EJERCICIOS DE ANÁLISIS FUNCIONAL
(Asignatura VCAF)
HOJA 1

Ejercicio 1: Comprobar que en los casos siguientes se cumplen los axiomas de norma, es decir, la norma está definida correctamente.

a)El espacio l_1 de las sucesiones $x = (x_1, x_2, ...)$, con x_i números reales y que satisfacen la condición $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty$, con la norma $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$.

Como $x \in l_1$ entonces $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty$, luego nuestro candidato a norma está bien definido ya que no es infinito, sino que será un número real.

Ahora vamos a comprobar que se cumplen los axiomas de norma.

1) Si $\|x\|_1 = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Si $\|x\|_1 = 0 \Longrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| = 0$ pero esto significa que la suma de infinitos números positivos es cero, y esto sólo puede ocurrir cuando todos los números son 0, de esto obtenemos que $x_k = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ luego $x = 0$.

Por otro lado si $x = 0 \Longrightarrow x_k = 0$ $\forall k \in \mathbb{N} \Longrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| = 0$
$\Longrightarrow \|x\|_1 = 0$.

2)$\|\lambda x\|_1 = |\lambda| \|x\|_1$ para cualquier $x \in l_1$ y para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\|\lambda x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda x_k| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda| |x_k| = |\lambda| \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| = |\lambda| \|x\|_1$.

3)$\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$ para cualesquiera $x, y \in l_1$.

$\|x + y\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} (|x_k| + |y_k|) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| + \sum\limits_{k=1}^{\infty} |y_k| =$
$= \|x\|_1 + \|y\|_1$.

Para resolverlo hemos utilizado la desigualdad triangular para el valor absoluto.

b)El espacio l_2 de las sucesiones $x = (x_1, x_2, ...)$, con x_i números reales y que satisfacen la condición $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$, con la norma $\|x\|_2 = \left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

Ver que esta norma está bien definida es muy fácil es simplemente por la definición del espacio l_2.

Vemos ahora que se cumplen los axiomas de norma.

1) Si $\|x\|_2 = 0$ si y sólo si $x = 0$.

si $\|x\|_2 = 0 \Longrightarrow \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} = 0$ pero esto significa que la suma de infinitos números positivos es cero, y esto sólo puede ocurrir cuando todos los números son 0, de esto obtenemos que $x_k = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$ luego $x = 0$.

Por otro lado si $x = 0 \Longrightarrow x_k = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} = 0 \Longrightarrow \|x\|_2 = 0.$

2)$\|\lambda x\|_2 = |\lambda| \, \|x\|_2$ para cualquier $x \in l_2$ y para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\|\lambda x\|_2 = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda x_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|^2 |x_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} =$$
$$= |\lambda| \, \|x\|_2 \, .$$

3)$\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$ para cualesquiera $x, y \in l_2$.

$$\|x+y\|_2 = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \|x\|_2 + \|y\|_2 \, .$$

En este paso tercero hemos utilizado la desigualdad de Minskowski que dice lo siguiente:

$\left[\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}$ donde $p \geq 1$ es un número real y a_k y b_k son números complejos pero si las series son convergentes, como es nuestro caso, se puede deducir la siguiente desigualdad.

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} .$$

c)El espacio l_p de las sucesiones $x = (x_1, x_2, ...)$, con x_i números reales y que satisfacen la condición $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$, con la norma $\|x\|_p = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}$.

Ver que esta norma está bien definida es muy fácil es simplemente por la definición del espacio l_p.

Vemos ahora que se cumplen los axiomas de norma.

1) Si $\|x\|_p = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Si $\|x\|_p = 0 \Longrightarrow \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} = 0$ pero esto significa que la suma de infinitos números positivos es cero, y esto sólo puede ocurrir cuando todos los números son 0, de esto obtenemos que $x_k = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$ luego $x = 0$.

Por otro lado si $x = 0 \Longrightarrow x_k = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} = 0 \Longrightarrow \|x\|_p = 0.$

2)$\|\lambda x\|_p = |\lambda| \, \|x\|_p$ para cualquier $x \in l_p$ y para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\|\lambda x\|_p = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|^p |x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} =$$

$= |\lambda| \|x\|_p$.

3)$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ para cualesquiera $x, y \in l_p$.

$$\|x+y\|_p = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} =$$

$= \|x\|_p + \|y\|_p$.

En este paso tercero hemos utilizado la desigualdad de Minskowski, igual que en el apartado anterior.

d)El espacio l_∞ de las sucesiones $x = (x_1, x_2, ...)$, con x_i números reales tales que son acotados, con la norma $\|x\|_\infty = \sup |x_k|$ para $k \in \mathbb{N}$.

Esta norma está bien definida ya que el espacio $l_{\infty,}$ esta formado por las sucesiones $x = (x_1, x_2, ...)$ que están acotadas.

Vemos ahora que se cumplen los axiomas de norma.

1) Si $\|x\|_\infty = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Si $\|x\|_\infty = 0 \Longrightarrow \sup |x_k| = 0$ como $|x_k| \geq 0\ \forall k \in \mathbb{N}$ y lado sabemos que $|x_k| \leq \sup |x_k| = 0$ entonces tenemos que $|x_k| = 0\ \forall k \in \mathbb{N}$ luego $x = 0$.

