-y_m\|^2$.

Como $\|y_n\|\to d$ entonces haciendo $n,m\to\infty$ tenemos $4d^2\geq 4d^2+\lim\limits_{n,m\to\infty}\|y_n-y_m\|^2$

$\Longrightarrow \|y_n-y_m\|\to 0$ cuando $n,m\to\infty\Longrightarrow \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy entonces $\{y_n\}\to y$ y se tiene $\|y\|=\lim\|y_n\|=d$.

Luego $y\in M$ y es el que esta a la mínima distancia de 0 luego y es el elemento de norma mínima.

2) Vemos la unicidad:

Supongamos que existen $x,y$ tales que $m=\|x\|=\|y\|=$ norma mínima entonces consideramos el segmento que los une, sabemos que está contenido en $M$, por que este es convexo, y se tiene que $\forall\alpha\in[0,1]$ se verifica que $\|\alpha x+(1-\alpha)y\|=\alpha\|x\|+(1-\alpha)\|y\|=\alpha m+(1-\alpha)m=m$

pero como $m$ es la norma mínima $\Longrightarrow \|\alpha x+(1-\alpha)y\|=m$.

Por otro lado

$\|\alpha x+(1-\alpha)y\|^2=m^2\Longleftrightarrow\langle\alpha x+(1-\alpha)y,\alpha x+(1-\alpha)y\rangle=m^2$

$\Longleftrightarrow\langle\alpha x,\alpha x\rangle+\langle(1-\alpha)y,(1-\alpha)y\rangle+2\langle\alpha x,(1-\alpha)y\rangle=m^2$

$\Longleftrightarrow\alpha^2\langle x,x\rangle+(1-\alpha)^2\langle y,y\rangle+2\alpha(1-\alpha)\langle x,y\rangle=m^2$

$\Longleftrightarrow\langle x,y\rangle=\frac{m^2-\alpha^2m^2-m^2-\alpha^2m^2+2\alpha m^2}{2\alpha(1-\alpha)}=m^2$.

Luego $\langle x-y,x-y\rangle=\langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle-2\langle x,y\rangle=m^2+m^2-2m^2=0$ $\Longleftrightarrow x-y=0\Longleftrightarrow x=y$, luego es único.

**Ejercicio 12:En el espacio $l_2$ construir un conjunto cerrado, en el cual no hay elemento de norma mínima.**

Considero el conjunto $M=\left\{x_n\in l_2: x_n=(0,0,...,0,1+\frac{1}{n},0,...)\right\}$, donde la única coordenada distinta de cero es la n-ésima.

$\rightarrow$Es claro que $M\subset l_2$.

$\rightarrow$ Vemos que $M$ es cerrado.

El límite de una subsucesión de $M$ tiene que ser $\overline{0}$ por como está definido $M$.

Pero es claro que $\|x\|_2>1\ \forall\ x\in M$ . Luego $M$ no tiene subsucesiones convergentes, por tanto $M$ no tiene puntos de acumulación entonces $\overline{M}=M\cup M'=M$. Luego $M$ es cerrado.

$\rightarrow$Vemos que no hay elemento de norma mínima.

$\|x_n\|=1+\frac{1}{n}\Longrightarrow\inf\{\|x\|_2:x\in M\}=1$.

Pero no existe $x\in M$ tal que $\|x\|_2=1$. Luego no existe el elemento de norma mínima.

**Ejercicio 13:Demostrar que en un espacio de Hilbert toda sucesión de conjuntos acotados, cerrados, convexos, encajados, no vacios posee una intersección no vacia.**

Sea $a_k \in M_k$ tal que $\|a_k\| = \min\{\|x\| : x \in M_k\}$.

