VARIABLE COMPLEJA Y ANÁLISIS FUNCIONAL

(Curso 2001-2002)

HOJA 1

Ejercicio 1. *Determina en qué recintos es holomorfa la siguiente función:*

$$f(x+iy) = x + ay + i(bx + cy)$$

Solución:

En este caso consideramos: $u(x,y) = x + ay$ y $v(x,y) = bx + cy$.

Aplicando el siguiente teorema:

"Sean $u, v : G :\longrightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase 1, es decir, que las derivadas parciales de primer orden de estas funciones con respecto a x e y existen en todos los puntos de G y son continuas. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es holomorfa en $G \Leftrightarrow u$ y v cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann."

Para ver en qué recinto de $\mathbb{C}$ es f holomorfa, comprobemos bajo qué condiciones se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\left.\begin{array}{r} u_x(x,y) = 1 = v_y(x,y) = c \\ -u_y(x,y) = -a = v_x(x,y) = b \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} c = 1 \\ b = -a \end{array}\right\}$$

Luego, si $c = 1$ y $b = -a$ es decir, si $f(x+iy) = (x+ay) + i(-ax+y) \Rightarrow f(z) = (1-ia)z$, entonces, f es holomorfa en $\mathbb{C}$ $(\forall\, a \in \mathbb{R})$. En otro caso, $f(x+iy) = (x+ay) + i(bx+cy)$ no es holomorfa en ningún abierto $G \subset \mathbb{C}$.

Ejercicio 2. *Halla, en cada uno de los siguientes casos, una función holomorfa, $f = u + iv$, cuya parte real o imaginaria sea la dada:*

Solución:

<u>Definición de función armónica</u>*: Sea h una función real de dos variables reales x, y sea $h \in C^2$ (es decir, de clase 2) se dice que h es ARMÓNICA en*

un dominio dado del plano xy si sobre ese dominio se satisface la ecuación: $h_{xx}(x,y) + h_{yy}(x,y) = 0$

Esta ecuación es conocida como *ecuación de Laplace.*

Definición de función armónica conjugada: *Sea $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ armónica, si existe $v : G \longrightarrow \mathbb{R}$ armónica tal que la función $u + iv$ es holomorfa en G entonces se dice que v es la función ARMÓNICA CONJUGADA de u.*

TEOREMA *Una función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es holomorfa en un dominio G si y sólo si $u = Re(f)$ y $v = Im(f)$ son armónicas y verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann.*

De este teorema se deduce que para que una función de clase 2 sea parte real o imaginaria de una función holomorfa necesariamente tiene que ser armónica.

a) $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$

Se ve fácilmente que la función $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$ es armónica en todo el plano xy ya que:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x(x,y) = -6xy \\ u_{xx}(x,y) = -6y \\ u_y(x,y) = 3y^2 - 3x^2 \\ u_{yy}(x,y) = 6y \end{array} \right.$$

Efectivamente, $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$

Para calcular una armónica conjugada de u se tiene que cumplir que u y v verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x(x,y) = v_y(x,y) \\ -u_y(x,y) = v_x(x,y) \end{array} \right.$$

$$u_x(x,y) = -6xy \Longrightarrow v_y(x,y) = -6xy$$

Manteniendo la x fija e integrando la expresión anterior respecto de y, se obtiene:

$$v(x,y) = -3xy^2 + k(x)$$

donde k es una función arbitraria que sólo depende de x.

Como ha de cumplirse también que $-u_y(x,y) = v_x(x,y)$, entonces:

$$u_y(x,y) = -3y^2 + 3x^2 = -3y^2 + k'(x).$$

Luego, $k'(x) = 3x^2 \Longrightarrow k(x) = x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}$ arbitrario.

Se obtiene entonces que:

$$\boxed{v(x,y) = x^3 - 3xy^2 + c}$$

es una armónica conjugada de u(x,y).