Por otro lado si $x = 0 \Longrightarrow |x_k| = 0\ \forall k \in \mathbb{N} \Longrightarrow \sup |x_k| = 0$
$\Longrightarrow \|x\|_\infty = 0$.

2)$\|\lambda x\|_\infty = |\lambda| \|x\|_\infty$ para cualquier $x \in l_\infty$ y para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\|\lambda x\|_\infty = \sup |\lambda x_k| = \sup |\lambda| |x_k| = |\lambda| \sup |x_k| = |\lambda| \|x\|_\infty$.

3)$\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ para cualesquiera $x, y \in l_\infty$.

$\|x+y\|_\infty = \sup |x_k + y_k| \leq \sup [|x_k| + |y_k|] \leq \sup |x_k| + \sup |y_k| =$
$= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

En este paso tercero hemos utilizado la desigualdad triangular para el valor absoluto.

e)El espacio c_0 de las sucesiones $x = (x_1, x_2, ...)$, con x_i números reales y que satisfacen la condición $\lim\limits_{k \to \infty} (x_k) = 0$, con la norma $\|x\|_\infty = \max\limits_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$.

Es claro ya que c_0 es subespacio vectorial de l_∞.

f)El espacio c de las sucesiones $x = (x_1, x_2, ...)$, con x_i números reales, que son convergentes,con la norma $\|x\|_\infty = \max\limits_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$.

Como c es subespacio vectorial de l_∞ entonces es claro que se cumplen los axiomas de norma.

Ejercicion 2: Comprobar que en los casos siguientes se cumplen los axiomas de norma, es decir, la norma esta definida correctamente.

a)El espacio $C[a,b]$, de las funciones continuas sobre $[a,b]$, con la norma $\|x\|_\infty = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$.

Esta norma está bien definida ya que por definición del espacio $C[a,b]$, si $x \in C[a,b]$, la función x es continua en un compacto luego por tanto será acotada $\Longrightarrow \|x\|_\infty < \infty$.

Vemos ahora que se cumplen los axiomas de norma.

1) Si $\|x\|_\infty = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Si $\|x\|_\infty = 0 \Longrightarrow \|x\|_\infty = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| = 0$ como $|x(t)| \geq 0$ $\forall t \in [a,b]$ $\Longrightarrow x(t) = 0$ en $[a,b]$.

Por otro lado si $x = 0 \Longrightarrow |x(t)| = 0$ $\forall t \in [a,b] \Longrightarrow \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| = 0$ $\Longrightarrow \|x\|_\infty = 0$.

2)$\|\lambda x\|_\infty = |\lambda| \|x\|_\infty$ para cualquier $x \in C[a,b]$ y para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\|\lambda x\|_\infty = \max\limits_{t\in[a,b]} |\lambda x(t)| = \max\limits_{t\in[a,b]} |\lambda| |x(t)| = |\lambda| \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| = |\lambda| \|x\|_\infty$.

3)$\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ para cualesquiera $x, y \in C[a,b]$.

$\|x+y\|_\infty = \max\limits_{t\in[a,b]} |(x+y)(t)| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)+y(t)| \leq$

$\leq \max\limits_{t\in[a,b]} [|x(t)| + |y(t)|] \leq \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |y(t)| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

En este paso tercero hemos utilizado la desigualdad triangular para el valor absoluto.

b)El espacio $C^k[a,b]$, de las funciones diferenciables continuamente k veces sobre $[a,b]$ con la norma $\|x\| = \sum\limits_{i=0}^{k} \max\limits_{t\in[a,b]} |x^i(t)|$.

Ver que esta norma está bien definida es análogo al apartado anterior.

Vemos ahora que se cumplen los axiomas de norma.

1) Si $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Si $\|x\| = 0 \Longrightarrow \|x\| = \sum\limits_{i=0}^{k} \max\limits_{t\in[a,b]} |x^i(t)| = 0$, en particular $\max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| = 0$ $\Longrightarrow x(t) = 0$ en $[a,b]$.

Por otro lado si $x = 0 \Longrightarrow |x^i(t)| = 0$ $\forall t \in [a,b]$ y $i = 0, ..., k$ $\Longrightarrow \sum\limits_{i=0}^{k} \max\limits_{t\in[a,b]} |x^i(t)| = 0 \Longrightarrow \|x\| = 0$.

2)$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para cualquier $x \in C^k[a,b]$ y para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\|\lambda x\| = \sum\limits_{i=0}^{k} \max\limits_{t\in[a,b]} |\lambda x^i(t)| = \sum\limits_{i=0}^{k} \max\limits_{t\in[a,b]} |\lambda| |x^i(t)| =$

$= |\lambda| \sum\limits_{i=0}^{k} \max\limits_{t\in[a,b]} |x^i(t)| = |\lambda| \, \|x\| \, .$

3)$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para cualesquiera $x, y \in C^k[a,b]$.

$$\|x+y\| = \sum_{i=0}^{k} \max_{t\in[a,b]} |(x^i+y^i)(t)| = \sum_{i=0}^{k} \max_{t\in[a,b]} |x^i(t)+y^i(t)| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{k} \max_{t\in[a,b]} [|x^i(t)| + |y^i(t)|] \leq \sum_{i=0}^{k} \max_{t\in[a,b]} |x^i(t)| + \sum_{i=0}^{k} \max_{t\in[a,b]} |y^i(t)| =$$
$$= \|x\| + \|y\| \, .$$

En este paso tercero hemos utilizado la desigualdad triangular para el valor absoluto.

c)El espacio $B[a,b]$, de las funciones acotadas sobre $[a,b]$ con la norma $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$.

