Problemas de VC para EDVC elaborados por C. Mora, Tema 3

Ejercicio 1

Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ dos curvas cerradas de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos y $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$|\gamma_0(t) - \gamma_1(t)| < |z - \gamma_0(t)| \qquad \forall t \in [0,1].$$

Demostrar que $Ind_{\gamma_0}(z) = Ind_{\gamma_1}(z)$. [Pista: considerar la curva $\gamma(t) = \frac{\gamma_1(t)-z}{\gamma_0(t)-z}$, demostrar que su trayectoria está contenida en $D(1,1)$ y calcular $Ind_\gamma(0)$].

Solución 1

La condición $|\gamma_0(t) - \gamma_1(t)| < |z - \gamma_0(t)|\ \forall t \in [0,1]$ nos dice en particular que $z \neq \gamma_0(t)\ \forall t \in [0,1]$, luego la curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = \frac{\gamma_1(t)-z}{\gamma_0(t)-z}$ está bien definida (el denominador nunca se anula) y es $\mathcal{C}^1$ a trozos por ser composición de funciones $\mathcal{C}^1$ a trozos. La hipótesis nos dice que $\left|\frac{\gamma_0(t)-\gamma_1(t)}{z-\gamma_0(t)}\right| < 1\ \forall t \in [0,1]$ con lo cual

$$|\gamma(t) - 1| = \left|\frac{\gamma_1(t) - z}{\gamma_0(t) - z} - 1\right| = \left|\frac{\gamma_1(t) - \gamma_0(t)}{\gamma_0(t) - z}\right| < 1,$$

luego $Tray_\gamma \subseteq D(1,1)$. En particular, 0 está en la región no acotada de $\mathbb{C} \setminus Tray_\gamma$, ya que $0 \notin D(1,1)$, con lo cual, $Ind_\gamma(0) = 0$. Así,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)\,[\gamma_0(t) - z] - [\gamma_1(t) - z]\,\gamma_0'(t)}{[\gamma_0(t) - z]^2} \frac{\gamma_0(t) - z}{\gamma_1(t) - z} dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t) - z} - \frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t) - z}\right] dt, \end{aligned}$$

luego

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t) - z} dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t) - z} dt \qquad \text{es decir,} \quad Ind_{\gamma_1}(z) = Ind_{\gamma_0}(z).$$

Ejercicio 2

Sean $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y γ un camino cerrado que no pase por $0, a, 1/a$. Demostrar que

$$Ind_{1/\gamma}(\frac{1}{a}) = Ind_\gamma(a) - Ind_\gamma(0).$$

Solución 2

Antes de nada, se verifica que $1/\gamma$ es un camino porque γ no pasa por 0. Pongamos que γ está parametrizado en el intervalo $[\alpha, \beta]$. Se tiene

$$Ind_{1/\gamma}(\frac{1}{a}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\zeta - \frac{1}{a}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{1}{\frac{1}{\gamma(t)} - \frac{1}{a}} \frac{-\gamma'(t)}{\gamma(t)^2} dt = \frac{a}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{1}{\gamma(t) - a}\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt.$$

Pero también por otra parte,

$$\begin{aligned} Ind_\gamma(a) - Ind_\gamma(0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left[\frac{1}{\zeta - a} - \frac{1}{\zeta}\right] d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{a}{(\zeta - a)\zeta} d\zeta \\ &= \frac{a}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(t)}{[\gamma(t) - a]\,\gamma(t)} dt, \end{aligned}$$

como deseábamos.

Ejercicio 3

Sean γ un camino en $\mathbb{C}$, $\overline{\gamma}$ su camino conjugado y f una función compleja continua en la trayectoria de γ. Demostrar que

$$\overline{\int_\gamma f(z) dz} = \int_{\overline{\gamma}} \overline{f(\overline{z})} dz.$$

Solución 3

Pongamos que $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$. Entonces $\overline{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ definido por $\overline{\gamma}(t) = \overline{\gamma(t)}$ es un camino y además es inmediato comprobar que $\overline{\gamma}'(t) = \overline{\gamma'(t)}$. Por un lado se tiene

$$\overline{\int_\gamma f(z) dz} = \overline{\int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t) dt} = \int_\alpha^\beta \overline{f(\gamma(t))\gamma'(t)} dt.$$