La función holomorfa correspondiente es:

$$\boxed{f(x+iy) = (y^3 - 3x^2y) + i(x^3 - 3xy^2 + c)}$$

Se comprueba que $\boxed{f(z) = i(z^3 + c)}$

b) $\quad u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} + x$

Solución:

La función u es de clase 2 en todo el plano menos en el origen.
Se comprueba que $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + x$ es una función armónica:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x(x,y) = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + 1 = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + 1 \\ u_{xx}(x,y) = \frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3} \\ u_y(x,y) = \frac{-2yx}{(x^2+y^2)^2} \\ u_{yy}(x,y) = \frac{2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3} \end{array} \right.$$

En efecto,
$$v_{xx}(x,y)+v_{yy}(x,y)=0$$

Para calcular una armónica conjugada de u ha de cumplirse:
$$\begin{cases} u_x(x,y)=v_y(x,y)\\ -u_y(x,y)=v_x(x,y)\end{cases}$$

Así,
$$u_x(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+1\Longrightarrow v_y(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+1$$

Integrando la expresión anterior respecto de y se obtiene:
$$v(x,y)=\frac{-y}{(x^2+y^2)}+y+k(x)$$

donde k es una función arbitraria que sólo depende de x. Como ha de verificarse que:
$$-u_y(x,y)=v_x(x,y)$$
entonces:
$$\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}+k'(x)$$

Así, $k'(x)=0\Longrightarrow k(x)=c,\quad c\in\mathbb{R}$ arbitrario.

Luego:
$$\boxed{v(x,y)=\frac{-y}{(x^2+y^2)}+y+c}$$
es una función armónica conjugada de $u(x,y)$.

La función holomorfa correspondiente es:
$$\boxed{f(x+iy)=\left(\frac{x}{x^2+y^2}+x\right)+i\left(\frac{-y}{x^2+y^2}+y+c\right)}$$

es decir, $\boxed{f(z)=z+\frac{1}{z}+ic}$ definida para todo $z\in\mathbb{C}-\{0\}$.

$c)\quad v(x,y)=3+x^2-y^2-\dfrac{y}{2(x^2+y^2)}$

Solución:

La función v es de clase 2 en todo el plano menos el origen.

Se comprueba que la función $v(x,y)$ es armónica:

$$\left\{\begin{array}{l} v_x(x,y)=2x+\frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \\ v_{xx}(x,y)=2+\frac{y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3} \\ v_y(x,y)=-2y+\frac{y^2-x^2}{2(x^2+y^2)^2} \\ v_{yy}(x,y)=-2+\frac{y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} \end{array}\right.$$

En efecto,

$$v_{xx}(x,y)+v_{yy}(x,y)=0$$

Para calcular una armónica conjugada de v ha de cumplirse:

$$\left\{\begin{array}{l} u_x(x,y)=v_y(x,y) \\ -u_y(x,y)=v_x(x,y) \end{array}\right.$$

Así,

$$u_x(x,y)=-2y+\frac{y^2-x^2}{2(x^2+y^2)^2}=v_y(x,y)$$

Integrando la expresión anterior respecto x:

$$u(x,y)=-2yx+\frac{x}{2(x^2+y^2)}+k(y)$$

donde k es una función arbitraria que sólo depende de y. Como ha de verificarse que:

$$u_y(x,y)=-v_x(x,y)$$

entonces:

$$-2x-\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}+k'(y)=-2x-\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Luego, $k'(y) = 0 \Longrightarrow k(y) = c, \quad c \in \mathbb{R}$ arbitrario.

Luego:

$$\boxed{u(x,y) = -2xy + \frac{x}{2(x^2+y^2)} + c}$$

es una armónica conjugada de v(x,y).

La función holomorfa correspondiente es:

$$\boxed{f(x+iy) = \Big(-2xy + \frac{x}{2(x^2+y^2)} + c\Big) + i\Big(3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2+y^2)}\Big)}$$

Se comprueba que $\boxed{f(z) = (c+3i) + iz^2 + \frac{1}{2z}}$ holomorfa en $\mathbb{C} - \{0\}$.