Esta norma está bien definida ya que por definición del espacio $B[a,b]$, si $x \in B[a,b]$, la función x es acotada $\Longrightarrow \|x\|_\infty < \infty$.

Vemos ahora que se cumplen los axiomas de norma.

1) Si $\|x\|_\infty = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Si $\|x\|_\infty = 0 \Longrightarrow \|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| = 0$ como $|x(t)| \geq 0 \ \forall t \in [a,b]$ $\Longrightarrow x(t) = 0$ en $[a,b]$.

Por otro lado si $x = 0 \Longrightarrow |x(t)| = 0 \ \forall t \in [a,b] \Longrightarrow \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| = 0$ $\Longrightarrow \|x\|_\infty = 0$.

2)$\|\lambda x\|_\infty = |\lambda| \, \|x\|_\infty$ para cualquier $x \in B[a,b]$ y para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\|\lambda x\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |\lambda x(t)| = \sup_{t\in[a,b]} |\lambda| \, |x(t)| = |\lambda| \sup_{t\in[a,b]} |x(t)| = |\lambda| \, \|x\|_\infty \, .$$

3)$\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ para cualesquiera $x, y \in B[a,b]$.

$$\|x+y\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |(x+y)(t)| = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)+y(t)| \leq$$
$$\leq \sup_{t\in[a,b]} [|x(t)| + |y(t)|] \leq \sup_{t\in[a,b]} |x(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |y(t)| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \, .$$

En este paso tercero hemos utilizado la desigualdad triangular para el valor absoluto.

d)El espacio $C[a,b]$, de las funciones continuas sobre $[a,b]$ con la norma $\|x\|_p = \left[\int\limits_a^b |x(t)|^p \, dt \right]^{\frac{1}{p}}$ donde $1 \leq p < \infty$.

Esta norma está bien definida ya que por definición del espacio $C[a,b]$, si $x \in C[a,b]$, la función x es continua en un compacto luego por tanto será acotada $\Longrightarrow \|x\|_p < \infty$.

Vemos ahora que se cumplen los axiomas de norma.

1) Si $\|x\|_p = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Si $\|x\|_p = 0 \Longrightarrow \left[\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right]^{\frac{1}{p}} = 0 \Longrightarrow \int_a^b |x(t)|^p \, dt = 0$ como el integrando es mayor o igual que cero y es una función continua, entonces $|x(t)|^p = 0$ $\forall t \in [a, b] \Longrightarrow |x(t)| = 0$ en $[a, b] \Longrightarrow x = 0$.

Por otro lado si $x = 0 \Longrightarrow |x(t)|^p = 0 \; \forall t \in [a, b] \Longrightarrow \left[\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right]^{\frac{1}{p}} = 0$ $\Longrightarrow \|x\|_p = 0$.

2)$\|\lambda x\|_p = |\lambda| \, \|x\|_p$ para cualquier $x \in C\,[a, b]$ y para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\|\lambda x\|_p = \left[\int_a^b |\lambda x(t)|^p \, dt \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_a^b |\lambda|^p \, |x(t)|^p \, dt \right]^{\frac{1}{p}} = \left[|\lambda|^p \int_a^b |x(t)|^p \, dt \right]^{\frac{1}{p}} =$$
$$= |\lambda| \, \|x\|_p \, .$$

3)$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ para cualesquiera $x, y \in C\,[a, b]$.

Esta desigualdad se tiene por la desigualdad de Minkowski que dice que si $f \in L_p$ y $g \in L_p$ entonces $f + g \in L_p$ y además $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

e)El espacio $V\,[a, b]$, de las funciones de variación acotada sobre $[a, b]$ con la norma $\|x\| = |x(a)| + V_{[a,b]}(x)$, donde definimos $V_{[a,b]}(x) = \sup\limits_{\pi \in P([a,b])} V_\pi(x)$ con $V_\pi\,(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})|$ y $P([a, b])$ es el conjunto de todas las particiones del intervalo $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Esta norma está bien definida por ser las funciones de variación acotada entonces $\|x\| < \infty$.

Vemos ahora que se cumplen los axiomas de norma.

1) Si $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Si $\|x\| = 0 \Longrightarrow \|x\| = |x(a)| + \sup \sum\limits_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})| = 0$ entonces $|x(a)| = 0$.

Por otro lado como $\sup \sum\limits_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})| = 0$ esto nos dice que x es una función constante en el intervalo $[a, b]$, pero como $x(a) = 0$ entonces $x = 0$.

Por otro lado si $x = 0 \Longrightarrow |x(t)| = 0 \; \forall t \in [a, b] \Longrightarrow \|x\| = 0$.

2)$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ para cualquier $x \in V\,[a, b]$ y para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\|\lambda x\| = |\lambda x(a)| + \sup \sum_{k=1}^{n} |\lambda x(t_k) - \lambda x(t_{k-1})| =$$
$$= |\lambda| \, |x(a)| + \sup \sum_{k=1}^{n} |\lambda| \, |x(t_k) - x(t_{k-1})| = |\lambda| \left(|x(a)| + \sup \sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})| \right) =$$
$$= |\lambda| \, \|x\| \, .$$

3)$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para cualesquiera $x, y \in V[a,b]$.

