Problemas de VC para EDVC elaborados por C. Mora, Tema 5

Ejercicio 1

Obtener los desarrollos en serie de Laurent de las siguientes funciones

1. $f(z) = e^z + e^{1/z^2}$ en $|z| > 0$
2. $f(z) = \frac{1}{z(z+R)}$ en $0 < |z| < R$
3. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ en las coronas centradas en cero donde esté definida
4. $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z+2}$ en las coronas centradas en cero donde esté definida

Solución 1

1. Basta recordar el desarrollo en serie de la función exponencial:

$$f(z) = e^z + e^{\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-2n}}{n!}.$$

2. Usando que $\left|-\frac{z}{R}\right| < 1$, podemos desarrollar la serie geométrica, y obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{z(z+R)} = \frac{1}{zR}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{R}\right)} = \frac{1}{zR}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{R}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{R^{n+1}}z^{n-1}.$$

3. Se tiene la siguiente descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}.$$

En $D(0,1)$ la función f es holomorfa, luego su desarrollo de Laurent es de hecho su desarrollo de Taylor, y dado que $|z| < 1$, desarrollando la serie geométrica se obtiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n. \end{aligned}$$

En la corona $1 < |z| < 2$ se desarrolla también la serie geométrica usando que $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ y $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ y se obtiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{-1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{-1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{-1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{con} \qquad a_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \leq -1 \\ \frac{-1}{2^{n+1}} & \text{si } n \geq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Por último, en la corona $|z| > 2$ se desarrolla también la serie geométrica usando que $\left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{2} \leq 1$ y $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$ y se obtiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{\frac{-1}{z}}{1-\frac{1}{z}} + \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{2}{z}} \\ &= \frac{-1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1+2^n}{z^{n+1}}. \end{aligned}$$

4. Es claro que g es holomorfa salvo en $z = -2, 0, 1$. Veamos primero el desarrollo de Laurent en la corona $0 < |z| < 1$. Usando el desarrollo de la serie geométrica

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} + \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{1-z}\right] + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{-z}{2}} \\ &= \frac{1}{z} + \frac{d}{dz}\left[\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right] + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{2}\right)^n = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[n+1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right] z^n. \end{aligned}$$

Hacemos un razonamiento análogo para la corona $1 < |z| < 2$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} - \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right] + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{-z}{2}} = \frac{1}{z} - \frac{d}{dz}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\right] + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n = \sum_{n=-\infty}^{-2}(-n-1)z^n + z^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n. \end{aligned}$$

Por último, en $|z| > 2$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} - \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right] + \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{-2}{z}} = \frac{1}{z} + \frac{d}{dz}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\right] + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{z}\right)^n \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-2}[-n-1+(-2)^{n-1}]z^n + 2z^{-1}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2

Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,2) \setminus \{0\})$ tal que para cada natural $n \geq 0$ se verifica

$$\int_{C(0,1)} z^n f(z)dz = 0.$$

Demostrar que $z = 0$ es una singularidad evitable de f.

Solución 2

El desarrollo de Laurent de f sobre subconjuntos compactos de $D(0,2) \setminus \{0\}$ es

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad \text{con} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,1)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,1)} z^{-n-1}f(z)dz,$$

con lo cual, si $-n-1 \geq 0$ entonces por hipótesis, $a_n = 0$. Por tanto, el desarrollo de Laurent realmente es el desarrollo de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, y así f es holomorfa en $D(0,2)$ sin más que definir $f(0) = a_0$.