Ejercicio 3. *Resuelve las siguientes ecuaciones:*

a) $\quad senz = i$

Solución:

Tenemos:

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i$$

Multiplicando a ambos lados de la ecuación por $2i$:

$$e^{iz} - e^{-iz} = -2$$

Multiplicando a ambos lados de la ecuación anterior por e^{iz}:

$$e^{2iz} - 1 = -2e^{iz}$$

Sea $a = e^{iz}$, se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado:

$$a^2 + 2a - 1 = 0$$

Se resuelve la ecuación:

$$a = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Así, $a = e^{iz} = -1 \pm \sqrt{2}$
Si $\underline{a = e^{iz} = -1 + \sqrt{2}}$:

$$\log(e^{iz}) = iz = \log(-1+\sqrt{2}) = \ln(-1+\sqrt{2}) + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{z = -i\ln(-1+\sqrt{2}) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Si $\underline{a = e^{iz} = -1 - \sqrt{2}}$:

$$iz = \ln|-1-\sqrt{2}| + (2k-1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{z = -i\ln(1+\sqrt{2}) + (2k-1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

$b)$ $\log\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = 2z$

Solución:

Dividimos por 2:

$$z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}[\ln 1 + i(arg\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) + 2k\pi)]$$

Como $ln(1) = 0$ y $arg(\frac{1+i}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$ se tiene que:

$$z = \frac{i}{2}(\frac{\pi}{4} + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{z = i(\frac{\pi}{8} + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Ejercicio 4. *Estudia la convergencia de la serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}}\cos(in)}$$

Solución:

Como $cos(in) = \frac{e^{-n}+e^{n}}{2}$ entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}}\cos(in)} \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n-2}{2}}(e^{-n}+e^{n})}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}}\cos(in)}\right| \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n-2}{2}}(e^{-n}+e^{n})}\right| \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|1+i|^n}{2^{\frac{n-2}{2}}(e^{-n}+e^{n})} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}^n}{2^{\frac{n-2}{2}}(e^{-n}+e^{n})} \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n-2}{2}}(e^{-n}+e^{n})} \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^{-n}+e^{n}}$$

Aplicando el Criterio de Comparación:

Se tiene que:

$$\frac{2}{e^{-n}+e^{n}} \leq \frac{2}{e^{n}}$$

.

Basta ver que, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} < \infty$. Esto es cierto porque es una serie geométrica de razón $\frac{1}{e} < 1$.

Se deduce que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^{-n}+e^{n}}$ converge.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}}\cos(in)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^{-n}+e^{n}}$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}}\cos(in)}$ converge, de hecho converge absolutamente.

Ejercicio 5. *Encuentra el conjunto donde la siguiente serie converge:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^{2n}+1}$$

y estudia dónde converge uniformemente.

Solución:

Se estudian los siguientes casos:

Si $\underline{|z|^2 > 2}$:

Como $|z^{2n}+1| \geq |z^{2n}|-1$, se tiene que:

$$\frac{1}{|z^{2n}+1|} \leq \frac{1}{(|z|^2)^n - 1}$$

Como además $(|z|^2)^n \leq 2((|z|^2)^n - 1)$, concluimos que:

$$\frac{1}{|z^{2n}+1|} \leq \frac{1}{(|z|^2)^n - 1} \leq \frac{2}{(|z|^2)^n},$$

para todo n.

Usando lo anterior se llega a que:

$$|\frac{2^n}{z^{2n}+1}| \leq 2(\frac{2}{|z|^2})^n.$$

Como $\frac{2}{|z|^2} < 1$ (ya que $|z|^2 > 2$) entonces la serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{|z|^{2n}}$$

converge.

Aplicando el Criterio de Weierstrass se tiene que, para todo $\varepsilon > 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^{2n}+1}$ converge uniformemente en $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| \geq \sqrt{2}+\varepsilon\}$, y converge fuera de la bola cerrada de centro 0 y radio $\sqrt{2}$.

Si $\underline{|z|^2 \leq 2}$:

- Si $|z|^2 < 1$:(que es lo mismo que $|z| < 1$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{z^{2n}+1} = \infty$$

ya que $z^{2n} < 1 \Rightarrow z^{2n}+1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Por tanto, en este caso la serie diverge, porque el término general no converge a 0.