Probamos primero que:

$$V_{[a,b]}(x+y) \leq V_{[a,b]}(x) + V_{[a,b]}(y).$$

Fijamos una partición $\pi \in P([a,b])$.

$$V_\pi(x+y) = \sum_{k=1}^{n} |x(t_k) + y(t_k) - x(t_{k-1}) - y(t_{k-1})| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |y(t_k) - y(t_{k-1})| \leq V_\pi(x) + V_\pi(y).$$

Luego tomando supremos en $\pi \in P([a,b])$, tenemos que:

$$V_{[a,b]}(x+y) \leq V_{[a,b]}(x) + V_{[a,b]}(y).$$

Luego por tanto:

$$\|x+y\| = |x(a)+y(a)| + V_{[a,b]}(x+y) \leq |x(a)| + |y(a)| + V_{[a,b]}(x+y) \leq$$
$$\leq |x(a)| + |y(a)| + V_{[a,b]}(x) + V_{[a,b]}(y) = \|x\| + \|y\|.$$

Ejercicio 3: ¿Cuales de los espacios de los problemas 1 y 2 son separables?

Recordamos que se dice que un espacio es separable cuando existe en él un conjunto numerable y denso.

Espacios del ejercicio 1:

a) l_1 si es separable.

Vamos a utilizar la siguiente caracterización:

X es separable $\Longleftrightarrow$ existe A en X numerable tal que $X = \overline{[A]}$.

Consideramos el siguiente conjunto $A = \left\{ \left(0, ..., 0, 1^{(i)}, 0, ...\right) : i \in \mathbb{N} \right\} \subseteq l_1$.

1)Es obvio que A es numerable por como lo hemos definido.

2)Vemos que $\overline{[A]} = l_1$. Por como está definido A, se tiene que, las combinaciones lineales de los elementos de A es igual al siguiente conjunto

$[A] = \{x \in l_\infty : \exists m \in \mathbb{N}\ tq\ x_n = 0 \forall n \geq m\}$.

Ahora si $x \in l_1$considero la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [A]$ que verifica que,

$y_i = (x_1, ..., x_i, 0, ...)$ donde x_j es la componente j-ésima del punto $x \in l_1$.

Vemos que efectivamente converge. Dado $\varepsilon > 0$

Como $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{m=n}^{\infty} |x_n| = 0 \Longrightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i\geq m} |x_i| \leq \varepsilon$.

Entonces tomamos este mismo $m \in \mathbb{N}$ y para él se verifica que:

$\|y_n - x\|_1 = \sum_{i>m} |x_i| \leq \varepsilon\ \forall n \geq m.$

Luego $\overline{[A]} = l_1$ por tanto este espacio es separable.

b) l_2 es separable y para demostrarlo se sigue un procedimiento análogo al apartado anterior, considerando el mismo conjunto A.

c) l_p es separable y para demostrarlo se sigue un procedimiento análogo al apartado anterior, considerando el mismo conjunto A.

d) l_∞ no es separable.

Considero el conjunto $A = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$,

$A = \{$sucesiones cuyos términos son ceros y unos$\}$ este conjunto no es numerable por que tiene cardinal $2^{|\mathbb{N}|}$ el mismo que el conjunto de Cantor.

Por otro lado si tomo $x, y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, se verifica que si $x \neq y$ entonces tienen una componente distinta (por ejemplo $x_i \neq y_i$) entonces,

$\|x - y\|_\infty = \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} |x_k - y_k| = 1$ ya que $|x_i - y_i| = 1$.

Ahora consideramos $\left\{B(x, \frac{1}{2})\right\}_{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}}$, es decir, el conjunto de bolas centradas en los puntos de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$y con radio $\frac{1}{2}$, este conjunto es un conjunto no numerable, de abiertos, que son disjuntos dos a dos, entonces este espacio no puede ser separable, ya que si tuvieramos un conjunto denso, tendríamos que tener un punto en cada una de las bolas de esta familia, pero estas son un conjunto no numerable y disjuntas, entonces el conjunto denso nunca sería numerable.

e) c_0 si es separable, para demostrarlo consideramos el conjunto A del apartado a) y también utilizamos la caracterización que hemos usado en dicho apartado.

1) Es numerable por como lo hemos definido.

2)Si tomamos $x \in c_0$ y consideramos $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{(x_1, ..., x_n, 0...) : n \in \mathbb{N}\}$ es claro que $\lim\limits_{n \to \infty} \{y_n\} = x \Longrightarrow x$ pertenece a la clausura de $[A]$. Luego $[A]$ es denso en c_0.

f) c es separable, y se demuestra igual que en el apartado anterior.

Espacios del ejercio 2.

a) $C[a,b]$ si es separable.

Para ver que $C[a,b]$ es separable vamos a utilizar el Teorema de Weierstrass que dice que:

$\overline{P[a,b]} = C[a,b]$.

Sea $A = \{1, t, t^2, ...\}$ es claro que $[A] = P[a,b]$ y que A es numerable entonces por el teorema de Weierstrass $\overline{[A]} = \overline{P[a,b]} = C[a,b]$ luego si utilizamos la caracterización que nos dice: X es separable $\Longleftrightarrow$ existe A en X numerable tal que $X = \overline{[A]}$.

