EJERCICIOS DE ANÁLISIS FUNCIONAL
(Asignatura VCAF)
HOJA 2

Ejercicio 1: Indicar un ejemplo de la sucesión $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ...)$ que pertenezca a cada uno del par considerado de los espacios y que:

a) Converja en l_∞, pero no converja en l_1.

Considero la siguiente sucesión, $x^{(n)} = (\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}, 0, ...)$ donde el $\frac{1}{n}$ aparece en las n primeras posiciones y luego son ceros.

1) Vemos que la sucesión pertenece a ambos espacios.

$\rightarrow x^{(n)} \in l_\infty$ es claro ya que cada $\left|x_k^{(n)}\right| < 1$. Luego está acotada entonces se tiene lo que querí amos.

$\rightarrow x^{(n)} \in l_1$ es claro ya que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{(n)}\right| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1 < \infty$ entonces se tiene lo que queríamos.

2) Vemos que $x^{(n)}$ converge en l_∞. Vemos que $x^{(n)} \rightarrow l = (0, ..., 0, ...)$.

Como $\left\|x^{(n)}\right\|_\infty = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ es claro que, $x^{(n)} \rightarrow l = (0, ..., 0, ...)$.

3) Vemos que no converge en l_1. Vemos primero que si la sucesión converge en l_1 a x entonces tiene que converger coordenada a coordenada entonces él único posible límite es 0.

Pero como $\left\|x^{(n)}\right\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n}\right| = 1$. Luego es claro que si tomo $0 < \varepsilon < 1$ no existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|x^{(n)} - l\right\| < \varepsilon$ cuando $n \geq n_0$ .Luego no converge.

b) Converja en l_∞, pero no converja en l_2.

Considero la siguiente sucesión, $x^{(n)} = (\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}, 0, ...)$ donde el $\frac{1}{n}$ aparece en las n^2 primeras posiciones y luego son ceros.

1) Vemos que la sucesión pertenece a ambos espacios.

$\rightarrow x^{(n)} \in l_\infty$ es claro ya que cada $\left|x_k^{(n)}\right| < 1$. Luego está acotada entonces se tiene lo que querí amos.

$\rightarrow x^{(n)} \in l_2$ es claro ya que una vez fijado n se tiene que $\left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{(n)}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} =$

$= \left[\sum\limits_{k=1}^{n^2} (\frac{1}{n})^2\right]^{\frac{1}{2}} = 1 < \infty$ entonces se tiene lo que queríamos.

2) Vemos que $x^{(n)}$ converge en l_∞. Vemos que $x^{(n)} \rightarrow l = (0, ..., 0, ...)$.

Pero esto es claro ya que $\left\|x^{(n)}\right\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

3) Vemos que no converge en l_2.

Si en este espacio la sucesión converge es claro que lo debería hacer a $(0, ..., 0, ...)$ ya que $\frac{1}{n} \to 0$. Pero $\left\|x^{(n)}\right\|_2 = 1$ luego no converge.

c) Converja en l_2, pero no converja en l_1.

Considero la siguiente sucesión, $x^{(n)} = (\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}, 0, ...)$ donde el $\frac{1}{n}$ aparece en las n primeras posiciones y luego son ceros.

1) Vemos que la sucesión pertenece a ambos espacios.

$\to x^{(n)} \in l_1$ es claro ya que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{(n)}\right| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1 < \infty$ entonces se tiene lo que querí amos.

$\to x^{(n)} \in l_2$ es claro ya que una vez fijado n se tiene que $\left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{(n)}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} =$

$= \left[\sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{1}{n})^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{n}{n^2}\right]^{\frac{1}{2}} < \infty$ entonces se tiene lo que queríamos.

2) Vemos que $x^{(n)}$ converge en l_2. Vemos que $x^{(n)} \to l = (0, ..., 0, ...)$. Esto es claro ya que $\left\|x^{(n)}\right\|_2 = \frac{1}{n} \to 0$.

