VARIABLE COMPLEJA Y ANÁLISIS FUNCIONAL

(Curso 2001-2002)

HOJA 2

Ejercicio 1. *Desarrolla en serie de potencias de* $(z-1)$ *la siguiente función y halla el radio de convergencia de la serie obtenida:*

$$f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$$

Solución:

Consideramos la función $g(z) = \frac{1}{(z+1)^2} \Rightarrow f(z) = z^2 g(z)$.

Desarrollo en serie de potencias de $(z-1)$ la función $g(z)$:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$$

Donde $a_n = \frac{1}{n!} g^{n)}(1)$.

Y se tiene que

$$a_n = \frac{(-1)^n (n+1)}{2^{n+2}};$$

Así se tiene que:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2^{n+2}} (z-1)^n$$

Y entonces:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2^{n+2}} (z-1)^n z^2 \quad =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2^{n+2}} (z-1)^n (z-1+1)^2 =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2^{n+2}} (z-1)^n [(z-1)^2 + 1 + 2(z-1)] =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+2}}(z-1)^{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+2}}(z-1)^n+$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+1}}(z-1)^{n+1}=$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-2}(n-1)}{2^n}(z-1)^n+$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+2}}(z-1)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{2^n}(z-1)^n=$$

$$\frac{1}{2^2}-\frac{2}{2^3}(z-1)+\frac{1}{2}(z-1)+\sum_{n=2}^{\infty}\Big[\frac{(-1)^{n-2}(n-1)}{2^n}+$$

$$\frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+2}}+\frac{(-1)^{n-1}n}{2^n}\Big](z-1)^n=$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}(z-1)+\sum_{n=2}^{\infty}[\frac{(-1)^{n-1}(3-n)}{2^{n+2}}](z-1)^n=$$

$$\frac{1}{2^2}+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^{n-1}(3-n)}{2^{n+2}}](z-1)^n$$

El radio de convergencia de esta serie se calcula aplicando el Criterio de D'Alembert:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}(3-n)2^{n+3}}{2^{n+2}(-1)^n(3-(n+1))}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-2(3-n)}{2-n}\right|=$$

$$2\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3-n}{2-n}\right|=2$$

Luego:

$$\boxed{f(z)=\frac{z^2}{(z+1)^2}=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{(-1)^{n-1}(3-n)}{2^{n+2}}\Big](z-1)^n,\quad |z-1|<2}$$

Ejercicio 2. *Calcula* $\int_\gamma f(z)dz$ *si:*

$a)$ $f(z) = \overline{z}$, *para* $\gamma \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$

$y \quad \gamma \equiv \{\partial([-R, R] \times [-R, R])\}$.

Solución:

Para este ejercicio se va a calcular la integral del siguiente modo:

Se toma una parametrización del camino γ tal que $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ y $\gamma \in C^1$ a trozos, y se tiene que:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt, \quad t \in [a, b]$$

con $f : Im\gamma \to \mathbb{C}$, f continua en $Im\gamma$.

Veamos primero el resultado de la integral para el camino, $\gamma \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$

Tomando como parametrización del camino γ la siguiente:

$\gamma(t) = Re^{it} = R(cost + isent), \quad t \in [0, 2\pi]$, en sentido directo,

se obtiene:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \overline{z}dz = \int_{|z|=R} \overline{z}dz =$$

$$\int_0^{2\pi} R^2(cost - isent)ie^{it}dt = \int_0^{2\pi} R^2 ie^{-it}e^{it}dt =$$

$$\int_0^{2\pi} R^2 idt = 2\pi iR^2$$

Este ejercicio está hecho usando sólo la definición. Se puede utilizar la Fórmula Integral de Cauchy y razonar como sigue:

$$\int_\gamma \overline{z}dz = \int_\gamma \frac{\overline{z}z}{z}dz = \int_\gamma \frac{|z|^2}{z}dz = R^2 \int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi iR^2$$

Tomando ahora el camino, $\gamma \equiv \{\partial([-R, R] \times [-R, R])\}$, y parametrizándolo de la siguiente forma:

$$\gamma(t) = \gamma_1(t) \cup \gamma_2(t) \cup \gamma_3(t) \cup \gamma_4(t)$$

donde,

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1(t) &= R(2t-1) - iR; \\ \gamma_2(t) &= R + iR(2t-1); \\ \gamma_3(t) &= R(1-2t) + iR; \\ \gamma_4(t) &= -R + iR(1-2t); \end{aligned}\right\} \quad t \in [0,1]$$