Luego tenemos que $C[a,b]$ es separable.

b) $C^k[a,b]$ es separable.

Si considero el conjunto $A = \left\{p : p = a_0 + a_1 x + ... + a_k x^k \; con \; a_i \in \mathbb{Q} \; y \; k \in \mathbb{N}\right\}$.

1)Se tiene que A es un conjunto numerable, ya que los coeficientes de los polinomios son racionales, siendo $\mathbb{Q}$ numerable, y cada polinomio es de grado finito.

2)Vemos que el conjunto A es denso en $C^k[a,b]$.

Primero vemos que dado cualquier polinomio p existe una sucesión de polinomios $\{p_n\} \subset A$ tal que $p_n \to p$ esto es claro ya que si $p = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$

considero $p_i = a_0^i + a_1^i x + ... + a_n^i x^n$ donde $\{a_k^i\}_i \to a_k$, recordamos que esto lo podemos hacer por que todo número real se puede aproximar por una sucesión de racionales que convergen a él.

Veamos que $p_i \to p$ con la norma $\|\|_\infty$.

$\|p_i - p\|_\infty = \max\limits_{[a,b]} |p_i(t) - p(t)| \underset{(*)}{=} |p_i(c) - p(c)| \leq |a_0^i - a^i| + |a_1^i - a^i| \, |c| + ...+$
$+ |a_n^i - a^i| \, |c|^n \to 0$ cuando $i \to \infty$.

$(*)$ Estamos utilizando que toda función continua en un intervalo cerrado tiene máximo, y podemos suponer sin pérdida de generalidad que se alcaza en $c \in [a, b]$.

También se tiene por ser la convergencia uniforme que $p_n^k \to p^k$ con la norma $\|\|_\infty$. Luego$\|p_i - p\| \to 0$ cuando $i \to \infty$.

Por otro lado vemos que $P[a, b]$ son densos en este espacio.

Como $f \in C^k[a, b] \Longrightarrow f^k \in C[a, b]$ luego sabemos que existe una sucesión de polinomios Q_n tal que $Q_n \to f^k$ con la norma infinito.

Veamos que existe una sucesión de polinomios que converge a f^{k-1}y que su derivada son los Q_n anteriores

$$\left|\int_a^x Q_m(t)dt - \int_a^x f^k(t)dt\right| = \left|\int_a^x Q_m(t)dt - \left(f^{k-1}(x) - f^{k-1}(a)\right)\right| =$$
$$= \left|f^{k-1}(x) - \left(\int_a^x Q_m(t)dt + f^{k-1}(a)\right)\right| \text{ donde } \left(\int_a^x Q_m(t)dt + f^{k-1}(a)\right) \text{ es un poli-}$$
nomio que llamaremos R_m.

Por otro lado $\left|\int_a^x Q_m(t)dt - \int_a^x f^k(t)dt\right| \leq (b - a) \left\|Q_m - f^k\right\|_\infty \to 0.$

Por tanto$\left\|f^{k-1} - R_m\right\|_\infty \to 0$ es decir, $R_m \to f^{k-1}$ y se tiene que

$R'_m = Q_m$ si continuamos con este proceso, es decir, integrando llegamos a encontrar una sucesión de polinomios que converge a f. Luego el conjunto de polinomios es denso y por tanto nuestro conjunto A también es denso (ya que habíamos demostrado que para cada polinomio existe una sucesión en A que converge a él).

Luego con esto queda demostrado que nuestro espacio es separable.

c) $B[a, b]$ no es separable.

Consideramos la familia de funciones, F, asociadas a la siguiente familia de sucesiones $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ de la siguiente forma: Sea $x_n \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ la función asociada a esta sucesión sería $\left\{ \substack{f\left(a + \frac{b-a}{i}\right) = x_i^n \\ 0 \text{ en el resto}} \right\}$.

Esta familia de funciones no es numerable ya que está en correspondecia biunívoca con $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, que no es numerable. Si ahora consideramos la familia de abiertos $B(f, \frac{1}{2})_{f \in F}$ estos son disjuntos dos a dos, luego no puede existir un conjunto denso en este espacio porque entonces tendría al menos un punto en cada bola $B(f, \frac{1}{2})_{f \in F}$, y entonces no sería numerable. Luego este espacio no es separable.

d) $\left(C[a, b], \|\|_p\right)$ es separable.

Se hace igual que el apartado a) de esta segunda parte, pero en este apartado utilizamos el teorema de Weierstrass luego tenemos que demostrar que este teorema también es cierto con la norma $\|\|_p$ .Para ello demostramos la siguiente desigualdad :

$$\|f_n - f\|_p \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} \|f_n - f\|_\infty .$$

$\|f_n - f\|_p^p = \int_a^b |f_n - f|^p \leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty^p = \|f_n - f\|_\infty^p (b-a)$

Elevando los dos términos de la desigualdad a $\frac{1}{p}$ tenemos que:

$\|f_n - f\|_p \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} \|f_n - f\|_\infty .$

Esta desigualdad nos dice que si $f_n \to f$ con la norma $\|\|_\infty$ entonces $f_n \to f$ con la norma $\|\|_p$. Luago por el teorema de Weierstrass también se tiene para este espacio, y una vez visto esto el ejercicio se resuelve igual que el apartado a) de esta segunda parte.

f) $V[a,b]$ no es separable, consideramos la siguente familia de funciones:

$\forall x \in [a,b] \;\; F = \left\{\chi_{[a,x]}\right\} x \in [a,b]$ esta familia no es numerable ya que el conjunto [a,b] no es numerable.