Y por otro, gracias a la observación anterior y a que f es continua en la trayectoria de γ, entonces

$$\int_{\overline{\gamma}} \overline{f(\overline{z})} dz = \int_\alpha^\beta \overline{f\left(\overline{\overline{\gamma(t)}}\right)}\,\overline{\gamma'(t)} dt = \int_\alpha^\beta \overline{f(\gamma(t))\gamma'(t)} dt$$

y se tiene la igualdad buscada.

Ejercicio 4

Calcular las siguientes integrales curvilíneas

$$a) \int_{|\zeta|=2} \frac{e^\zeta}{\zeta(\zeta-1)} d\zeta; \qquad b) \int_{|\zeta|=1} \frac{e^\zeta}{\zeta^n} d\zeta, \quad n \in \mathbb{N}; \qquad c) \int_{|\zeta-1|=1} \frac{\operatorname{sen}(\pi\zeta)}{(\zeta^2-1)^2} d\zeta.$$

Solución 4

a) Se tiene la siguiente descomposición en fracciones simples: $\frac{1}{\zeta(\zeta-1)} = \frac{1}{\zeta-1} - \frac{1}{\zeta}$; con lo cual, aplicando la fórmula integral de Cauchy, y denotando por $C(0,2)$ a la circunferencia de centro 0 y radio 2 recorrida en sentido positivo, entonces

$$\begin{aligned}
\int_{|\zeta|=2} \frac{e^\zeta}{\zeta(\zeta-1)} d\zeta &= \int_{C(0,2)} \frac{e^\zeta}{\zeta-1} d\zeta - \int_{C(0,2)} \frac{e^\zeta}{\zeta} d\zeta \\
&= 2\pi i e^1 Ind_{C(0,2)}(1) - 2\pi i e^0 Ind_{C(0,2)}(0) = 2\pi i(e-1).
\end{aligned}$$

b) Aplicando la fórmula integral de Cauchy para las derivadas a la función holomorfa $f(z) = e^z$, se tiene que para cada natural $n \geq 1$

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{e^\zeta}{\zeta^n} d\zeta = \int_{C(0,1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^n} d\zeta = \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{n-1)}(0) = \frac{2\pi i}{(n-1)!}.$$

c) Se tiene la siguiente descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{(\zeta^2-1)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{\zeta+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(\zeta+1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{\zeta-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(\zeta-1)^2}.$$

Es claro que las funciones $\zeta \mapsto \frac{\operatorname{sen}(\pi\zeta)}{\zeta+1}$, $\zeta \mapsto \frac{\operatorname{sen}(\pi\zeta)}{(\zeta+1)^2}$ son holomorfas en un abierto que contiene a $D(1,1)$, con lo que su integral a lo largo de $C(1,1)$ es cero. Por otra parte, aplicando la fórmula integral de Cauchy a la función holomorfa $\zeta \mapsto \operatorname{sen}(\pi\zeta)$ y a su derivada primera obtenemos que

$$\int_{C(1,1)} \frac{\operatorname{sen}(\pi\zeta)}{\zeta-1} d\zeta = 2\pi i \operatorname{sen}\pi = 0; \qquad \int_{C(1,1)} \frac{\operatorname{sen}(\pi\zeta)}{(\zeta-1)^2} d\zeta = 2\pi i \pi \cos\pi = -2\pi^2 i.$$

Todo lo cual concluye que

$$\int_{C(1,1)} \frac{\operatorname{sen}(\pi\zeta)}{(\zeta^2-1)^2} d\zeta = -i\frac{\pi^2}{2}.$$

Ejercicio 5

Sea γ la frontera del cuadrado determinado por las cuatro rectas $x = \pm 2$, $y = \pm 2$. Calcular

$$a) \int_\gamma \frac{\cos\zeta}{\zeta^2 + 8} d\zeta; \qquad b) \int_\gamma \frac{\zeta}{2\zeta + 1} d\zeta; \qquad c) \int_\gamma \frac{\cosh\zeta}{\zeta^4} d\zeta.$$