Ejercicio 3

Clasificar las singularidades de las siguientes funciones

1. $f(z) = \frac{(z^2-1)(z-2)^3}{\operatorname{sen}^3(\pi z)}$
2. $f(z) = \frac{z}{\operatorname{sen} z}$
3. $f(z) = e^{1/(z^2-1)}$
4. $f(z) = z \cos \frac{1}{z}$

Solución 3

1. Definamos $g(z) = \operatorname{sen}(\pi z)$. Así,

$$f(z) = \frac{(z+1)(z-1)(z-2)^3}{g(z)^3}$$

es cociente de funciones enteras, luego es holomorfa salvo quizás en los ceros del denominador. Es inmediato comprobar que los ceros de $g(z)$ son exactamente los $z \in \mathbb{Z}$. Para $z = k \in \mathbb{Z}$ se tiene $g(k) = 0$, $g'(k) = (-1)^k\pi \neq 0$; o sea, $z = k$ es un cero simple de g. Por tanto, podemos escribir para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$\operatorname{sen}(\pi z) = (z-k)g_k(z)$$

en un entorno de $z = k$ para una cierta función g_k holomorfa y nunca nula en un entorno de $z = k$. Así pues, para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$f(z) = \frac{(z+1)(z-1)(z-2)^3}{(z-k)^3 g_k(z)^3}.$$

Clasifiquemos las singularidades de f según los valores de $k \in \mathbb{Z}$.
Sea $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1, 2\}$. Entonces

$$\lim_{z\to k}(z-k)^3 f(z) = \frac{(k-1)(k+1)(k-2)^3}{g_k(k)^3} \neq 0;$$

con lo cual, $z = k$ es un polo de orden 3 de f.

Sea $k = -1$. Entonces

$$\lim_{z\to -1}(z+1)^2 f(z) = \frac{(-1-1)(-1-2)^3}{g_{-1}(-1)^3} \neq 0;$$

luego $z = -1$ es un polo de orden 2 de f.

Sea $k = 1$. Entonces

$$\lim_{z\to 1}(z-1)^2 f(z) = \frac{(1+1)(1-2)^3}{g_1(1)^3} \neq 0;$$

con lo que $z = 1$ es un polo de orden 2 de f.

Sea $k = 2$. Entonces

$$\lim_{z\to 2} f(z) = \lim_{z\to 2} \frac{(z-1)(z+1)}{g_2(z)^3} \text{ existe;}$$

por tanto, $z = 2$ es una singularidad evitable de f.

2. Los ceros del denominador $\operatorname{sen} z$ son los $z = \pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$; su derivada en esos puntos es $\cos(\pi k) = (-1)^k \neq 0$, luego son ceros simples. Con lo cual podemos escribir para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$f(z) = \frac{z}{(z - k\pi)g_k(z)}$$

en un entorno de $z = k$, para una cierta función g_k holomorfa y nunca nula en un entorno de $z = k$.
Si $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ entonces

$$\lim_{z \to k\pi} (z - k\pi)f(z) = \frac{\pi k}{g_k(\pi k)} \neq 0;$$

con lo cual, $z = k\pi$ es un polo de orden 1 de f.
Si $k = 0$ entonces

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z}{z g_0(z)} = \frac{1}{g_0(0)} \text{ existe;}$$

por tanto, $z = 0$ es una singularidad evitable de f.

3. Tenemos que la función

$$f(z) = e^{\frac{1}{(z+1)(z-1)}}$$

es holomorfa en el plano salvo quizás en $z = -1$ y en $z = 1$. Observamos que

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \mathbb{R} \\ z > 1}} f(z) = \lim_{x \searrow 1} e^{\frac{1}{(x+1)(x-1)}} = +\infty \quad \text{pero} \quad \lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \mathbb{R} \\ z < 1}} f(z) = \lim_{x \nearrow 1} e^{\frac{1}{(x+1)(x-1)}} = 0.$$

Como no existe límite (finito ni infinito) cuando $z \to 1$, entonces $z = 1$ es una singularidad esencial de f. Un razonamiento análogo prueba que $z = -1$ es también una singularidad esencial de f.

4. Es claro que f es holomorfa en el plano salvo quizás en $z = 0$. Del desarrollo de Taylor del coseno obtenemos que

$$f(z) = z \cos\frac{1}{z} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{-n+1}$$

por tanto, el desarrollo de Laurent en $|z| > 0$ tiene infinitas potencias negativas. Esto nos dice que f tiene una singularidad esencial en $z = 0$.