3) Vemos que no converge en l_1.

Esto lo hemos visto en el apartado a) de este ejercicio.

d) Converja en c_0, pero no converja en l_1.

Considero la siguiente sucesión, $x^{(n)} = (\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}, 0, ...)$ donde el $\frac{1}{n}$ aparece en las n primeras posiciones y luego son ceros.

1) Vemos que la sucesión pertenece a ambos espacios.

$\to x^{(n)} \in c_0$ es claro ya que la sucesión termina en una cola de ceros.

$\to x^{(n)} \in l_1$ es claro ya que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{(n)}\right| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1 < \infty$ entonces se tiene lo que queríamos.

2) Vemos que $x^{(n)}$ converge en c_0.

Vemos que $x^{(n)} \to l = (0, ..., 0, ...)$, ya que $\left\|x^{(n)}\right\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$.

3) Vemos que no converge en l_1.

$\left\|x^{(n)}\right\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n}\right| = 1$. Luego es claro que si tomo $0 < \varepsilon < 1$ no existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|x^{(n)} - l\right\| < \varepsilon$ cuando $n \geq n_0$.

e) Converja en c_0, pero no converja en l_2.

Considero la siguiente sucesión, $x^{(n)} = (\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}, 0, ...)$ donde el $\frac{1}{n}$ aparece en las n^3 primeras posiciones y luego son ceros.

1) Vemos que la sucesión pertenece a ambos espacios.

$\rightarrow x^{(n)} \in c_0$ es claro ya que la sucesión termina en una cola de ceros.

$\rightarrow x^{(n)} \in l_2$ es claro ya que una vez fijado n se tiene que $\left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{(n)}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} =$

$= \left[\sum\limits_{k=1}^{n^3} (\frac{1}{n})^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{n}{n^2}\right]^{\frac{1}{2}} < \infty$ entonces se tiene lo que queríamos.

2) Vemos que $x^{(n)}$ converge en c_0.

Vemos que $x^{(n)} \rightarrow l = (0, ..., 0, ...)$ ya que $\left\|x^{(n)}\right\|_{\infty} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$

3) Vemos que no converge en l_2.

Si en este espacio la sucesión converge es claro que lo deberí a hacer a $(0, ..., 0, ...)$ ya que $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

$\left\|x^{(n)} - 0\right\|_2 = \left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum\limits_{k=1}^{n^3} \left|\frac{1}{n}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{n^3}{n^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}.$

Pero si $n \rightarrow \infty \Longrightarrow \sqrt{n} \rightarrow \infty$. Luego es claro que no existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|x^{(n)} - l\right\| < \varepsilon$ cuando $n \geq n_0$.

Ejercicio 2: Demostrar que para cualquier $p \geq 1$ todo elemento del espacio l_p es un elemento del espacio c_0,pero el elemento $x = (1, \frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, ..., \frac{1}{\ln n}, ...) \in c_0$ no pertenece a l_p para ningún $p \geq 1$.

Si $x \in l_p \Longrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$ esto significa que esta serie es convergente, entonces sabemos por el criterio del lí mite para series, que $\lim\limits_{k\rightarrow\infty} |x_k|^p = 0$

$\Longrightarrow |x_k|^p < \varepsilon \ \forall k \geq k_0 \Longrightarrow |x_k| < \varepsilon^{\frac{1}{p}} \ \forall k \geq k_0 \Longrightarrow \lim\limits_{k\rightarrow\infty} |x_k| = 0.$

Pero como $-|x_k| \leq x_k \leq |x_k| \Longrightarrow \lim\limits_{k\rightarrow\infty} x_k = 0 \Longrightarrow x \in c_0$.

Vemos ahora que $x = (1, \frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, ..., \frac{1}{\ln n}, ...) \in c_0$ y $x \notin l_p$.