Por otro lado $\chi_{[a,x]} - \chi_{[a,y]} = \chi_{[x,y]}$ estamos suponiendo sin pérdida de generalidad que $x > y$, y se tiene que $V(\chi_{[x,y]}) = 1 + 1 = 2$.

Si ahora consideramos la familia de abiertos $B(f, \frac{1}{2})_{f \in F}$ estos son disjuntos dos a dos, luego no puede existir un conjunto denso en este espacio por que entonces tendría almenos un pumto en cada bola $B(f, \frac{1}{2})_{f \in F}$,y entonces no sería numerable. Luego este espacio no es separable.

Ejercicio 4: ¿Qué espacios de los problemas 1 y 2 son de Banach?

Espacios del ejercicio 1:

a) l_1 es de Banach, la demostración es un caso particular del apartado c).

b) l_2 es de Banach, la demostración es un caso particular del apartado c).

c) l_p es de Banach.

Veamos que l_p es completo.

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in l_p$ de Cauchy entonces $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$\|x_n - x_m\|_p < \varepsilon \; \forall n, m \geq n_0$.

Fijamos la coordenada i-ésima y tenemos$|x_n(i) - x_m(i)| \leq \|x_n - x_m\|_p$

$\Longrightarrow \{x_n(i)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy y como $\mathbb{R}$ es completo

$\Longrightarrow \exists x(i) = \lim_{n \to \infty} x_n(i) \; \forall i = 1, 2, ...$

Tenemos la siguiente situación:

$x_1 \sim x_1(1), x_1(2), ..., x_1(i), ...$

$x_2 \sim x_2(1), x_2(2), ..., x_2(i), ...$

$\cdots$

$x_n \sim x_n(1), x_n(2), ..., x_n(i), ...$
$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
$x \sim \quad x(1), \quad x(2), \qquad , x(i), ...$

Fijamos ahora k, $\left(\sum\limits_{i=1}^{k} |x_n(i) - x_m(i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x_n - x_m\|_p < \varepsilon \; \forall n, m \geq n_0$.Si hacemos tender $m \to \infty$ obtenemos lo siguiente:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |x_n(i) - x(i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon \; \forall n \geq n_0 \; y \; \forall k \qquad (\star)$$

En particular esto me dice, aplicando la desigualdad de Minkowski, que:
$\left(\sum\limits_{i=1}^{k} |x(i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon + \left(\sum\limits_{i=1}^{k} |x_n(i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Fijado k tengo vectores en $\mathbb{R}^n$ entonces lo que tenemos es $\|\|_p$ en $\mathbb{R}^k$ de la diferencia entre $\|y_n - y\|_p$ donde $y_n = (x_n(1), x_n(2), ..., x_n(k))$ y
$y = (x(1), x(2), ..., x(k))$ entonces lo que estamos diciendo es, $\|y\|_p \leq \|y - y_n\|_p +$
$+ \|y_n\|_p \Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N}$, $\left(\sum\limits_{i=1}^{k} |x(i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon + \left(\sum\limits_{i=1}^{k} |x_n(i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq$
$\leq \varepsilon + \|x_n\|_p \leq \varepsilon + M$ porque $\|x_n\|_p$ es acotado por ser $\{x_n\}_{n \in N}$ de Cauchy entonces de aquí deducimos que $x \in l_p$.

Por $(\star)$ si $k \to \infty \Longrightarrow \|x_n - x\|_p \leq \varepsilon \;\; \forall n \geq n_0$. Luego este espacio es de Banach.

d)$(l_\infty, \|\|_\infty)$ es de Banach.

Es un caso particular de la demostración de que $(B[a,b], \|\|_\infty)$ es de Banach, mirar el apartado c) de la siguiente parte referente al ejercicio 2, pero en este caso tomando $T = \mathbb{N}$.

e) $(c_0, \|\|)$ es de Banach.

Para ver que es de Banach utilizamos que c_0 es cerrado en l_∞ el cual es de Banach, y por clase sabemos que, un cerrado contenido en un completo es completo; como por el ejercicio 1 sabemos que es normado, entonces si demostramos que c_0 es cerrado en l_∞ ya tendríamos que es de Banach, pero esto es claro ya que la clausura de c_0 es el mismo.

f) $(c, \|\|)$ es de Banach.

La demostración es similar a la del apartado d) de la segunda parte de este ejercicio.

Espacios del ejercicio 2:

a) $(C[a,b], \|\|_\infty)$ es de Banach.

Es un espacio de Banach por ser cerrado en $B[a,b]$, que también es de Banach y como hemos dicho anteriormente en el apartado e), un cerrado contenido en un Banach es Banach.

Vemos que $(C[a,b], \|\|_\infty)$ es cerrado en $B[a,b]$. Si f pertenece a la clausura de $C[a,b]$ entonces existe una sucesión en $C[a,b]$ que converge a f, entonces $f \in C[a,b]$ ya que es límite uniforme de continuas y por tanto es continua.

b) $(C^k[a,b], \|\|_\infty)$ es de Banach.