Ejercicio 4

Calcular las siguientes integrales

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+2x+2} dx$

2. $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}$ con $a > 1$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx$ con $a, b > 0$

Solución 4

1. El integrando es continuo porque el denominador no se anula nunca. Además es conocido de los cursos elementales de análisis que las integrales $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ y $\int_{-\infty}^{-1} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ convergen, y son asintóticamente equivalentes a $\int_1^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+2x+2} dx$ y a $\int_{-\infty}^{-1} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+2x+2} dx$, respectivamente; con lo cual, la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+2x+2} dx$ converge, y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+2x+2} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+2x+2} dx = \operatorname{Im}\left[\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x e^{ix}}{x^2+2x+2} dx\right].$$

Fijemos $R > \sqrt{2}$; se tiene

$$\int_{-R}^{R} \frac{z e^{iz}}{z^2+2z+2} dz = \int_{\gamma_R} \frac{z e^{iz}}{z^2+2z+2} dz - \int_{C^+(0,R)} \frac{z e^{iz}}{z^2+2z+2} dz,$$

donde hemos denotado por $C^+(0,R)$ a la semicircunferencia $\{Re^{i\theta} : \theta \in [0,\pi]\}$, y la integral a lo largo del camino suma $\gamma_R = [-R,R]+C^+(0,R)$ es la suma de las integrales a lo largo de los caminos $[-R,R]$ y $C^+(0,R)$. El camino γ_R es cerrado y el único cero de $z \mapsto z^2+2z+2$ que encierra es $z = -1+i$. Por tanto, por la fórmula integral de Cauchy, para un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_R} \frac{z e^{iz}}{z^2+2z+2} dz &= \int_{C(-1+i,\varepsilon)} \frac{z e^{iz}/[z-(-1-i)]}{z-(-1+i)} dz \\ &= 2\pi i \left.\frac{z e^{iz}}{z+1+i}\right|_{z=-1+i} \\ &= \pi e^{-1}[-\cos 1 + \operatorname{sen} 1 + i(\operatorname{sen} 1 + \cos 1)].\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C^+(0,R)} \frac{ze^{iz}}{z^2+2z+2}dz\right| &= \lim_{R\to\infty}\left|\int_0^\pi \frac{R^2e^{2i\theta}e^{iR\cos\theta}e^{-R\operatorname{sen}\theta}}{R^2e^{2i\theta}+2Re^{i\theta}+2}id\theta\right| \\
&\leq \lim_{R\to\infty}\int_0^\pi \frac{R^2e^{-R\operatorname{sen}\theta}}{R^2-2R-2}d\theta = 0.
\end{aligned}$$

Todo lo cual concluye que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\operatorname{sen} x}{x^2+2x+2}dx = \pi e^{-1}(-\cos 1 + \operatorname{sen} 1).$$

2. Usando la simetría de la función y la parametrización natural de $C(0,1)$, esto es, $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, tenemos que

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \int_{-\pi}^\pi \frac{d\theta}{2a+e^{i\theta}+e^{-i\theta}} = \int_{C(0,1)} \frac{-i}{z^2+2az+1}dz.$$

Los ceros del denominador son $z = -a \pm \sqrt{a^2-1}$. El punto $z = -a-\sqrt{a^2-1}$ está en el exterior de $D(0,1)$ y el punto $z = -a+\sqrt{a^2-1}$ está en $D(0,1)$, con lo cual, por la fórmula integral de Cauchy, para un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{C(0,1)} \frac{-i}{z^2+2az+1}dz &= \int_{C(-a+\sqrt{a^2-1},\varepsilon)} \frac{-i/[z-(-a-\sqrt{a^2-1})]}{z-(-a+\sqrt{a^2-1})}dz \\
&= 2\pi i \left.\frac{-i}{z+a+\sqrt{a^2-1}}\right|_{z=-a+\sqrt{a^2-1}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.
\end{aligned}$$

