Problemas de VC para EDVC elaborados por C. Mora, Tema 4

Ejercicio 1

Determinar las funciones enteras f para las que

$$f(z+w) = f(z)f(w) \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

Solución 1

En primer lugar, $f(0) = f(0+0) = f(0)f(0) = f(0)^2$, luego sólo cabe que $f(0) = 0$ o $f(0) = 1$.

Si fuera $f(0) = 0$ entonces para todo $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = f(z+0) = f(z)f(0) = 0$, luego $f = 0$.

Sea, pues, $f(0) = 1$. Tenemos que para cada $z \in \mathbb{C}$,

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f(z) \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - 1}{h} = f(z) \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f(z)f'(0).$$

De la relación $f'(z) = f(z)f'(0)$, derivando sucesivas veces, se obtiene por inducción que $f^{n)}(z) = f(z)f'(0)^n$, para todo natural $n \geq 0$. Evaluando en $z = 0$ obtenemos en particular que

$$f^{n)}(0) = f'(0)^n, \qquad n \geq 0.$$

Como f es entera, admite un desarrollo en serie de potencias, y gracias a estos resultados concluimos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f'(0)^n}{n!} z^n = e^{f'(0)z}.$$

Como $f'(0)$ puede ser arbitrario, en total tenemos que las funciones que nos piden son del tipo

$$f(z) = e^{kz} \quad \text{con } k \in \mathbb{C}; \text{ y } f(z) = 0.$$

Esto es una condición necesaria. También es suficiente pues resulta inmediato comprobar que las funciones $f(z) = e^{kz}$ y $f(z) = 0$ satisfacen las condiciones requeridas.

Ejercicio 2

Sea f una función holomorfa en un entorno conexo de $\overline{D}(0,1)$ tal que $f(z) = f(2z)$ para todo $z \in \overline{D}(0,1/2)$. Probar que f es constante.

Solución 2

Por hipótesis, $f(z) = f(z/2)$ para todo $z \in \overline{D}(0,1) \setminus \{0\}$, y repitiendo este argumento se sigue que para todo natural $n \geq 0$

$$f(z) = f\left(\frac{z}{2}\right) = \cdots = f\left(\frac{z}{2^n}\right) = \cdots = f(0),$$

donde para la última igualdad se ha usado la continuidad de f, puesto que $\lim_{n\to\infty} \frac{z}{2^n} = 0$. Es decir, f vale $f(0)$ en una sucesión de puntos distintos de $\overline{D}(0,1)$ cuyo límite es $0 \in D(0,1)$. Por el principio de identidad, f es constante.

Ejercicio 3

Demostrar que si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y existen $\varepsilon > 0$ y $w \in \mathbb{C}$ tales que

$$|f(z) - w| \geq \varepsilon \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

entonces f es constante. Concluir que la imagen de toda función entera no constante en densa en $\mathbb{C}$.

Solución 3

La función $z \mapsto f(z) - w$ es entera y no se anula por hipótesis. Con lo cual la función

$$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$$

es entera y además acotada porque

$$|g(z)| = \left|\frac{1}{f(z) - w}\right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Por el teorema de Liouville, g es constante y esto implica que f también es constante.

Por tanto, si h es una función entera no constante, lo que acabamos de probar nos dice que

para cualesquiera $\varepsilon > 0$ y $w \in \mathbb{C}$ existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $|h(z) - w| < \varepsilon$.

Esto es decir justamente que la imagen de h es densa en $\mathbb{C}$.

Ejercicio 4

Sean Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no constante tales que $f(\Omega) \subseteq \Omega$ y $f(z) = f(f(z))$ para cada $z \in \Omega$. Demostrar que $f(z) = z$ $\forall z \in \Omega$.

Solución 4

Antes de nada, observamos que la condición $f(\Omega) \subseteq \Omega$ es la que permite considerar $f \circ f$. Como f no es constante y Ω es conexo, existe $z_0 \in \Omega$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Por el teorema de la función inversa, existen E^{z_0} entorno de z_0 y $E^{f(z_0)}$ entorno de $f(z_0)$ tales que la restricción $f : E^{z_0} \to E^{f(z_0)}$ es biyectiva; además, como el conjunto de ceros de f' es discreto, podemos escoger E^{z_0} para que cumpla que f' no se anule en E^{z_0}. Derivando la expresión $f(z) = f(f(z))$ obtenemos

$$f'(z) = f'(f(z))f'(z) \qquad \forall z \in E^{z_0}$$

y por nuestra elección de E^{z_0} obtenemos $1 = f'(f(z))$ $\forall z \in E^{z_0}$. Como $f(E^{z_0}) = E^{f(z_0)}$ esto nos dice que

$$f'(y) = 1 \qquad \forall y \in E^{f(z_0)}$$

Como Ω es conexo, por el teorema de identidad $f' = 1$. De nuevo gracias a la conexión de Ω, para alguna constante $c \in \mathbb{C}$ se tiene $f(z) = z + c$ $\forall z \in \Omega$. Ahora bien, aplicando que $f(z) = f(f(z))$ obtenemos

$$z + c = f(z + c) = z + 2c$$

Luego $c = 0$ y así f es la aplicación identidad, como queríamos.