$\lim\limits_{k\rightarrow\infty} x_k = \lim\limits_{k\rightarrow\infty} \frac{1}{\ln k} = 0 \Longrightarrow x = (1, \frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, ..., \frac{1}{\ln n}, ...) \in c_0.$

Por otro lado $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p = 1 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \left|\frac{1}{\ln k}\right|^p > 1 + \sum\limits_{k=2}^{n_0} \left|\frac{1}{\ln k}\right|^p + \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{n}$. Esta desigualdad se tiene por que sabemos que para un número suficientemente grande se verifica que $(\ln n)^p < n$.

Una vez que ya tenemos esta desigualdad y utilizando que el último sumando es divergente se tiene que $x \notin l_p$.

Ejercicio 3: ¿Converge en el espacio C[0,1] las siguientes sucesiones?

a)x_n(t)=t^n-t^{n+1}.

$\rightarrow$Converge puntualmente en $C[0,1]$.

Vemos que $x_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Sea $\varepsilon > 0$

$\left\|x^{(n)} - 0\right\|_\infty = \max\limits_{t\in[0,1]} |x_n(t) - 0| = \max\limits_{t\in[0,1]} |(t^n - t^{n+1}) - 0| = \max\limits_{t\in[0,1]} |t^n(1-t)| < \varepsilon$,

ya que si $t \in [0,1) \Longrightarrow t^n\,|1-t| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y por otro lado si $t = 1 \Longrightarrow 1^n\,|1-1| = 0 \rightarrow 0$. Luego por tanto $\max\limits_{t\in[0,1]} |t^n(1-t) - 0| \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$.

$\rightarrow$Vemos que converge uniformemente.

Calculamos el máximo de $x_n(t)$

$x_n'(t) = nt^{n-1} - (n+1)t^n = 0 \Longleftrightarrow t = \frac{n}{n+1}$.

Como $x_n(0) = 0$ y $x_n(1) = 0$ entonces el máximo se alcanza en $t = \frac{n}{n+1}$ que es :

$x_n(\frac{n}{n+1}) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} \Longrightarrow \|x_n\|_\infty \rightarrow 0$.

b)y$_n$(t)=t^n-t^{2n}.

No converge ya que si esta sucesión convergiera con la norma infinito, lo haría a 0 ya que converge puntualmente a 0, pero $t^n(1-t^n)$ tiene máximo en $\left[\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{n}}$ y se tendría $\|t^n(1-t^n)\|_\infty = \max\limits_{t\in[0,1]} |t^n(1-t^n)| = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} > 0 \nrightarrow 0$, luego no converge.

Ejercicio 4: ¿Converge la sucesión x$_n$(t)=$\frac{t^n}{n+1}$-$\frac{t^{n+1}}{n+2}$ en los siguientes espacios?

a)C[0,1].

Si converge en $C[0,1]$ ya que como $t \in [0,1]$. Se tiene que:

$\left|\frac{t^n}{n+1} - \frac{t^{n+1}}{n+2}\right| \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \Longrightarrow \|x_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \rightarrow 0$.

b)C$'$[0,1].

Si converge en $C'[0,1]$.

Ya que $x_n'(t) = (n+1)\frac{t^n}{n+1} - (n+2)\frac{t^{n+1}}{n+2} = t^n - t^{n+1}$. Vemos que $x_n(t) \rightarrow 0$, con la norma de este espacio, cuando $n \rightarrow \infty$ y $\forall t \in [0,1]$.

Sea $\varepsilon > 0$

$\|x_n(t) - 0\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |x_n(t) - 0| + \max\limits_{t\in[0,1]} |x_n'(t) - 0| = \|x_n(t) - 0\|_\infty + \|x_n'(t) - 0\|_\infty$.