3. Hacemos primero el caso $a = b$. Es decir, se trata de calcular la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}dx$. El integrando es continuo porque el denominador no se anula nunca, y la integral converge porque

$$\left|\frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}\right| \leq \frac{1}{(x^2+a^2)^2}$$

y la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx$ sabemos que converge. Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}dx.$$

Fijemos $R > a$. Como la función seno es impar, entonces

$$\int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2} dx = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)^2} dx.$$

Definimos la función

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^2}$$

que es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{-ia, ia\}$. La única singularidad de f que está encerrada por la curva cerrada simple $\gamma_R = [-R, R] + C^+(0, R)$ es ia, donde $C^+(0, R)$ es la semicircunferencia $\{Re^{i\theta} : \theta \in [0, \pi]\}$. Por un lado,

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)^2} dx = \int_{[-R,R]} f(z)dz = \int_{\gamma_R} f(z)dz - \int_{C^+(0,R)} f(z)dz,$$

y por otro, por la fórmula integral de Cauchy, para un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño se verifica que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} f(z)dz &= \int_{C(ia,\varepsilon)} \frac{e^{iz}/(z+ia)^2}{(z-ia)^2} dz = 2\pi i \frac{d}{dz} \left. \frac{e^{iz}}{(z+ia)^2} \right|_{z=ia} \\ &= 2\pi i e^{iz} \left. \frac{-a+iz-2}{(z+ia)^3} \right|_{z=ia} = \pi e^{-a} \frac{a+1}{2a^3}. \end{aligned}$$

Por otra parte, parametrizando $C^+(0, R)$ por $[0, \pi] \ni \theta \mapsto Re^{i\theta}$ se obtiene que

$$\int_{C^+(0,R)} f(z)dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{Rie^{i\theta}}}{(R^2e^{2i\theta}+a^2)^2} Rie^{i\theta} d\theta,$$

y tomando valores absolutos,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C^+(0,R)} f(z)dz \right| &\leq \int_0^{\pi} \frac{\left| e^{Ri(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)} \right|}{\left| R^2e^{2i\theta}+a^2 \right|^2} R d\theta = \int_0^{\pi} \frac{e^{-R\operatorname{sen}\theta} R}{\left| R^2e^{2i\theta}+a^2 \right|^2} d\theta \\ &\leq \int_0^{\pi} \frac{R}{\left| R^2e^{2i\theta}+a^2 \right|^2} d\theta \leq \int_0^{\pi} \frac{R}{(R^2-a^2)^2} d\theta \\ &= \frac{\pi R}{(R^2-a^2)^2}. \end{aligned}$$

Y pasando al límite,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C^+(0,R)} f(z)dz = 0.$$

Todo lo cual concluye que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}dx = \pi e^{-a}\frac{a+1}{2a^3}.$$

Hacemos ahora el caso $a \neq b$. El integrando es continuo porque el denominador no se anula nunca, y la integral converge porque podemos mayorarla por una integral convergente:

$$\left|\frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\right| \leq \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}.$$

Por tanto se verifica

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx.$$

Fijemos $R > \max\{a,b\}$. Como el seno es una función impar, se tiene que

$$\int_{-R}^{R}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx = \int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx.$$

Definimos la función

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$$

que es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{-ai,-bi,ai,bi\}$. Con esta notación,

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx = \int_{[-R,R]} f(z)dz.$$

Consideramos la curva $C^+(0,R)$ definida por la parametrización $[0,\pi]\ni\theta\mapsto Re^{i\theta}$ y la curva de Jordan $\gamma_R = [-R,R]+C^+(0,R)$; las singularidades de f encerradas por γ_R son ai y bi. Entonces, por la fórmula integral de Cauchy, para un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño se verifica que