Solución 5

a) La función $\zeta \mapsto \frac{\cos\zeta}{\zeta^2+8}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{i2\sqrt{2}, -i2\sqrt{2}\}$, luego es holomorfa en la componente acotada determinada por γ. Esto implica directamente $\int_\gamma \frac{\cos\zeta}{\zeta^2+8} d\zeta = 0$.

b) Por la fórmula integral de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{\zeta}{2\zeta + 1} d\zeta = \int_\gamma \frac{\zeta/2}{\zeta + 1/2} d\zeta = 2\pi i \frac{-1/2}{2} Ind_\gamma(\frac{-1}{2}) = -i\frac{\pi}{2}.$$

c) Sea la función entera $f(z) = \cosh\zeta$. Se verifica que el punto $z = 0$ está en la componente acotada determinada por γ, luego $Ind_\gamma(0) = 1$. Aplicamos la fórmula integral de Cauchy para las derivadas y obtenemos

$$\int_\gamma \frac{\cosh\zeta}{\zeta^4} d\zeta = \frac{2\pi i}{3!} f'''(0) = 0.$$

Ejercicio 6

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, $z \in \Omega$, $R > 0$ tales que $\overline{D}(z, R) \subseteq \Omega$, y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Demostrar que para todo entero $n \geq 0$ se verifica la siguiente igualdad

$$\int_{|\zeta - z| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{n!} \int_{|\zeta - z| = R} \frac{f^{n)}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Solución 6

Si aplicamos a f la fórmula de Cauchy para las derivadas obtenemos que

$$f^{n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(z,R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Pero si aplicamos a $f^{n)}$ la fórmula de Cauchy obtenemos que

$$f^{n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z,R)} \frac{f^{n)}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

de donde se concluye el resultado.

Ejercicio 7

Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ tal que para cada natural $n \geq 1$ se verifica

$$\int_{C(0,\frac{1}{2})} \frac{f(\zeta)}{\zeta^n} d\zeta = 2\pi i.$$

Hallar la expresión explícita de f.

Solución 7

Como $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!} z^n \qquad \text{para cada } z \in D(0,1).$$

Pero gracias a la hipótesis, la fórmula integral de Cauchy para las derivadas nos dice que

$$\frac{f^{n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,\frac{1}{2})} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = 1 \qquad \text{para cada entero } n \geq 0.$$

Luego

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Ejercicio 8

Sea γ una curva cerrada simple cuya trayectoria coincida con la elipse de ecuación $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, donde $a, b > 0$ son dados. Usar dos modos distintos de calcular $\int_\gamma \frac{1}{\zeta} d\zeta$ para deducir la igualdad

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t} dt = \frac{2\pi}{ab}.$$

Solución 8

Por un lado, directamente de la definición de índice se tiene

$$\int_\gamma \frac{1}{\zeta} d\zeta = 2\pi i Ind_\gamma(0) = 2\pi i,$$

ya que 0 está en la componente acotada definida por γ.

Por otra parte, si efectuamos el cálculo de la integral curvilínea mediante la parametrización natural de la elipse $\gamma(t) = a\cos t + ib\,\mathrm{sen}\, t$, $t \in [0, 2\pi]$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{1}{\zeta} d\zeta &= \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \int_0^{2\pi} \frac{\overline{\gamma(t)}\gamma'(t)}{|\gamma(t)|^2} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(a\cos t - ib\,\mathrm{sen}\, t)(-a\,\mathrm{sen}\, t + ib\cos t)}{a^2\cos^2 t + b^2\,\mathrm{sen}^2\, t} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(b^2 - a^2)\,\mathrm{sen}\, t\cos t + iab}{a^2\cos^2 t + b^2\,\mathrm{sen}^2\, t} dt.
\end{aligned}$$

Juntando ambas cosas obtenemos

$$2\pi i = \int_0^{2\pi} \frac{(b^2 - a^2)\,\mathrm{sen}\, t\cos t + iab}{a^2\cos^2 t + b^2\,\mathrm{sen}^2\, t} dt,$$

y tomando partes imaginarias concluimos que

$$2\pi = ab \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2\,\mathrm{sen}^2\, t} dt,$$

de donde se sigue el resultado buscado.