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^k[a,b]$ de Cauchy entonces $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{f_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}, ..., \{f_n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$ son de Cauchy en $(C[a,b], \|\|_\infty)$ por definición de la norma $\|f\| = \sum_{i=0}^{k} \|f^i\|_\infty$. Luego como por el apartado a), $(C[a,b], \|\|_\infty)$ es de Banach existen funciones $g_0, g_1, ..., g_k$ tales que $\{f_n\} \to g_0, \{f_n^1\} \to g_1, ..., \{f_n^k\} \to g_k$ pero, por un resultado visto en años anteriores, sabemos que si $\{f_n\} \to f$ uniformemente y $\{f_n^i\} \to g$ uniformemente entonces $g = f^i$.

Luego tenemos que $g_i = g_0^i \Longrightarrow g_0 \in C^k[a,b]$ y se verifica que:

$\|f_n - g_0\| = \sum_{i=0}^{k} \max_{t\in[a,b]} |f_n^i(t) - g_0^i(t)| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

c) $(B[a,b], \|\|)$ es de Banach.

Como nos hemos basado en este apartado para demostrar otros y para ello necesitamos demostrarlo más en general, lo que vamos a hacer es ver que $(B(T), \|\|)$ es de Banach y entonces lo tendríamos demostrado en particular para $T = [a,b]$.

Vemos que $(B(T), \|\|)$ es completo.

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy entonces $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ $\forall n, m \geq n_0$ entonces $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy $\forall x \in T$ $(|f_n(x) - f_m(x)| \leq$
$\leq \|f_n - f_m\|) \Longrightarrow \exists f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \forall x \in T$.

Luego en principio tenemos una función $f : T \to \mathbb{R}$ y utilizando que

$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\ \forall n, m \geq n_0\ \forall x \in T \qquad (\star)$

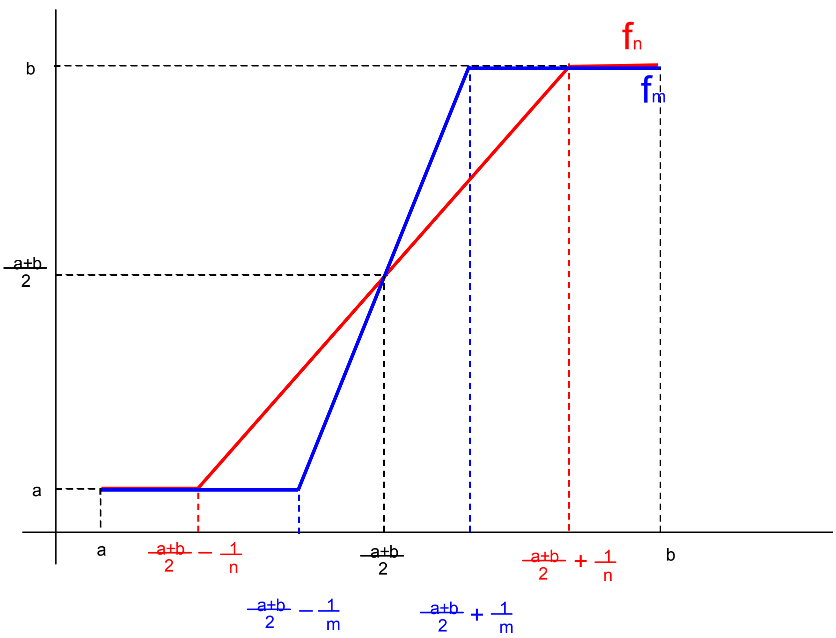
y haciendo tender m al infinito se tiene que $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \ \forall n \geq n_0\ \forall x \in T \Longrightarrow |f(x)| \leq |f_n(x)| + \varepsilon \leq \|f_n\| + \varepsilon \leq M + \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow f \in B(T)$.

Por $(\star)$ $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f\| \leq \varepsilon\ \forall n \geq n_0 \Longrightarrow f_n$ converge a f. Luego este espacio es completo y por tanto es de Banach.

d) $(C[a,b], \|\|_p)$ no es de Banach.

Vemos que no es completo.

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C[0,1]$ tomo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la que representamos a continuación.



En este dibujo están representadas f_n y f_m con $m > n$ y se tendrá lo siguiente:

$$\|f_n - f_m\|_p = \left[\int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^p\,dt\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_{\frac{a+b}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{a+b}{2}+\frac{1}{n}} |f_n(t) - f_m(t)|^p\,dt\right]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$\leq (M^p \frac{2}{n})^{\frac{1}{p}} = M(\frac{2}{n})^{\frac{1}{p}} \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $M(\frac{2}{n})^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$

$\Longrightarrow \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$

Vemos que no existe $f \in C[0,1]$ tal que la sucesión anterior converja a ella.

Suponemos que si existe, sea f tal que $f_n \to f$. Si $x > \frac{b+a}{2} \Longrightarrow f(x) = b$ ya que si $f(x) = r < b$ entonces como f es continua $\exists \partial > 0$ tal que $|y - x| < \partial$ se tiene que $f(y) < b - \frac{b-r}{2} \Longrightarrow \|f_n - f\|_p \geq \left[\int_{x-\partial}^{x+\partial} |f_n(t) - f_m(t)|^p\,dt\right]^{\frac{1}{p}} \geq \frac{b-r}{2}(2\partial)^{\frac{1}{p}}$

$\Longrightarrow f_n \nrightarrow f \Longrightarrow f(x) = b$ si $x > \frac{b+a}{2}$.