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} f(z)dz &= \int_{C(ai,\varepsilon)} f(z)dz + \int_{C(bi,\varepsilon)} f(z)dz \\
&= \int_{C(ai,\varepsilon)} \frac{e^{iz}/[(z^2+b^2)(z+ai)]}{z-ai}dz + \int_{C(bi,\varepsilon)} \frac{e^{iz}/[(z^2+a^2)(z+bi)]}{z-bi}dz \\
&= 2\pi i \left[\left.\frac{e^{iz}}{(z^2+b^2)(z+ai)}\right|_{z=ai} + \left.\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z+bi)}\right|_{z=bi} \right] \\
&= 2\pi i \left[\frac{e^{-a}}{(-a^2+b^2)2ai} + \frac{e^{-b}}{(-b^2+a^2)2bi} \right] = \frac{\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b}\right).
\end{aligned}$$

Así pues,

$$\int_{[-R,R]} f(z)dz + \int_{C^+(0,R)} f(z)dz = \frac{\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b}\right).$$

Por otra parte, calculando la integral curvilínea en $C^+(0,R)$ se tiene

$$\int_{C^+(0,R)} f(z)dz = \int_0^\pi \frac{e^{Rie^{i\theta}} Rie^{i\theta}}{(R^2e^{2i\theta}+a^2)(R^2e^{2i\theta}+b^2)}d\theta$$

y tomando valores absolutos y límites,

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \left| \int_{C^+(0,R)} f(z)dz \right| &\leq \lim_{R\to\infty} \int_0^\pi \frac{\left|e^{Ri(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)}\right| R}{|R^2e^{2i\theta}+a^2|\,|R^2e^{2i\theta}+b^2|}d\theta \\
&\leq \lim_{R\to\infty} \int_0^\pi \frac{\left|e^{-R\operatorname{sen}\theta}\right| R}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)}d\theta \\
&\leq \lim_{R\to\infty} \frac{R\pi}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)} = 0.
\end{aligned}$$

Lo que concluye que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx = \frac{\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b}\right).$$

Ejercicio 5

Obtener la parte principal del desarrollo de Laurent de las siguientes funciones:

1. $f(z) = \frac{1}{\cos(\pi z)}$ en $z_0 = \frac{1}{2}$
2. $f(z) = \frac{z^2}{\cos(2\pi z^2)-1}$ en $z_0 = -i$

Solución 5

1. Veamos primero en qué corona centrada en $z_0 = \frac{1}{2}$ está definida la serie de Laurent. El denominador se anula en los puntos $z = \frac{1}{2} + n$, $n \in \mathbb{Z}$, luego está definida en la corona $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \left|z - \frac{1}{2}\right| < 1\}$. Definimos la función
$$g(z) = f(z)(z - z_0) = \frac{z - \frac{1}{2}}{\cos(\pi z)};$$
entonces $g \in \mathcal{H}(D(\frac{1}{2}, 1) \setminus \{\frac{1}{2}\})$ y además g en continua en $z = \frac{1}{2}$ definiendo
$$g(\frac{1}{2}) = \lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{z - \frac{1}{2}}{\cos(\pi z)} = \lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{1}{-\pi \operatorname{sen}(\pi z)} = \frac{-1}{\pi}$$
donde en el cálculo del límite se ha aplicado la regla de L'Hôpital. Así pues, $g \in \mathcal{H}(D(\frac{1}{2}, 1))$ y entonces tendrá un desarrollo en serie en torno a $z = \frac{1}{2}$, digamos
$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \frac{1}{2})^n, \qquad \forall z \in D(\frac{1}{2}, 1),$$
con $a_0 = g(\frac{1}{2}) = \frac{-1}{\pi}$. Entonces para cada $z \in D(\frac{1}{2}, 1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$,
$$f(z) = \frac{g(z)}{z - \frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \frac{1}{2})^{n-1} = \frac{a_0}{z - \frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (z - \frac{1}{2})^n$$
y así la parte principal del desarrollo de Laurent de f en $z = \frac{1}{2}$ es
$$\frac{-1}{\pi} \frac{1}{z - \frac{1}{2}}.$$