Por otro lado sabemos, por el apartado anterior, que $x_n(t) \rightarrow 0$ en $C[0,1]$, luego existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n(t) - 0\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Del mismo modo por el apartado a) del ejercicio 3, de esta hoja, sabemos que, $t^n - t^{n+1} \rightarrow 0$; luego existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n'(t) - 0\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow \|x_n(t) - 0\| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$ siendo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

Ejercicio 5: ¿Será: a) abierto; b) cerrado el conjunto de todos los polinomios en el espacio $C[a,b]$?

a) No es abierto ya que el complementario de este conjunto no es cerrado. Para ver que el complementario no es cerrado, considero una sucesión en el complementario de $P[x]$ (conjunto de todos los polinomios) y veo que converge a un polinomio, luego el lí mite no pertenece al complementario, lo que indica que el complementario no es cerrado.

$\{x_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{n} sen(nt+n)$ para $t \in [a,b]$ y $n \in \mathbb{N}$, es obvio que $\{x_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}} \in C[a,b]$, ya que la función seno es continua.

Vemos que $x_n(t) \to 0$ cuando $n \to \infty$ y $\forall t \in [a,b]$. Para todo $t \in [a,b]$ se tiene que $|x_n(t) - 0| = \left|\frac{1}{n} sen(nt+n)\right| \leq \frac{1}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty \Longrightarrow \|x_n(t) - 0\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Pero todos sabemos que 0 es un polinomio que tiene todos sus coeficientes iguales a cero.

b) No es cerrado, para ver que no es cerrado, tomo una sucesión de polinomios que no van a converger a un polinomio, entonces la clausura de $P[x]$ no coincide con él y por tanto no puede ser cerrado.

Sea $x_n(t) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k!}$ $\forall t \in [a,b]$ como todos sabemos este es el desarrollo en serie de la función $x(t) = e^t$ entonces $x_n(t) \to x(t)$ cuando $n \to \infty$ y $\forall t \in [a,b]$ pero $e^t \notin P[x]$. Luego $P[x]$ no es cerrado.

Ejercicio 6: Demostrar que un espacio normado lineal X es estrictamente normado si, y sólo si, la esfera S no contiene ni un solo segmento, es decir, de $x, y \in S$ con $x \neq y$ se desprende que $\alpha x + (1-\alpha)y \notin S$ para cualquier $\alpha \in (0,1)$.

•Nota:

$\to S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

$\to X$ es estrictamente normado si en él, la igualdad $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ siendo $x \neq 0$, $y \neq 0$ se cumple solamente para $y = \lambda x$, donde $\lambda > 0$.

Con las consideraciones de la nota vamos a demostrar lo que nos pide el enunciado.

$\Longrightarrow]$ lo hacemos por Reducción al Absurdo:

Supongamos que $\alpha x + (1-\alpha)y \in S$ $\forall \alpha \in (0,1) \Longrightarrow \|\alpha x + (1-\alpha)y\| = 1$ $\forall \alpha \in (0,1)$ entonces, en particular se cumple para $\alpha = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \left\|\frac{1}{2}x + (1-\frac{1}{2})y\right\| = 1 \Longleftrightarrow \left\|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right\| = 1$

$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}\|x+y\| = 1$

$\Longleftrightarrow \|x+y\| = 2.$

Por otro lado $x \in S \Longrightarrow \|x\| = 1$, $y \in S \Longrightarrow \|y\| = 1 \Longrightarrow \|x\| + \|y\| = 2$

$\Longrightarrow \|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Longrightarrow$ $y = \lambda x$ pero $\|x\| = \|y\| = 1 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow y = x$ pero esto es una contradicción. Luego el segmento $[x, y]$ no puede estar en S.