Análogamente se tiene que si $x < \frac{b+a}{2} \Longrightarrow f(x) = a \Longrightarrow f$ no es continua. Por tanto este espacio no es completo y entonces no es de Banach.

e) $(V[a,b], \|\|)$ es de Banach.

Lo primero que vemos es que si $\{f_n\}$ es de Cauchy entonces $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy $\forall x \in [a,b]$. Es claro que $\{f_n(a)\}$ es Cauchy, ya que por la definición de la norma $\|f\| = |f(a)| + \sup \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$.

Como $\|f_n - f_m\| = |f_n(a) - f_m(a)| + \sup \sum_{k=1}^{n} |(f_n(t_k) - f_n(t_{k-1})) - (f_m(t_k) - f_m(t_{k-1}))|$ entonces, si $\|f_n - f_m\| \to 0$ se tiene que $|f_n(a) - f_m(a)| \to 0$.

Por otro lado suponemos que $\exists x_0 \in [a,b]$ tal que $\{f_n(x_0)\}$ no es de Cauchy, luego $\exists \varepsilon > 0$ tal que $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \geq \varepsilon$ para infinitos $m \neq n$.

Luego existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ tal que $\left|f_{n_{k_1}}(x_0) - f_{n_{k_2}}(x_0)\right| \geq \varepsilon$ para todos $n_{k_1} \neq n_{k_2}$.Pero como $\{f_n(a)\}$ es Cauchy$\Longrightarrow$ $\{f_{n_k}(a)\}$ es Cauchy, luego para $\frac{\varepsilon}{2}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left|f_{n_{k_1}}(a) - f_{n_{k_2}}(a)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n_{k_1}, n_{k_2} \geq n_0$. Ahora bien tomando la partición $\pi = [a, x_0, b]$ obtenemos que:

$\left|f_{n_{k_1}} - f_{n_{k_2}}\right| \geq \left|(f_{n_{k_1}}(x_0) - f_{n_{k_2}}(x_0)) - (f_{n_{k_1}}(a) - f_{n_{k_2}}(a))\right| \geq$

$\geq \left|f_{n_{k_1}}(x_0) - f_{n_{k_2}}(x_0)\right| - \left|f_{n_{k_1}}(a) - f_{n_{k_2}}(a)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n_{k_1}, n_{k_2} \geq n_0$ pero esto es una contradicción ya que si una sucesión es de Cauchy toda subsucesión suya es de Cauchy, luego $\{f_{n_k}\}$ es de Cauchy. Luego con esto tenemos que $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy $\forall x \in [a,b]$, como los números reales son completos esta sucesión converge a una función f, puntualmente en $[a,b]$.

Vemos que $f \in V[a,b]$. Sea $\pi = \{a = t_0 < ... < t_k = b\}$ una partición del intervalo, tomamos ahora $\varepsilon = \frac{1}{k} \Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(t_i) - f(t_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_0$ $\forall i = 0, ..., k$.Debido a la convergencia puntual que tenemos se tiene lo siguiente:

$V_\pi(f) = \sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f_{n_0}(t_i)| + \sum_{i=1}^{k} |f_{n_0}(t_i) - f_{n_0}(t_{i-1})| +$

$+ \sum_{i=1}^{k} |f_{n_0}(t_{i-1}) - f(t_{i-1})| < \frac{k}{k} + V_\pi(f_{n_0}) + \frac{k}{k} \leq 1 + M + 1 \leq M + 2$ donde M es tal que $V_\pi(f_{n_0}) \leq M$ y sabemos que existe porque $f_{n_0} \in V[a,b]$ luego es de variación acotada.

Por último tenemos que ver que la sucesión converge a f con la norma de este espacio.Ver esto equivale a ver que:

1) $V(f_n - f) = \sup \sum_{k=1}^{n} |(f_n(t_k) - f_n(t_{k-1})) - (f(t_k) - f(t_{k-1}))| \to 0$;

2) $f_n(a) \to f(a)$.

Lo segundo lo tenemos por la convergencia puntual, ahora vemos que también se tiene lo primero. Queremos ver que dado $\varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $V(f_n - f) < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$. Fijamos ahora π una partición $\Longrightarrow V_\pi(f_n - f_m) < \varepsilon$ $\forall n, m \geq n_0$.

Como $V_\pi(f_n - f_m) = \sum_{k=1}^{n} |(f_n(t_k) - f_n(t_{k-1})) - (f_m(t_k) - f_m(t_{k-1}))| < \varepsilon$ tomamos límites cuando $m \to \infty$ y tenemos que:

$\sum_{k=1}^{n} |(f_n(t_k) - f_n(t_{k-1})) - (f(t_k) - f(t_{k-1}))| < \varepsilon \Longrightarrow V_\pi(f_n - f) < \varepsilon$.

Tomamos ahora supremos en $\pi \in P[a,b]$ y tenemos lo que queríamos, que era lo siguiente $V(f_n - f) < \varepsilon$. Luego $V(f_n - f) \to 0$.