2. Es claro que f tiene una singularidad aislada en $z_0 = -i$. Definimos la función entera g y calculamos sus sucesivas derivadas en $z_0 = -i$:
$$\begin{array}{ll} g(z) = \cos(2\pi z^2) - 1 & g(-i) = 0 \\ g'(z) = -4\pi z \operatorname{sen}(2\pi z^2) & g'(-i) = 0 \\ g''(z) = -4\pi \operatorname{sen}(2\pi z^2) - 16\pi^2 z^2 \cos(2\pi z^2) & g''(-i) = 16\pi^2 \\ g'''(z) = -48\pi^2 z \cos(2\pi z^2) + 64\pi^3 z^3 \operatorname{sen}(2\pi z^2) & g'''(-i) = 48\pi^2 i \end{array}$$

Luego, usando la notación $O(h)^n$ para indicar una serie de potencias de h de orden mayor o igual que n tenemos que

$$g(z) = 8\pi^2(z+i)^2 + 8\pi^2 i(z+i)^3 + O(z+i)^4.$$

Definimos

$$h(z) = f(z)(z+i)^2 = \frac{z^2(z+i)^2}{\cos(2\pi z^2) - 1} = \frac{z^2}{8\pi^2 + 8\pi^2 i(z+i) + O(z+i)^2}$$

que es holomorfa en un entorno de $z = -i$ y admite un desarrollo de Taylor del tipo

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+i)^n \qquad \text{con} \quad a_0 = h(-i), \quad a_1 = h'(-i).$$

Ahora bien, directamente de la expresión de h sacamos que $h(-i) = \frac{-1}{8\pi^2}$. Su derivada vale

$$h'(z) = \frac{2z\left[8\pi^2 + O(z+i)\right] - z^2\left[8\pi^2 i + O(z+i)\right]}{64\pi^4 + O(z+i)},$$

con lo cual $h'(-i) = \frac{-i}{8\pi^2}$. Así,

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z+i)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+i)^{n-2} = \frac{a_0}{(z+i)^2} + \frac{a_1}{z+i} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z+i)^{n-2}.$$

Luego la parte principal del desarrollo de Laurent en $z_0 = -i$ es

$$\frac{-1}{8\pi^2}\frac{1}{(z+i)^2} + \frac{-i}{8\pi^2}\frac{1}{z+i}.$$

Ejercicio 6

Calcular las siguientes integrales

1. $\int_{C(0,2)} z \operatorname{sen} \frac{1}{z^2} dz$
2. $\int_{C(0,5)} \frac{e^z}{\cosh z} dz$. [Pista: se simplifican los cálculos si se expresa el integrando como h'/h]
3. $\int_{C(0,1)} \frac{(z-\frac{1}{2})^2}{\cos(\pi z)} dz$

4. $\int_{C(0,1)} z^3 e^{-1/z} dz$

Solución 6

1. Es claro que el integrando es una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Como $C(0,2)$ es una curva cerrada simple que encierra al 0 entonces, aplicando el teorema de los residuos

$$\int_{C(0,2)} z \operatorname{sen} \frac{1}{z^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(z \operatorname{sen} \frac{1}{z^2}, 0).$$

Ahora bien, recordando el desarrollo en serie de la función seno,

$$z \operatorname{sen} \frac{1}{z^2} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{z^2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! z^{4n+1}},$$

luego el coeficiente que acompaña a z^{-1} es el correspondiente a $n = 0$ y vale 1, y así

$$\int_{C(0,2)} z \operatorname{sen} \frac{1}{z^2} dz = 2\pi i.$$

2. Observamos que

$$\frac{e^z}{\cosh z} = \frac{2e^z}{e^z + e^{-z}} = \frac{2e^{2z}}{e^{2z} + 1} = \frac{h'(z)}{h(z)} \quad \text{con} \quad h(z) = e^{2z} + 1.$$