Ejercicio 5

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo, $f \in \mathcal{H}(\not\leq)$ no idénticamente nula y $z_0 \in \Omega$ un cero de orden $m \geq 1$ de f. Demostrar que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $0 < |w| < \delta$ entonces la ecuación $f(z) = w$ en la incógnita z tiene exactamente m raíces simples en $D(z_0, \varepsilon)$ (ceros de primer orden de $f(z) - w = 0$).

Solución 5

Usaremos las notaciones siguientes: para una función holomorfa h y una curva cerrada simple γ, denotaremos por $Z(h)$ el conjunto de ceros de h, y por $N_\gamma(h)$ el número de ceros de h en la componente acotada definida por γ.

Ante todo, z_0 es un cero aislado de f ya que f no es idénticamente nula. Si $m > 1$ entonces z_0 es cero aislado de f'; si $m = 1$ entonces z_0 no es cero de f'. En cualquier caso, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que se verifican las tres condiciones

$$\overline{D}(z_0, \varepsilon_0) \subseteq \Omega, \quad \overline{D}(z_0, \varepsilon_0) \cap Z(f) = \{z_0\},$$
$$\begin{cases} \overline{D}(z_0, \varepsilon_0) \cap Z(f') = \{z_0\} & \text{si } m > 1 \\ \overline{D}(z_0, \varepsilon_0) \cap Z(f') = \emptyset & \text{si } m = 1 \end{cases}.$$

Sea $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Entonces $f(z) \neq 0$ $\forall z \in C(z_0, \varepsilon)$. Como $C(z_0, \varepsilon)$ es compacto, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(z)| \geq \delta \qquad \forall z \in C(z_0, \varepsilon).$$

Tomemos cualquier $w \in \mathbb{C}$ que verifique $0 < |w| < \delta$ y definamos la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$, $g(z) = f(z) - w$. Claramente $g \in \mathcal{H}(\nleq)$, y además

$$|f(z) - g(z)| = |w| < \delta \leq |f(z)| \qquad \forall z \in C(z_0, \varepsilon).$$

Por el teorema de Rouché,

$$m = N_{C(z_0,\varepsilon)}(f) = N_{C(z_0,\varepsilon)}(g).$$

Si $m = 1$ ya está demostrado; si $m > 1$ probemos que g no tiene raíces múltiples. En efecto, sea $a \in D(z_0, \varepsilon)$ una raíz de g. Entonces $g(a) = 0$, es decir, $f(a) = w \neq 0$, y en particular $a \neq z_0$. Si a fuese raíz múltiple de g entonces $0 = g'(a) = f'(a)$ contradicción pues tomamos $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\overline{D}(z_0, \varepsilon_0) \cap Z(f') = \{z_0\}$.

Con lo cual, g tiene m raíces simples en $D(z_0, \varepsilon)$, o equivalentemente, la ecuación $f(z) = w$ en la incógnita z tiene exactamente m raíces simples en $D(z_0, \varepsilon)$.

Ejercicio 6

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo, $z_0 \in \Omega$ y $R > 0$ tales que $\overline{D}(z_0, R) \subseteq \Omega$. Demostrar que si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no tiene ceros en $D(z_0, R)$ y $|f|$ es constante en $C(z_0, R)$, entonces f es constante en Ω.

Solución 6

Si f no fuera constante en $D(z_0, R)$, dado que no se anula en $D(z_0, R)$, por los principios del módulo máximo y módulo mínimo, $|f|$ carece de máximos y mínimos locales en $D(z_0, R)$; es decir,

$$\text{para todo } z \in D(z_0, R) \text{ existen } z_1, z_2 \in C(z_0, R) \text{ tales que } |f(z_1)| < |f(z)| < |f(z_2)|.$$

En particular, esto nos dice que $|f|$ no es constante en $C(z_0, R)$, contra la hipótesis. Con lo cual, f es constante en $D(z_0, R)$ y como Ω es conexo, entonces f es constante en Ω.