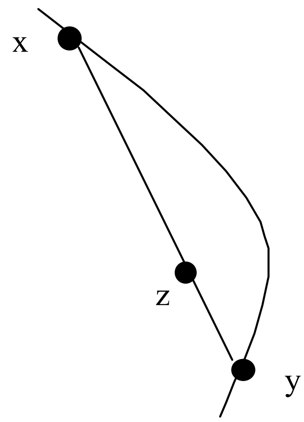
$\Longleftarrow]$ lo hacemos por Reducción al Absurdo:

Supongamos que X no es estrictamente normado entonces existen $x \neq 0$, $y \neq 0$, tales que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ y no existe $\lambda > 0$ tal que $y = \lambda x$.

Considero $a = \frac{x}{\|x\|}, b = \frac{y}{\|y\|}$ vamos a comprobar que $\alpha a + (1-\alpha) b \in S$ $\forall \alpha \in (0,1)$.

Antes de demostrar esto vamos a demostrar que si $x, y, \frac{x+y}{2} \in S$
$\Longrightarrow [x,y] \subset S$.

Supongamos que existe $z \in [x,y]$ tal que $z \notin S \Longrightarrow \|z\| < 1$ por convexidad ya que tendríamos la siguiente situación:



Entonces pueden pasar dos cosas $\left\{\begin{smallmatrix} \frac{x+y}{2} \in [x,z] \\ \frac{x+y}{2} \in [z,y] \end{smallmatrix}\right\}$ los dos casos son análogos asi que nos centramos en el segundo de ellos, $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \lambda \|z\| + (1-\lambda)\|y\| < 1$ pero esto es una contradicción ya que suponíamos que $\frac{x+y}{2} \in S$, luego para demostrar que todo segmento $[a,b] \in S$ basta con demostrar que $\frac{a+b}{2} \in S$.

1) Si $\|x\| < \|y\|$.

Si $\frac{1}{2}(\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}) \notin S \Longrightarrow \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\| < 2 \Longrightarrow \frac{1}{\|x\|}\left\|x + \frac{\|x\|}{\|y\|} y\right\| < 2$
$\Longleftrightarrow \left\|x + \frac{\|x\|}{\|y\|} y\right\| < 2\|x\| \Longrightarrow \|x+y\| - \left|\frac{\|x\|}{\|y\|} - 1\right| \|y\| < 2\|x\|$
$\Longleftrightarrow \|x\| + \|y\| - \left|\frac{\|x\|}{\|y\|} - 1\right| \|y\| < 2\|x\| \Longleftrightarrow \|y\| - \left|\frac{\|x\|}{\|y\|} - 1\right| \|y\| < \|x\|$.

Como $\|x\| < \|y\|$ se tiene que:

$\|y\| \left(1 - \left(1 - \frac{\|x\|}{\|y\|}\right)\right) < \|x\| \Longleftrightarrow \|y\| \frac{\|x\|}{\|y\|} < \|x\|$ pero esto es una contradicción. Luego $\frac{1}{2}(\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}) \in S$.

2) Si $\|x\| = \|y\|$.

$\Longrightarrow \frac{1}{2}(\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}) = \frac{1}{2\|x\|}(x+y)$

$\Longrightarrow \left\|\frac{a+b}{2}\right\| = \frac{1}{2\|x\|}\|x+y\| = \frac{\|x\|+\|y\|}{2\|x\|} = 1$ entonces es claro que $\frac{a+b}{2} \in S$.

Luego por el resultado que hemos demostrado previamente tenemos que, $\alpha a + (1-\alpha)b \in S \; \forall \alpha \in (0,1)$, lo cual es una contradicción con la hipótesis de que la esfera no contiene ni un solo segmento.

Ejercicio 7: ¿Cuáles espacios entre los siguientes son estrictamente normados?

a) c_0 no es estrictamente normado.

Si tomamos $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...)$ y $y = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, ..., \frac{1}{n^2}, ...)$ es claro que, $x, y \in c_0$ y que, $y \neq \lambda x \; \forall \; \lambda > 0$ ya que no existe $\lambda > 0$ tal que $\frac{1}{n} = \lambda \frac{1}{n^2} \; \forall n \in \mathbb{N}$. Vemos que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$,

$x+ y = (2, \frac{3}{4}, ..., \frac{n+1}{n^2}, ...) \Longrightarrow \|x+y\| = \sup \{|x_n + y_n| : n \in \mathbb{N}\} = 2$.