Los ceros de h en $\mathbb{C}$ son los $z = \pi i(\frac{1}{2} + k)$ con $k \in \mathbb{Z}$; además, como $h'(z) \neq 0\ \forall z \in \mathbb{C}$, se tiene que todos los ceros de h son simples. Observamos ahora que los ceros de h en $D(0,5)$ se tienen para $k = -1, 0$. Sabemos en general que si f tiene un cero de orden k en z_0 entonces $\frac{f'}{f}$ tiene un polo en z_0 de orden 1 y $\operatorname{Res}(\frac{f'}{f}, z_0) = k$. Con lo cual,

$$\int_{C(0,5)} \frac{e^z}{\cosh z} dz = 2\pi i(1+1) = 4\pi i.$$

3. Sean las funciones

$$h(z) = \cos(\pi z), \qquad f(z) = \frac{(z - \frac{1}{2})^2}{\cos(\pi z)} = \frac{(z - \frac{1}{2})^2}{h(z)}$$

Los ceros de h en $D(0,1)$ son $z = -\frac{1}{2}$ y $z = \frac{1}{2}$. Además $h'(\frac{1}{2}) = -\pi$, luego h tiene un cero simple en $z = \frac{1}{2}$; pero el numerador $(z - \frac{1}{2})^2$

tiene un cero doble en $z = \frac{1}{2}$, luego f tiene una singularidad evitable en $z = \frac{1}{2}$. Por tanto, por el teorema de los residuos,

$$\int_{C(0,1)} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -\frac{1}{2}).$$

Tenemos que $h'(-\frac{1}{2}) = \pi$, luego $g(z) = \pi(z + \frac{1}{2}) + O(z + \frac{1}{2})^2$. Entonces

$$f(z) = \frac{(z - \frac{1}{2})^2}{(z + \frac{1}{2})(\pi + O(z + \frac{1}{2}))} = \frac{1}{z + \frac{1}{2}} g(z)$$

donde la función g es holomorfa en un entorno de $z = -\frac{1}{2}$ y está definida mediante la expresión

$$g(z) = \frac{(z - \frac{1}{2})^2}{\pi + O(z + \frac{1}{2})}.$$

Observamos que $\operatorname{Res}(f, -\frac{1}{2}) = g(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\pi}$. Por tanto,

$$\int_{C(0,1)} \frac{(z - \frac{1}{2})^2}{\cos(\pi z)} dz = 2i.$$

4. Es claro que el integrando es holomorfo en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, y el desarrollo de Laurent en $z = 0$ se obtiene fácilmente recordando en desarrollo de la función exponencial

$$z^3 e^{-z^{-1}} = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^{-1})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{3-n}.$$

El coeficiente que acompaña a z^{-1} se tiene para $n = 4$ y vale $\frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$; o sea,

$$\operatorname{Res}(z^3 e^{-z^{-1}}, 0) = \frac{1}{24}$$

y por tanto, por el teorema de los residuos,

$$\int_{C(0,1)} z^3 e^{-\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(z^3 e^{-z^{-1}}, 0) = \frac{\pi i}{12}.$$

Ejercicio 7

Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ con un polo simple en 0, y $\operatorname{Res}(f, 0) = i$ tal que $f(1) = 1$ y $|f(z)| \leq 10$ para $|z| \geq 1$. Hallar la expresión explícita de f.