Ejercicio 7

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tales que $\overline{D}(0,1) \subseteq \Omega$, $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$ para $|z| = 1$. Demostrar que

$$\left|e^{f(z)} - 1\right| \leq (1+e)\,|z| \qquad \forall z \in \overline{D}(0,1).$$

Solución 7

Definimos la función

$$g : \Omega \to \mathbb{C}, \qquad g(z) = \frac{e^{f(z)} - 1}{z}.$$

Esta función es continua en $z = 0$ definiendo

$$g(0) = \lim_{z\to 0} \frac{e^{f(z)} - 1}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{e^{f(z)} - e^{f(0)}}{z} = \frac{d}{dz} e^{f(z)}\Big|_{z=0} =$$

$$e^{f(z)} f'(z)\Big|_{z=0} = f'(0)$$

Por tanto $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Por el principio del módulo máximo y gracias a la hipótesis se verifica que

$$\begin{aligned} \max_{z\in\overline{D}(0,1)} |g(z)| &= \max_{z\in C(0,1)} |g(z)| = \max_{z\in C(0,1)} \frac{\left|e^{f(z)} - 1\right|}{|z|} \\ &= \max_{z\in C(0,1)} \left|e^{f(z)} - 1\right| \leq \max_{z\in C(0,1)} \left|e^{f(z)}\right| + 1 \leq e + 1. \end{aligned}$$

Por la definición de g, esto es justo lo que queríamos probar.

Ejercicio 8

Hallar el número de raíces del polinomio $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ en $D(0,1)$.

Solución 8

Definimos los polinomios

$$f(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1, \qquad g(z) = -4z^5.$$

Verifican lo siguiente

$$|f(z) - g(z)| = \left|z^8 + z^2 - 1\right| \leq |z|^8 + |z|^2 + 1 = 3 < 4 = \left|-4z^5\right| = |g(z)| \quad \forall z \in C(0,1).$$

Por el teorema de Rouché, el número de ceros de f en $D(0,1)$ coincide con el número de ceros de g en $D(0,1)$, contados con su multiplicidad. Es claro que g tiene cinco ceros en $D(0,1)$, luego f tiene cinco ceros en $D(0,1)$.

Ejercicio 9

Sea f una función holomorfa en un abierto que contenga a $\overline{D}(0,1)$ tal que $|f(z)| \geq 2$ para $|z| = 1$, y $f(0) = 1$. Demostrar que f se anula en algún punto de $D(0,1)$.

Solución 9

Si f no se anulara en $D(0,1)$, como también $|f(z)| \geq 2$ para $|z| = 1$, entonces la función $1/f$ sería holomorfa en un entorno de $\overline{D}(0,1)$. Además, por el principio del módulo máximo y gracias a la hipótesis,

$$\sup_{z \in D(0,1)} \left| \frac{1}{f(z)} \right| = \max_{z \in C(0,1)} \left| \frac{1}{f(z)} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

En particular, $\left| \frac{1}{f(0)} \right| \leq \frac{1}{2}$, lo que contradice $f(0) = 1$. Luego necesariamente f se anula en algún punto de $D(0,1)$.

Ejercicio 10

Sea $f = u + iv$ una función holomorfa en un abierto acotado Ω y continua en $\overline{\Omega}$. Demostrar que

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\overline{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

Probar que lo mismo ocurre con v.

Solución 10

Definamos la función e^f que es holomorfa en Ω y continua en $\overline{\Omega}$. Por el principio del módulo máximo,

$$\sup_{z \in \Omega} \left| e^{f(z)} \right| = \sup_{z \in \overline{\Omega}} \left| e^{f(z)} \right| = \sup_{z \in \partial\Omega} \left| e^{f(z)} \right|.$$

Ahora bien, $\left| e^{f(z)} \right| = e^{u(z)}$, y como la exponencial real es creciente, esto concluye lo que queremos.

Para obtener el correspondiente resultado para v, se aplica el razonamiento anterior a la función e^{-if}.

Ejercicio 11

Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ que contenga a la corona $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$ y sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Demostrar que si $|f(z)| \leq 1$ para $|z| = 1$ y $|f(z)| \leq 4$ para $|z| = 2$ entonces $|f(z)| \leq |z|^2$ para $1 \leq |z| \leq 2$.