Por otro lado $\|x\| = \sup \{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} = 1$

y $\|y\| = \sup \{|y_n| : n \in \mathbb{N}\} = 1 \Longrightarrow \|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.

b) l_1 no es estrictamente normado.

Si tomamos $x = (1, 0, 0, ..., 0, ...)$ y $y = (0, 1, 0, ..., 0, ...)$ es claro que, $x, y \in l_1$ y que, $y \neq \lambda x \; \forall \; \lambda > 0$ ya que no existe $\lambda > 0$ tal que $1 = \lambda 0$. Vemos que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$,

$x+ y = (1, 1, ..., 0, ...) \Longrightarrow \|x+y\| = \sup \{|x_n + y_n| : n \in \mathbb{N}\} = 2$.

Por otro lado $\|x\| = \sup \{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} = 1$ y

$\|y\| = \sup \{|y_n| : n \in \mathbb{N}\} = 1 \Longrightarrow \|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.

c) l_2.

Si es estrictamente normado, lo vemos por la definición. Sean $x, y \in l_2$ si $\|x+y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2 \Longleftrightarrow (\|x+y\|_2)^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$ pero l_2 es un espacio de Hilbert como veremos en la hoja 3; luego tenemos que:

$(\|x+y\|_2)^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$.

Por otro lado $(\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 = (\|x\|_2)^2 + 2\|x\|_2 \|y\|_2 + (\|y\|_2)^2$ faltarí a ver que $2\langle x, y \rangle = 2\|x\|_2 \|y\|_2$, ya que es obvio que $\langle x, x \rangle = (\|x\|_2)^2$ y que

$\langle y, y \rangle = (\|y\|_2)^2$, pero por la desigualdad de Cauchy-Schwarz sabemos que:

$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$

Y también sabemos que se da la igualdad cuando $y = \lambda x \; \forall \; \lambda > 0$. Luego si se verifica $\|x+y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2$ se tiene que verificar que $y = \lambda x \; \forall \; \lambda > 0$. Luego por tanto este espacio es estrictamente normado.

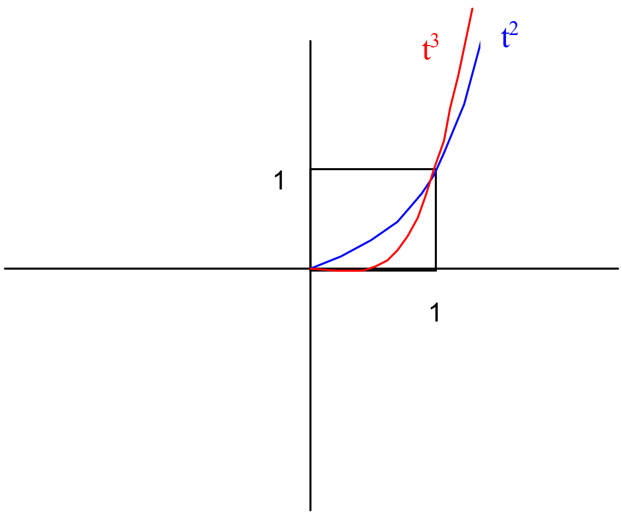
d) l_∞.

No es estrictamente normado, para demostrarlo vale con tomar el mismo ejemplo que en el apartado a).

e) $C[0, 1]$.

No es estrictamente normado, ya que si tomamos $x = x(t) = t^2$ y

$y = y(t) = t^3$ es claro que $x, y \in C[0, 1]$ y que $y \neq \lambda x \; \forall \; \lambda > 0$, ya que no existe $\lambda > 0$ tal que $y = \lambda x$, ver el dibujo.