El resultado de la integral con este camino es:

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} f(z)dz$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_1} \overline{z}dz = R\int_0^1 (2t-1+i)2dt$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_2} \overline{z}dz = R\int_0^1 (1-i2t+i)2idt$$

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz = \int_{\gamma_3} \overline{z}dz = R\int_0^1 (1-2t-i)(-2)dt$$

$$\int_{\gamma_4} f(z)dz = \int_{\gamma_4} \overline{z}dz = R\int_0^1 (-1-2ti-i)(-2i)dt$$

Así se obtiene que:

$$\int_\gamma f(z)dz = 4R\Big[\int_0^1 (2t-1+i)dt + i\int_0^1 (1-i2t+i)dt\Big] = 8Ri$$

$b)$ $\quad f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+z}, \quad para \quad \gamma \equiv \Big\{z \in \mathbb{C} : |z+1| = \dfrac{1}{2}\Big\}$

Aplicando la fórmula Integral de Cauchy se tiene que:

Tomamos $g(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z}$ que es una función holomorfa en $D(-1, \frac{1}{2})$.

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \frac{g(z)}{z+1}dz = 2\pi g(-1) = \frac{-2\pi i}{e}$$

Ejercicio 3. *Demuestra que:*

a) $\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz\right| \leq \pi e, \quad$ *donde* $\gamma \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \quad 0 \leq \arg z \leq \pi\}$

Solución:

Se prueba de la siguiente manera:

Cuando z es un punto de $\gamma, |z| = 1$; y se sigue que

$$|e^z| = e^{Re(z)} \leq e$$

$$\left|\frac{e^z}{z}\right| \leq e$$

La longitud del camino γ es π.

Entonces una cota para el módulo del valor de la integral es la longitud del camino por una cota del integrando, siempre que el integrando sea una función continua, como ocurre en este caso.

Es decir,

$$\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz\right| \leq \pi e$$

b) $$\left|\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2+1}\right| \leq \begin{cases} \pi\frac{R}{R^2-1} & si \quad R > 1 \\ \pi\frac{R}{1-R^2} & si \quad 0 < R < 1 \end{cases}$$

donde $\gamma_R \equiv \{z \in \mathbb{C}/ \quad |z| = R \quad y \quad 0 \leq arg(z) \leq \pi\}$

Solución:

Análogamente al apartado *a):*

Cuando z es un punto en $\gamma_R, |z| = R$ y se sigue que:

$$|z^2 + 1| \geq ||z|^2 - 1| = |R^2 - 1|$$

Si $R^2 > 1$, es decir, si $R > 1 \Rightarrow |z^2 + 1| \geq R^2 - 1$. Si $R^2 < 1$, es decir, si $R < 1 \Rightarrow |z^2 + 1| \geq 1 - R^2$.

Por consiguiente, en esos puntos,

$$\Big|\frac{1}{z^2+1}\Big| \leq \begin{cases} \frac{1}{R^2-1} & si \quad R > 1 \\ \frac{1}{1-R^2} & si \quad 0 < R < 1 \end{cases}$$

Como la longitud del camino γ_R es πR. Entonces la cota para el módulo del valor de la integral es:

$$\Big|\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2+1}\Big| \leq \begin{cases} \frac{\pi R}{R^2-1} & si \quad R > 1 \\ \frac{\pi R}{1-R^2} & si \quad 0 < R < 1 \end{cases}$$

Obsérvese que como $R \neq 1$, la función está bien definida en γ_R.