Solución 7

Como la única singularidad que tiene f es un polo simple en 0, y $\operatorname{Res}(f, 0) = i$, entonces existe una función entera φ tal que

$$f(z) = \frac{i}{z} + \varphi(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Esta función φ cumple

$$|\varphi(z)| = \left| f(z) - \frac{i}{z} \right| \leq |f(z)| + \frac{1}{|z|} \leq +10 + \frac{1}{|z|} \leq 11 \quad \text{para } |z| \geq 1.$$

Luego φ está acotada en $|z| \geq 1$; por continuidad, también está acotada en el compacto $|z| \leq 1$; con lo cual φ es entera y acotada, luego constante por el teorema de Liouville. Así pues, existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \frac{i}{z} + c$ y la condición $f(1) = 1$ nos dice que $c = 1 - i$. De donde se concluye que

$$f(z) = \frac{i}{z} + 1 - i \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Ejercicio 8

Sean Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y f una función meromorfa en Ω. Demostrar que si f es idénticamente nula en un abierto no vacío $V \subseteq \Omega$ entonces f es idénticamente nula en Ω y por tanto es holomorfa en Ω.

Solución 8

Como f es meromorfa en Ω, existe $S \subseteq \Omega$ sin puntos de acumulación en Ω tal que f es holomorfa en $\Omega \setminus S$. Sea

$$T = \{z \in \Omega \setminus S : f \text{ es idénticamente nula en un entorno de } z\}.$$

Por hipótesis, $T \neq \emptyset$ pues cada $z \in V$ cumple $z \in T$; además, T es un abierto de $\Omega \setminus S$. En efecto, si $z \in T$ entonces existe un abierto U que contiene a z tal que f se anula en U, y así $U \subseteq T$, con lo que T es entorno de todos sus puntos.

Veamos que T también es cerrado en $\Omega \setminus S$. Sea $z_0 \in \Omega \setminus S$ y sea $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en T con límite z_0. Como $\Omega \setminus S$ es abierto, existe $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subseteq \Omega \setminus S$; como z_n tiende a z_0, en particular existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z_{n_0} \in D(z_0, r)$. Como f se anula en un entorno de z_{n_0}, entonces por el teorema de identidad para funciones holomorfas, f es idénticamente nula en $D(z_0, r)$. Luego $z_0 \in T$.

Así pues, T es abierto, cerrado y no vacío en el conexo $\Omega \setminus S$, lo que nos dice que $T = \Omega \setminus S$. Por lo tanto, f se anula en $\Omega \setminus S$ y por continuidad, dado que $\Omega \setminus S$ es denso en Ω, f se anula en Ω.

Ejercicio 9

Sea $f \in \mathcal{H}(D(z_0, r) \setminus \{z_0\})$. Probar que f tiene una singularidad evitable en z_0 (respectivamente, un polo o una singularidad esencial) si y sólo si la tiene f'.

Solución 9

Si f tiene una singularidad evitable en z_0, entonces f es holomorfa en $D(z_0, r)$ sin más que definir $f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)$ con lo cual f' tiene una singularidad evitable en z_0 al ser derivada de una función holomorfa.

Si f tiene un polo en z_0 entonces existe un natural $k \geq 1$ (el orden del polo) tal que f admite el siguiente desarrollo de Laurent en $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

con $a_{-k} \neq 0$. Entonces el desarrollo de Laurent de f en $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ es

$$f'(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} = \sum_{n=-k-1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z - z_0)^n = \sum_{n=-k-1}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

con el término $n = -k - 1$ distinto de cero, pues $b_{-k-1} = -k a_{-k} \neq 0$. Luego f' tiene un polo de orden $k + 1$ en z_0.

Si f tiene una singularidad esencial en z_0, su desarrollo de Laurent en $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ es del tipo

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

con $a_n \neq 0$ para infinitos enteros $n \leq -1$. Entonces el desarrollo de Laurent de f' en $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ es

$$f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

con $b_n = (n+1)a_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, y así $b_n \neq 0$ para infinitos enteros $n \leq -1$. Esto nos dice que f' tiene una singularidad esencial en z_0.

Probar el recíproco, una vez probado esto, es trivial. En efecto, si f' tiene una singularidad de un cierto tipo en z_0, entonces f tendría en z_0, en principio, o una singularidad evitable o un polo o una singularidad esencial. Lo que acabamos que probar nos dice que sólo cabe que la singularidad de f sea del mismo tipo que la de f'.