Vemos que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.
$\|x+y\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |t^2+t^3| = 2$.
Por otro lado $\|x\| = 1$ y $\|y\| = 1 \Longrightarrow \|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.

f) $L_2[0,1]$.
Como veremos en la hoja 3, $L_2[0,1]$ es un espacio de Hilbert, entonces al igual que en el apartado c) se verifica que, si $x, y \in L_2[0,1]$ y son tales que $\|x+y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2$ equivale a que $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$ y como sabemos por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene la igualdad sólo cuando $y = \lambda x \ \forall \ \lambda > 0$. Luego si se verifica $\|x+y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2$ se tiene que verificar que $y = \lambda x \forall \ \lambda > 0$. Luego por tanto este espacio es estrictamente normado.

Ejercicio 8: ¿Serán convexos en el espacio $C[a,b]$ los siguientes conjuntos?

a) los polinomios de grado = k;

No es convexo, ya que si tomo dos puntos en este conjunto, por ejemplo:
$P(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_0$ y $Q(x) = -x^k + b_{k-1}x^{k-1} + ... + b_0$
Entonces el segmento $[P, Q]$ no pertenece al conjunto ya que:
$\alpha P + (1-\alpha)Q = \alpha(x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_0) + (1-\alpha)(-x^k + b_{k-1}x^{k-1} + ... + b_0)$ $\forall \alpha \in (0,1)$, entonces en el caso particular, en que $\alpha = \frac{1}{2}$ se tiene que el punto resultante sería $\frac{1}{2}(a_{k-1} + b_{k-1})x^{k-1} + ... + \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$, que es un polinomio de grado $k-1 < k$; luego este punto no pertenece al conjunto, por lo tanto, el segmento no está totalmente contenido en el conjunto, luego el conjunto no es convexo.

b) los polinomios de grado $\leq$ k;

Si es convexo, sean $P(x) = a_n x^n + ... + a_0$ donde $n \leq k$ y $Q(x) = b_m x^m + ... + b_0$ donde $n \leq k$ entonces estos son dos puntos cualquiera del conjunto y su segmento $[P, Q]$ pertenece al conjunto, ya que $\alpha P + (1-\alpha)Q = \alpha(a_n x^n + ... + a_0) +$
$+ (1-\alpha)(b_m x^m + ... + b_0)$ $\forall \alpha \in (0,1)$, entonces cada punto de este segmento es un polinomio de grado $\leq \max\{n, m\} \leq k$; luego están en el conjunto, por lo tanto, el segmento está totalmente contenido en el conjunto, luego el conjunto es convexo.

c) las funciones continuas que satisfacen la condición, $\int\limits_0^1 |x(t)|\, dt \leq 1$;

Si es convexo, sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones del conjunto, Vemos que su segmento $[f, g]$ pertenece al conjunto, para ello consideramos $\alpha f + (1-\alpha)g$ y vemos que pertenece al conjunto $\forall \alpha \in (0,1)$,
$\int\limits_0^1 |\alpha f + (1-\alpha)g|\, dt \leq \int\limits_0^1 |\alpha f|\, dt + \int\limits_0^1 |(1-\alpha)g|\, dt = \alpha \int\limits_0^1 |f|\, dt + (1-\alpha) \int\limits_0^1 |g|\, dt \leq$
$\leq \alpha \cdot 1 + (1-\alpha) \cdot 1 = 1$ entonces el segmento está totalmente contenido en el conjunto, luego el conjunto es convexo.

d) las funciones continuas que satisfacen la condición,
$\int\limits_0^1 |x(t)|^2\, dt \leq 1$;