Ejercicio 4. *Sea* $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| \neq 1$, *calcula* $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2\alpha cos\theta+\alpha^2}$

Solución:

Para calcular esta integral voy a sustituir $cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$. Así obtengo:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2\alpha cos\theta + \alpha^2} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - \alpha(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + \alpha^2} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta} - \alpha(e^{2i\theta} + 1) + \alpha^2 e^{i\theta}}$$

Ahora multiplico y divido por i obteniendo:

$$\frac{1}{i} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta} - \alpha(e^{2i\theta} + 1) + \alpha^2 e^{i\theta}} = -i \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta} - \alpha(e^{2i\theta} + 1) + \alpha^2 e^{i\theta}}$$

Tomando como parametrización de la curva γ:

$$\gamma(\theta) = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

en sentido positivo. Se obtiene que la integral se puede escribir como:

$$i\int_\gamma \frac{dz}{\alpha z^2 - (1+\alpha^2)z + \alpha} = \frac{i}{\alpha}\int_\gamma \frac{dz}{z^2 - (\frac{1}{\alpha} + \alpha)z + 1} = \frac{i}{\alpha}\int_\gamma \frac{dz}{(z - \frac{1}{\alpha})(z-\alpha)}$$

Como $|\alpha| \neq 1$ se tienen los siguientes dos casos:

1) <u>Si $|\alpha| < 1 \Rightarrow |\frac{1}{\alpha}| > 1$</u>:

Se aplica la Fórmula Integral de Cauchy, tomando $g(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{\alpha}}$

Así

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z - \frac{1}{\alpha})(z-\alpha)} = 2\pi i g(\alpha) Ind(\gamma; \alpha) = \frac{2\pi i \alpha}{\alpha^2 - 1}$$

En definitiva en este caso:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2\alpha cos\theta + \alpha^2} = \frac{-2\pi}{\alpha^2 - 1}$$

2)<u>Si $|\alpha| > 1 \Rightarrow |\frac{1}{\alpha}| < 1$</u>:

Se aplica la Fórmula Integral de Cauchy, tomando $g(z) = \frac{1}{z-\alpha}$

Así,

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z - \frac{1}{\alpha})(z-\alpha)} = 2\pi i g\Big(\frac{1}{\alpha}\Big) Ind\Big(\gamma; \frac{1}{\alpha}\Big) = \frac{2\pi i \alpha}{1 - \alpha^2}$$

En este caso:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2\alpha cos\theta + \alpha^2} = \frac{-2\pi}{1 - \alpha^2}$$

Luego, en ambos casos se tiene que:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2\alpha cos\theta + \alpha^2} = \Big|\frac{2\pi}{\alpha^2 - 1}\Big|$$

Ejercicio 5. *Sean f una función entera y A, B, k números positivos tales que*
$$|f(z)| \leq A + B|z|^k \quad \forall \quad z \in \mathbb{C}.$$

Solución:

Para resolver este problema se utilizará el Teorema de Liouville que dice:

"Si una función entera es acotada entonces es constante".

Como f es una función entera se puede escribir como desarrollo en serie de potencias, consideremos el principio de esa serie $\sum_{n=0}^{k} a_n z^n$. Definimos la función

$$H(z) = \frac{f(z) - \sum_{n=0}^{k} a_n z^n}{z^k} \tag{1}$$

se trata de una función entera porque el único problema es cuando $z = 0$ pero como estamos eliminando los k primeros términos de la serie se tiene que:

$$f(z) - \sum_{n=0}^{k} a_n z^n = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n z^n = z^k \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n z^{n-k}$$

y

$$\boxed{H(z) = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n z^{n-k}}$$

Veamos ahora que la función H está acotada:

$$|H(z)| \leq \frac{|f(z)| + \sum_{n=0}^{k} |a_n||z|^n}{|z|^k} \leq \frac{A + B|z|^k + \sum_{n=0}^{k} |a_n||z|^n}{|z|^k}$$

Si tomamos $|z| \leq 1$, como H es una función continua, definida en un compacto se tiene que la función H está acotada.

Si suponemos que $|z| \geq 1$, entonces se tiene:

$$|H(z)| \leq \frac{A + B|z|^k + \sum_{n=0}^{k} |a_n||z|^n}{|z|^k} \leq A + B +$$

$$+\frac{1}{|z|^k}\sum_{n=0}^{k}|a_n||z|^k = A + B + \sum_{n=0}^{k}|a_n|$$

Por tanto, también para este caso se tiene que la función H está acotada.

Como la función H es entera y está acotada, aplicando el Teorema de Liouville se tiene que $H(z) = c, c \in \mathbb{C}$. Despejando $f(z)$ de la ecuación (1) se tiene que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n z^n + cz^k$$

En efecto se obtiene que f es un polinomio.