- Si $1 \leq |z|^2 \leq 2$:

$$\left|\frac{2^n}{z^{2n}+1}\right| \geq \frac{2^n}{(|z|^2)^n+1}$$

Como

$$2\frac{2^n}{(|z|^2)^n+1} \geq \frac{2^n}{(|z|^2)^n}$$

porque

$$\frac{(|z|^2)^n+1}{(|z|^2)^n} = 1 + \frac{1}{(|z|^2)^n} \leq 2$$

Entonces,

$$\left|\frac{2^n}{z^{2n}+1}\right| \geq \frac{2^n}{(|z|^2)^n+1} \geq \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{|z|^2}\Big)^n \geq \frac{1}{2},$$

porque $\frac{2}{|z|^2} \geq 1$.

Luego, como el término general de la serie no converge a 0, se obtiene que en este caso la serie no converge.

Ejercicio 6. *Estudia la convergencia uniforme de la serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nz}}{2^n+3^n}$$

Solución:

La serie del enunciado se puede escribir como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nz}}{2^n+3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{-z})^n}{2^n+3^n}$$

Para estudiar la convergencia uniforme de esta serie vemos que el término general de la serie está acotado por:

$$\left|\frac{(e^{-z})^n}{2^n+3^n}\right| \leq \left|\frac{(e^{-z})^n}{3^n}\right| = \left|\frac{(e^{-z})}{3}\right|^n = \Big(\frac{e^{-Re(z)}}{3}\Big)^n$$

La serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{e^{-Re(z)}}{3})^n$ converge cuando $|\frac{(e^{-Re(z)})}{3}| \leq r < 1$, es decir cuando:

$$e^{-Re(z)} \leq R < 3 \Leftrightarrow -Re(z) \leq log(R) < log(3) \Leftrightarrow$$

$$Re(z) \geq -log(R) > -log(3)$$

Se deduce entonces que la serie enunciada converge uniformemente en $\{z \in \mathbb{C}$ / $Re(z) \geq log(\frac{1}{3}) + \varepsilon\}$, sea cual sea $\varepsilon > 0$.

Obsérvese que si $Re(z) = log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ la parte real de la serie diverge.

Ejercicio 7. *Determina el radio de convergencia de la siguiente serie de potencias:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n$$

Solución:

Para determinar el radio de convergencia de esta serie de potencias, R, voy a aplicar el Criterio de D'Alembert:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{cos(in)}{cos(i(n+1))}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{e^{-n} + e^n}{e^{-(n+1)} + e^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1+e^{2n}}{e^n}}{\frac{1+e^{2(n+1)}}{e^{n+1}}}\right| =$$

$$= e \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1 + \frac{1}{e^{2n}}}{\frac{1}{e^{2n}} + e^2}\right| = e\frac{1}{e^2} = \frac{1}{e}$$

Ejercicio 8. *Suma la siguiente serie :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2 - 1}{(n+1)!} z^n$$

Solución:

Primero calculamos el radio de convergencia de esta serie:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(3n^2-1)(n+2)!}{(n+1)!(3n^2+6n+2)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3n^3+6n^2-n-2}{3n^2+6n+2} \right| = \infty$$

$$\boxed{R=\infty}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2-1}{(n+1)!} z^n = 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-\frac{1}{3}}{(n+1)!} z^n = 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2-2n-\frac{4}{3}}{(n+1)!} z^n$$

Se tiene que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n =$$

$$= z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \Big(z+1\Big)e^z$$

Por otra parte:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^n = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^{n+1} = \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \frac{1}{z}(e^z-1)$$

Además:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^{n+1} = e^z - \frac{1}{z}(e^z - 1)$$

Luego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2 - 1}{(n+1)!} z^n = 3\Big[\Big(z+1\Big)e^z - 2e^z + \frac{2}{z}(e^z - 1) - \frac{4}{3}\frac{1}{z}(e^z - 1)\Big] = 3\Big[e^z\Big(z + 1 - 2 + \frac{2}{z} - \frac{4}{3z}\Big) - \frac{2}{z} + \frac{4}{3z}\Big] =$$

$$= 3\Big[e^z(z-1) + (e^z - 1)\frac{2}{3z}\Big]$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ (ya que el radio de convergencia es $R = +\infty$).