Por la identidad del paralelogramo tenemos:

$2(\|a_k\|^2 + \|a_n\|^2) = \|a_k + a_n\|^2 + \|a_k - a_n\|^2 \quad (*)$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $n > k$ como $M_k$ es convexo se tiene que $\frac{a_k+a_n}{2} \in M_k \Longrightarrow \left\|\frac{a_k+a_n}{2}\right\| \geq \|a_k\| \Longrightarrow \|a_k + a_n\| \geq 2\|a_k\|$.

Por el enunciado sabemos que $M_n \subset M_k$ ya que $n > k \Longrightarrow a_n \in M_k$
$\Longrightarrow \|a_n\| \geq \|a_k\|$.

Como $\{\|a_k\|\}$ es creciente y acotada (por que los $M_i$ son acotados) entonces $\|a_k\| \to A$, por $(*)$ sabemos que:

$2(\|a_k\|^2 + \|a_n\|^2) = 4\|a_k\|^2 + \|a_k - a_n\|^2$ y como $\|a_k\|^2 \leq \|a_n\|^2$ entonces $4\|a_n\|^2 \geq 4\|a_k\|^2 + \|a_k - a_n\|^2$.

Si hacemos $k \to \infty$ (y por tanto $n \to \infty$) entonces $4A^2 \geq 4A^2 + \lim\|a_k - a_n\|^2$ entonces $\{a_k\}$ es de Cauch entonces $\{a_k\} \to a$. Luego $a \in \overline{M}_k = M_k \ \forall k \in \mathbb{N}$ entonces $a \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} M_k$.

**Ejercicio 14:En el espacio $C[0,1]$ construir una sucesión de conjuntos acotados, convexos, cerrados, encajados, no vacios que posea una intersección vacia.**

Sea $M_n = \left\{x(t) \in C[0,1] : \|x\| \leq 1, x(0) = 0, x(t) = 1 \text{ para } \frac{1}{n} \leq t \leq 1\right\}$

$\to$ $M_n$ es acotado es claro

$\to$ Vemos que es convexo.

Esto es claro ya que si $x, y \in M_n \Longrightarrow \forall\alpha \in [0,1]\ \|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leq \alpha\|x\| +$
$+(1-\alpha)\|y\| \leq 1$, $\alpha x(0) + (1-\alpha)y(0) = 0$, $\alpha x(t) + (1-\alpha)y(t) = 1$ para $\frac{1}{n} \leq t \leq 1$.

$\to$ Vemos que es cerrado.

Si $x_n$ es una sucesión de $M_n$ tal que $x_n \to x \Longrightarrow \|x\| = \|x - x_n + x_n\| \leq$
$\leq \|x - x_n\| + \|x_n\| \leq 1$ haciendo $n \to \infty \quad \|x\| \leq 1$.

Como $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n(0) = 0 \Longrightarrow x(0) = 0$.

Como $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n(t) = 1$ para $\frac{1}{n} \leq t \leq 1 \Longrightarrow x(t) = 1$ para $\frac{1}{n} \leq t \leq 1$

Luego $x \in M_n \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ M_n$ es cerrado.

$\to$ Vemos que son encajados.

si $x \in M_{n+1} \Longrightarrow \|x\| \leq 1$, $x(0) = 0, x(t) = 1$ para $\frac{1}{n+1} \leq t \leq 1$

Entonces, en particular, como $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n+1}$ se tiene $x(t) = 1$ para $\frac{1}{n} \leq t \leq 1$, por tanto $x \in M_n$

$\to$ Vemos que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{\emptyset\}$

Supongamos que $\exists x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \Longrightarrow x \in A_n\ \forall n \in \mathbb{N}$, luego en particular $x$ verifica la siguiente propiedad $x(t) = 1$ para $\frac{1}{n} \leq t \leq 1$ entonces como esto es $\forall n \in \mathbb{N}$.

Haciendo $n \to \infty$ se tendría que $x(t) = 1$ si $t \in (0, 1]$, pero por otro lado $x(0) = 0$, pero $x$ no sería continua luego $x \in C[0, 1]$ pero esto es una contradicción, por tanto no existe $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$, luego $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{\emptyset\}$ .