Solución 11

Sea $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ y definamos $g(z) = \frac{f(z)}{z^2}$; entonces $g \in \mathcal{H}(\Omega_1) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega_1})$. Por el principio del módulo máximo, el supremo de g en Ω_1 se alcanza en la frontera; ahora bien, por las hipótesis hechas sobre f,

$$|g(z)| \leq 1 \text{ para } |z| = 1 \text{ y para } |z| = 2,$$

con lo cual $|g(z)| \leq 1$ para $1 \leq |z| \leq 2$, y esto es justo lo que nos piden.

Ejercicio 12

Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $\operatorname{Re} f$ es acotada. Probar que f es constante.

Solución 12

La función e^f es entera y acotada porque $\left|e^f\right| = e^{\operatorname{Re} f}$. Por el teorema de Liouville, e^f es constante. Por tanto,

$$0 = \frac{d}{dz} e^{f(z)} = e^{f(z)} f'(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

y como la exponencial no se anula nunca, entonces $f' = 0$ lo que implica que f es constante.

Ejercicio 13

Sean f, g dos funciones enteras tales que $|f| \leq |g|$. Demostrar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \leq 1$ tal que $f = \lambda g$.

Solución 13

Si $g = 0$ entonces $f = 0$ y el resultado es evidente. Sea, pues, g no idénticamente nula; entonces su conjunto de ceros $Z(g)$ es discreto. Así, la función $\frac{f}{g}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus Z(g)$ y por la hipótesis, acotada. Por el teorema de Riemann sobre singularidades evitables aplicado a cada punto del conjunto discreto $Z(g)$ concluimos que $\frac{f}{g}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$. Por el teorema de Liouville, $\frac{f}{g}$ es una constante, digamos $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \leq 1$. Luego $f = \lambda g$.

Si no se conoce el teorema de Riemann sobre singularidades evitables, es muy fácil ver que si g tiene un cero en z_0 de multiplicidad n entonces la condición $|f| \leq |g|$ implica que f tiene un cero en z_0 de multiplicidad $m \geq n$ y así $\frac{f}{g}$ es holomorfa en un entorno de z_0. Como esto ocurre en cada punto z_0 del conjunto discreto $Z(g)$, esto prueba que la función $\frac{f}{g}$ es entera.

Ejercicio 14

Sean Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ y $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tales que

$$|f(z)| + |g(z)| \leq |f(z_0)| + |g(z_0)| \qquad \forall z \in \Omega.$$

Probar que f y g son constantes. [Pista: trabajar con $f\frac{\overline{f(z_0)}}{|f(z_0)|}$, $g\frac{\overline{g(z_0)}}{|g(z_0)|}$]

Solución 14

Supongamos en primer lugar que $f(z_0) = 0$. Entonces

$$|g(z)| \leq |f(z)| + |g(z)| \leq |f(z_0)| + |g(z_0)| = |g(z_0)| \qquad \forall z \in \Omega$$

y por el principio del módulo máximo, g es constante en Ω. Entonces todas las desigualdades anteriores son igualdades y en particular $|f(z)| = 0\ \forall z \in \Omega$ con lo que f también es constante.

Si $g(z_0) = 0$ llegamos a la misma conclusión. Por tanto, razonemos para el caso $f(z_0) \neq 0$, $g(z_0) \neq 0$. Definimos las funciones

$$\tilde{f}(z) = f(z)\frac{\overline{f(z_0)}}{|f(z_0)|}, \qquad \tilde{g}(z) = g(z)\frac{\overline{g(z_0)}}{|g(z_0)|}$$

que claramente son holomorfas en Ω. Cumplen que

$$\tilde{f}(z_0) = |f(z_0)|\,, \quad \tilde{g}(z_0) = |g(z_0)|\,, \quad \left|\tilde{f}\right| = |f|\,, \quad |\tilde{g}| = |g|\,.$$

Entonces para cada $z \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \left|(\tilde{f} + \tilde{g})(z_0)\right| &= \tilde{f}(z_0) + \tilde{g}(z_0) = |f(z_0)| + |g(z_0)| \geq |f(z)| + |g(z)| \\ &= \left|\tilde{f}(z)\right| + |\tilde{g}(z)| \geq \left|(\tilde{f} + \tilde{g})(z)\right|. \end{aligned}$$

Por el principio del módulo máximo, $\tilde{f} + \tilde{g}$ es constante, luego todas las desigualdades anteriores son igualdades y no dependen de $z \in \Omega$. En particular, para cada $z \in \Omega$,

$$\tilde{f}(z) + \tilde{g}(z) = \left|\tilde{f}(z)\right| + |\tilde{g}(z)|$$

que es un número positivo. Esto implica que $\tilde{f}(z)$ y $\tilde{g}(z)$ son reales (es inmediato ver que si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ cumplen $\alpha + \beta = |\alpha| + |\beta|$ entonces $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Pero se sigue de las condiciones de Cauchy-Riemann que una función holomorfa con parte imaginaria cero es constante. Luego $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ son constantes y f y g también.