Si es convexo, sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones del conjunto, Vemos que su segmento $[f, g]$ pertenece al conjunto, para ello consideramos $\alpha f + (1-\alpha)g$ y vemos que pertenece al conjunto $\forall \alpha \in (0,1)$,
$\int\limits_0^1 |\alpha f + (1-\alpha)g|^2\, dt \leq \int\limits_0^1 (\alpha |f| + (1-\alpha)|g|)^2 dt = \int\limits_0^1 \alpha^2 |f|^2 + (1-\alpha)^2 |g|^2 +$
$+ 2\alpha |f| (1-\alpha) |g|\, dt = \int\limits_0^1 \alpha^2 |f|^2\, dt + \int\limits_0^1 (1-\alpha)^2 |g|^2\, dt +$
$+ \int\limits_0^1 2\alpha |f| (1-\alpha) |g|\, dt \leq \alpha^2 + (1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha) = 1$ entonces el segmento está totalmente contenido en el conjunto, luego el conjunto es convexo.
En la última desigualdad hemos utilizado la desigualdad de Hölder que dice lo siguiente.
Si $p, q \in [1, \infty]$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $f \in L_p$ y $g \in L_q$ entonces
$\int\limits_X |fg| \leq \left(\int\limits_X |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_X |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$

e) las funciones continuamente diferenciables que sastifacen la condición, $\max\limits_{t \in [0,1]} |x_n(t) - 0| + \max\limits_{t \in [0,1]} |x_n'(t) - 0| \leq 1$;

Pero esto es la bola cerrada de centro 0 y radio 1 en el espacio $C_1[0,1]$ y las bolas sabemos que son siempre convexas.

Ejercicio 9: ¿Serán equivalentes las normas $\|x\|_\infty$ y $\|x\|_2$ sobre $\mathbf{C}[\mathbf{a},\mathbf{b}]$?

No son equivalentes.Podemos suponer que $[a,b]=[0,1]$ porque es más fácil y luego generalizamos para un intervalo cualquiera.

Si consideramos la sucesión:

$x_n(t)=\{ {}^{0 \text{ si } 0\leq t\leq 1-\frac{1}{n^2}}_{n^{\frac{3}{2}}(t-1+\frac{1}{n^2}) \text{ si } 1-\frac{1}{n^2}\leq t\leq 1} \}.$

Vemos que $x_n(t)$ converge con la segunda norma del enunciado, pero no con la primera entonces ambas normas no podra ser equivalentes.

$$\|x_n(t)-0\|_2=\left(\int_0^1 |x_n(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\int_0^{1-\frac{1}{n^2}} 0+\int_{1-\frac{1}{n^2}}^1 n^3\left|t+(-1+\tfrac{1}{n^2})\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\int_{1-\frac{1}{n^2}}^1 n^3(t^2+(-1+\tfrac{1}{n^2})^2+2t(-1+\tfrac{1}{n^2}))dt\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\left[n^3(\tfrac{t^3}{3}+(-1+\tfrac{1}{n^2})^2t+t^2(-1+\tfrac{1}{n^2}))\right]_{1-\frac{1}{n^2}}^1\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=n^3\left[\left[\tfrac{1}{3}+(-1+\tfrac{1}{n^2})^2+(-1+\tfrac{1}{n^2})\right]-\left[\tfrac{(1-\frac{1}{n^2})^3}{3}+(1-\tfrac{1}{n^2})^3-(1-\tfrac{1}{n^2})^3\right]\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=n^3\left[\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{n^4}-\tfrac{1}{n^2}-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{n^4}+\tfrac{1}{3n^6}+\tfrac{1}{n^2}\right]^{\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{\sqrt{3}n}\to 0 \text{ cuando } n\to\infty.$$

Pero por otro lado $x_n(1)=n^{\frac{3}{4}}\to\infty$ cuando $n\to\infty$.

Luego con la norma $\|\|_\infty$ no converge. Luego estas normas no pueden ser equivalentes.

Para verlo en un intervalo general $[a,b]$ sería modificar esta misma sucesión, es decir, convertir el intervalo $[a,b]$ en el $[0,1]$ por traslaciones y homotecias.