Ejercicio 9

Sean $R > 1$, $f \in \mathcal{H}(D(0, R))$ y γ la circunferencia unidad recorrida en sentido positivo. Calcular

$$\int_\gamma (2 + \zeta + \frac{1}{\zeta}) \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta$$

y deducir que

$$\int_0^{2\pi} (1 + \cos t) f(e^{it}) dt = 2\pi f(0) + \pi f'(0).$$

Solución 9

Como f es holomorfa en un entorno de $D(0, 1)$, por la fórmula integral de Cauchy,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (2 + \zeta + \frac{1}{\zeta}) \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta &= 2\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \int_\gamma f(\zeta) d\zeta + \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta \\
&= 4\pi i f(0) + 2\pi i f'(0).
\end{aligned}$$

Por otra parte, si efectuamos el cálculo de la integral curvilínea mediante la parametrización natural de la circunferencia $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (2+\zeta+\frac{1}{\zeta})\frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta &= \int_0^{2\pi}(2+e^{it}+e^{-it})\frac{f(e^{it})}{e^{it}}ie^{it}dt \\
&= 2i\int_0^{2\pi}(1+\cos t)f(e^{it})dt.
\end{aligned}$$

Juntando ambas cosas, y dividiendo por $2i$ obtenemos el resultado buscado.

Ejercicio 10

Dados $a \in \mathbb{C}$, $0 < r < R$, $f \in \mathcal{H}(D(a,R))$ y $m \in \mathbb{Z}$, calcular

$$\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})e^{mit}dt.$$

Solución 10

Sea γ el camino $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Entonces

$$\int_\gamma f(\zeta)(\zeta-a)^{m-1}d\zeta = ir^m\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})e^{imt}dt.$$

Con esto, y usando la fórmula integral de Cauchy para la derivadas ya concluimos que

$$\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})e^{imt}dt = -ir^{-m}\int_\gamma f(\zeta)(\zeta-a)^{m-1}d\zeta = \begin{cases} 0 & \text{si } m \geq 1 \\ r^{-m}\frac{2\pi}{(-m)!}f^{-m)}(a) & \text{si } m \leq 0 \end{cases}.$$

Ejercicio 11

Sea f una función holomorfa en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ tal que $|f(z)-1| < 1$ para todo $z \in \Omega$. Demostrar que para todo camino cerrado γ en Ω se verifica que

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0.$$

Solución 11

Definimos la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ mediante $g(z) = \mathrm{Log}(f(z))$. Entonces $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ puesto que nuestra hipótesis afirma que $f(\Omega) \subseteq D(1,1)$, y la función Log es holomorfa en $D(1,1)$. Por tanto, $\int_\gamma g' = 0$. Pero

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

y esto concluye lo que queremos.

Ejercicio 12

Sea f una función entera para la que existen constantes $A, B, k > 0$ tales que

$$|f(z)| \leq A + B\,|z|^k \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Probar que f es un polinomio. ¿De qué grado?

Solución 12

Como f es una función entera, admite un desarrollo en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!} z^n, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Ahora bien, por la fórmula integral de Cauchy para las derivadas,

$$f^{n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \qquad \text{para todo } R > 0.$$

Con esto y gracias a la hipótesis obtenemos la siguiente estimación

$$\left|f^{n)}(0)\right| \leq \frac{n!}{2\pi} \sup_{\zeta \in C(0,R)} \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\right| 2\pi R \leq n! \frac{A + BR^k}{R^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall R > 0.$$

En particular, si $n > k$, haciendo tender $R \to \infty$ se tiene que

$$f^{n)}(0) = 0 \text{ para todo natural } n \geq [k] + 1$$

donde $[k]$ es la parte entera de k. Concluimos por tanto

$$f(z) = \sum_{n=0}^{[k]} \frac{f^{n)}(0)}{n!} z^n, \qquad z \in \mathbb{C}$$

y así f es un polinomio de grado menor o igual que $[k]$.