Ejercicio 15

Se dice que una función de variable compleja f tiene periodo $T \in \mathbb{C}$ cuando

$$f(z+T) = f(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Demostrar que si $U, V \in \mathbb{C}$ son periodos $\mathbb{R}$-linealmente independientes (es decir, los vectores U, V son linealmente independientes en el espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$) de una función entera f, entonces f es constante.

Solución 15

El conjunto $Q = \{\lambda U + \mu V : \lambda, \mu \in [0,1]\}$ es compacto al ser imagen del compacto $[0,1]^2$ por la aplicación continua $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(\lambda, \mu) \mapsto \lambda U + \mu V$. Como $U, V \in \mathbb{C}$ son $\mathbb{R}$-linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$, dado $z \in \mathbb{R}^2$ existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que $z = \lambda U + \mu V$. Ahora expresamos $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, $\mu = \mu_1 + \mu_2$ con $\lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{Z}$ y $0 \le \lambda_2, \mu_2 \le 1$. Entonces la periodicidad nos permite afirmar que

$$f(z) = f(\lambda_1 U + \lambda_2 U + \mu_1 V + \mu_2 V) = f(\lambda_2 U + \mu_2 V).$$

En otras palabras, $f(\mathbb{C}) = f(Q)$; en particular,

$$\sup_{\mathbb{C}} |f| = \sup_{Q} |f|$$

y como Q es compacto y f es continua en Q, entonces $\sup_Q |f| < \infty$. Por tanto, f es una función entera y acotada al ser $\sup_{\mathbb{C}} |f| < \infty$; por el teorema de Liouville, f es constante.

Ejercicio 16

Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ tal que $\lim_{z\to 0} z f(z) = 1$ y $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$. Hallar la expresión explícita de f.

Solución 16

Consideremos la función $g(z) = z f(z) - 1$, que es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y continua en $z = 0$ definiendo

$$g(0) = \lim_{z\to 0}(z f(z) - 1) = 0;$$

con lo cual g es una función entera.

Definamos ahora la función $h(z) = \frac{g(z)}{z}$, que es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y continua en $z = 0$ definiendo

$$h(0) = \lim_{z \to 0} \frac{g(z)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{g(z) - g(0)}{z} = g'(0);$$

con lo cual h es también una función entera. Además

$$\lim_{z \to \infty} h(z) = \lim_{z \to \infty} \left(f(z) - \frac{1}{z} \right) = 1.$$

Luego h es acotada, y por el teorema de Liouville, h es constante, y esa constante vale $\lim_{z \to \infty} h(z) = 1$. Así, $1 = f(z) - \frac{1}{z}$ o sea,

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Ejercicio 17

Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$. Demostrar que el conjunto de números naturales $k \geq 0$ que verifican

$$\left| f^{k)}(0) \right| \geq k!2^k$$

es finito.

Solución 17

Como $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$, entonces la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k)}(0)}{k!} z^k$ converge para $|z| < 1$. Supongamos que para infinitos naturales $k \geq 0$ se cumpliera $\left| f^{k)}(0) \right| \geq k!2^k$. Entonces se tendría

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \left| \frac{f^{k)}(0)}{k!} \right|^{\frac{1}{k}} \geq 2$$

y por tanto la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k)}(0)}{k!} z^k$ poseería un radio de convergencia menor o igual que $\frac{1}{2}$, lo que contradice que $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ como acabamos de observar.

Ejercicio 18

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $z_0 \in \Omega$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Demostrar que existe $r > 0$ tal que

$$\frac{1}{f'(z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{1}{f(z) - f(z_0)} dz.$$

Solución 18

Como $f'(z_0) \neq 0$ en particular f no es constante en la componente conexa de Ω que contiene a z_0. Con lo cual, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(z) \neq f(z_0)$ para todo $z \in D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$. Consideramos la función

$$g(z) = \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)}$$

que es holomorfa en $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ y continua en $z = z_0$ definiendo

$$g(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Luego g es holomorfa en $D(z_0, \varepsilon)$ y por la fórmula integral de Cauchy, para todo $0 < r < \varepsilon$ se cumple

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{g(z)}{z - z_0} dz.$$

Por nuestra definición de g, esta es justo la fórmula que buscábamos.